МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1994

УДК 534.1

© 1994 г. А. С. КОВАЛЕВА

МНОГОЧАСТОТНЫЕ СИСТЕМЫ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЙНОМ ВОЗМУЩЕНИИ

Ч. 1. НЕРЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Строится процедура разделения движений для многочастотных квазиизохронных систем при стационарном случайном возмущении. Показано, что медленное движение аппроксимируется диффузионным процессом. Исследуется структура коэффициентов аппроксимирующего диффузионного процесса. Рассмотрены примеры: вращение волчка Лагранжа при случайных колебаниях точки опоры и устойчивость упругого маятника при горизонтальных колебаниях основания.

1. Разделение движений в возмущенной системе. Динамика квазилинейных систем при случайных возмущениях изучена достаточно подробно [1—4]. На конкретных примерах установлено, что в таких системах проявляются эффекты, аналогичные резонансам различных порядков: характеристики движения зависят от спектров возмущений лишь на определенных частотах. В работе эти соотношения устанавливаются для системы достаточно общего вида

$$x^{\cdot} = \varepsilon F(x, \theta, t), \quad x(t, \varepsilon) = x \in R_n \tag{1.1}$$

$$\theta^{\cdot} = \omega + \varepsilon H(x, \theta, t), \quad \theta(t, \varepsilon) = \theta \in R_m$$

$$F(x, \theta, t) = F_0(x, \theta)\, \xi(t), \quad H(x, \theta, t) = H_0(x, \theta)\, \xi(t)$$

Здесь ε — малый параметр, $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с траекториями в R_l, F_0, H_0 — матрицы соответствующих размерностей, 2π-периодические по каждой из компонент θ_k вектора θ.

Очевидно, что заменой $\theta = \omega t + \varphi$ в (1.1) можно перейти к стандартной форме. Однако, как и в детерминированном случае, результаты значительно упрощаются, если при разделении движений удается отделить медленную переменную x.

Покажем, что при определенных предположениях в системе (1.1) происходит асимптотическое разделение переменных, и при $\varepsilon \to 0$, $0 \le t \le T/\varepsilon^2$ процесс $x(t, \varepsilon)$ слабо сходится [5] к не зависящему от ε медленному диффузионному процессу $x_0(\tau)$ — решению стохастического дифференциального уравнения

$$dx_0 = b(x_0)\, d\tau + \sigma(x_0)\, dw \tag{1.2}$$

Здесь $\tau = \varepsilon^2 t$, $w(\tau)$ — l-мерный стандартный винеровский процесс. Обоснованию предельного перехода от (1.1) к (1.2) посвящены многочисленные работы; обширная библиография приведена в [2—4, 6, 7]. Обобщим процедуру разделения движений на системы типа (1.1) и выделим основные спектральные характеристики возмущения.

Предположим, что коэффициенты системы удовлетворяют следующим условиям:

Условия A: $\xi(t)$ — нормальный стационарный непрерывный справа случайный процесс с нулевым средним. Тогда для каждой компоненты $\xi_i(t)$ процесса $\xi(t)$ при $M\xi_i(t) = 0$ справедливы условия [8]:

$$M_t\xi_i(u) = \xi_i(t)\,\chi_i(u-t),\quad M_t[\xi_i^2(u) - \sigma_i^2] = -\sigma_i^2\chi_i^2(u-t)$$

$$M_t[\xi_i(u)\,\xi_i(z) - K_{ii}(z-u)] = -\sigma_i^2\chi_i(u-t)\,\chi_i(z-u),\quad t \le u \le z$$

Здесь и ниже $M\xi(t)$ — математическое ожидание, $M_t\xi(u)$ — условное математическое ожидание процесса $\xi(t)$, $K_{ii}(u)$ — корреляционная функция компоненты $\xi_i(t)$, $\sigma_i^2 = K_{ii}(0)$, $\chi_i(u) = K_{ii}(u)/\sigma_i^2$. Взаимные моменты компонент ξ_i, ξ_j вычисляются аналогично [8], но для краткости не выписаны. Дополнительно предполагается, что корреляционная матрица $K_\xi(u)$ с компонентами $K_{ij}(u) = M[\xi_i(t+u)\,\xi_j(t)]$ удовлетворяют условию

$$\int_0^\infty |K_\xi(u)|\,du \le c < \infty \tag{1.3}$$

где постоянная c не зависит от ε.

Условия B: функция F_0 равномерно непрерывна вместе с первыми и вторыми производными по x, θ, функция H_0 равномерно непрерывна вместе с первыми производными по x, θ при $x \in R_n$, $\theta \in R_m$. Собственные частоты системы удовлетворяют нерезонансному соотношению $(\lambda, \omega) \ne 0$ для любого целочисленного вектора $\lambda \not\equiv 0$ [9].

Для построения аппроксимирующего диффузионного процесса используем процедуру диффузионной аппроксимации [6, 7], преобразованную [4] для анализа систем с быстрой фазой.

Пусть $x(t, \varepsilon) = x_\varepsilon(\tau)$ — решение системы (1.1), $x_0(\tau)$ — решение уравнения (1.2). Предположим, что для любой достаточно гладкой функции $f(x)$ можно построить функцию $f^\varepsilon(\tau)$ такую, что при $\tau \in [0, T]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ справедливы оценки

$$\sup_{\tau,\varepsilon} M|f^\varepsilon(\tau)| < \infty \tag{1.4}$$

$$\lim M|f^\varepsilon(\tau) - f(x_\varepsilon(\tau))| = 0/\varepsilon \to 0$$

$$\lim M|L^\varepsilon f^\varepsilon(\tau) - Lf(x_\varepsilon(\tau))| = 0/\varepsilon \to 0 \tag{1.5}$$

Здесь L^ε — производящий дифференциальный оператор процесса $f^\varepsilon(\tau)$, определенный формулой [6, 7]:

$$L^\varepsilon f^\varepsilon(\tau) = \lim \delta^{-1}[M_\tau f^\varepsilon(\tau+\delta) - f^\varepsilon(\tau)]/\delta \to 0_+ \tag{1.6}$$

где $M_\tau f^\varepsilon(s)$ — условное математическое ожидание процесса $f^\varepsilon(s)$, $s \ge \tau$, L — производящий дифференциальный оператор диффузионного процесса (1.2) [5]:

$$L = b'(x)\,\partial/\partial x + \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[a(x)\,\partial^2/\partial x^2],\quad a = \sigma\sigma' \tag{1.7}$$

Если перечисленные условия выполняются, то последовательность $x_\varepsilon(\tau)$ слабо сходится при $\varepsilon \to 0$, $\tau \in [0, T]$ к диффузионному процессу $x_0(\tau)$, которому соответствует производящий дифференциальный оператор (1.7). Доказательство приведено в [6, 7]; в [6] вводятся дополнительные требования компактности процесса $x_\varepsilon(\tau)$ и единственности решения уравнения (1.2) при произвольных начальных условиях. Однако там же доказано, что компактность $x_\varepsilon(\tau)$ вытекает из условий (1.4), (1.5), а единственность решения $x_0(\tau)$ — из требований гладкости, перечисленных в условии B. Доказано также [6], что (1.4), (1.5) можно ослабить, заменив $x_\varepsilon(\tau)$ соответствующим усеченным процессом $x_\varepsilon^N(\tau)$, где $x_\varepsilon^N(\tau) = x_\varepsilon(\tau)$ при $\tau < \tau_N$, τ_N — момент первого выхода процесса $x_\varepsilon(\tau)$ из области $S_N : |x| < N$.

2. Построение аппроксимирующего оператора L для системы (1.1). *1. Построение функции $f^\varepsilon(\tau)$.* Пусть $x(t, \varepsilon) = x_\varepsilon(\tau)$, $\theta(t, \varepsilon) = \theta_\varepsilon(\tau)$, $\tau = \varepsilon^2 t$ и $f(x)$ — финитная функция, определенная в области S_N. Построим функцию $f^\varepsilon(\tau)$, связанную с $f(x)$ соотношением

$$f^\varepsilon(\tau) = f(x_\varepsilon^N(\tau)) + \varepsilon f_1(x_\varepsilon^N(\tau), \theta_\varepsilon^N(\tau), t) + \varepsilon^2 f_2(x_\varepsilon^N(\tau), \theta_\varepsilon^N(\tau), t), \quad \tau < \tau_N \tag{2.1}$$

где $x_\varepsilon^N(\tau) = x_\varepsilon(\tau)$ $\theta_\varepsilon^N(\tau) = \theta_\varepsilon(\tau)$ при $\tau < \tau_N$. Определим коэффициенты f_1, f_2 таким образом, чтобы для усеченного процесса $x_\varepsilon^N(\tau)$ выполнялись условия (1.4), (1.5). Из (1.1) имеем

$$L^\varepsilon f^\varepsilon = \varepsilon^{-1}(f_x' F + L_t f_1) + L_t f_2 \tag{2.2}$$

(все коэффициенты вычисляются в точке $x_\varepsilon^N(\tau)$, $\theta_\varepsilon^N(\tau)$, τ, t). Здесь и ниже штрих — знак транспонирования, L_t — оператор типа (1.6), действующий по быстрой переменной

$$L_t f_j(x, \theta, t) = \lim_{\Delta \to 0+} \Delta^{-1}[M_t f_j(x(t + \Delta, \varepsilon), \theta(t + \Delta, \varepsilon), t) - \tag{2.3}$$

$$- f_j(x(t, \varepsilon), \theta(t, \varepsilon), t)] = \varepsilon^2 L^\varepsilon f_j(x_\varepsilon(\tau), \theta_\varepsilon(\tau), \tau/\varepsilon^2)$$

Следуя [4, 6], построим функцию f_1 таким образом, чтобы коэффициент при ε^{-1} в формуле (2.2) обращался в нуль. Определим

$$f_1(x, \theta, t) = f_x'(x) \int_t^\infty M_t F(x, \theta + \omega(u - t), u)\, du \tag{2.4}$$

В подынтегральном выражении x, θ рассматриваются как параметры. Доказано [6], что вычисление оператора L_t для выражений типа (2.4) сводится к вычислению полной производной по t при «замороженном» операторе M_t. Тогда

$$L_t f_1 = f_{1x}' x^\bullet + f_{1\theta}'(\theta^\bullet - \omega) - f_x' F \tag{2.5}$$

При дифференцировании (2.4) по t учтено очевидное для подынтегрального выражения соотношение $\partial F/\partial t = -\omega \partial F/\partial \theta$.

Подставляя (2.5) в (2.2) и принимая во внимание (1.1), получим

$$L^\varepsilon f^\varepsilon = f_{1x}' F + f_{1\theta}' H + L_t f_2 \tag{2.6}$$

Функция f_2 строится таким образом, чтобы исключить из (2.1) секулярные (по θ) составляющие. По аналогии с [4] введем в рассмотрение операторы

$$Q_1(x, \theta, t) = f_{1x}'(x, \theta, t) F(x, \theta, t), \quad Q_2(x, \theta, t) = f_{1\theta}'(x, \theta, t) H(x, \theta, t) \tag{2.7}$$

Покажем, что в случае, когда $\xi(t)$ — стационарный процесс

$$MQ_j(x, \theta, t) = q_j(x, \theta) \tag{2.8}$$

Из (2.4), (2.7) следует, что

$$MQ_1(x, \theta, t) = \int_0^\infty [f_x'(x) F_0(x, \theta + \omega u)]_x K_\xi(u) F_0'(x, \theta)\, du = q_1(x, \theta)$$

Независимость $MQ_2(x, \theta, t)$ от t доказывается аналогично. Определим

$$f_2(x, \theta, t) = \sum_{j=1}^{2} \int_t^\infty [M_t Q_j(x, \theta + \omega(u - t), u) - \bar{q}_j(x)]\, du \tag{2.9}$$

где $\overline{q}_j(x)$ — пространственное среднее

$$\overline{q}_j(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} q_j(x, \theta)\, d\theta \quad (j = 1, 2) \tag{2.10}$$

(существование средних вытекает из свойств функций F_0, H_0).

Условия (1.4), (1.5) выполняются для усеченного процесса $x_\varepsilon^N(\tau)$, если в области $D_N = \{x \in S_N, \theta \in R_m, t \in R_1\}$ справедливы оценки

$$M|f_j(x, \theta, t)| < \infty \quad (j = 1, 2) \tag{2.11}$$

При выполнении условий A и B оценка $M|f_1(x, \theta, t)| < \infty$ строится так же, как для одночастотной системы [4]. Для доказательства аналогичной оценки функции f_2 представим (2.9) в виде

$$f_2(x, \theta, t) = \sum_{j=1}^{2} [I_j(x, \theta, t) + S_j(x, \theta)] \tag{2.12}$$

$$I_j(x, \theta, t) = \int_t^\infty [M_t Q_j(x, \theta + \omega(u - t), u) - q_j(x, \theta + \omega(u - t))]\, du \tag{2.13}$$

$$S_j(x, \theta) = \int_0^\infty [q_j(x, \theta + \omega u) - \overline{q}_j(x)]\, du$$

Оценка $M|I_j| < \infty$ строится так же, как для одночастотной системы [4], оценка $|S_j| < \infty$ вытекает из существования средних (2.10) и строится так же, как в детерминированном случае [9].

Таким образом, функция $f^\varepsilon(\tau)$ определяется соотношениями (2.1), (2.4), (2.9) и для нее выполняются условия (1.4) при $\tau < \tau_N$.

2. *Построение оператора L.* Из (2.3), (2.7)—(2.9) имеем

$$L_t f_2 = f'_{1x} F - f'_{1\theta} H + f'_{2x} x^\bullet + f'_{2\theta}(\theta^\bullet - \omega) + \overline{q}_1(x) + \overline{q}_2(x)$$

т. е., в силу (2.6):

$$L^\varepsilon f^\varepsilon = \overline{q}_1 + \overline{q}_2 + \varepsilon f'_{2x} F + \varepsilon f'_{2\theta} H \tag{2.14}$$

все слагаемые вычисляются в точке x, θ, t, τ. Выпишем в явном виде операторы $\overline{q}_j(x)$. Из (2.8), (2.10) следует, что

$$\overline{q}_1(x) = b_1'(x) f_x(x) + \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr} a(x) f_{xx}(x), \quad \overline{q}_2(x) = b_2'(x) f_x(x) \tag{2.15}$$

$$b_j(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty B_j(x, \theta, u)\, du \quad (j = 1, 2) \tag{2.16}$$

$$B_1^i(x, \theta, u) = \frac{\partial F_{ir}(x, \theta + \omega u)}{\partial x_p} K_{rk}(u) F_{pk}(x, \theta) \tag{2.17}$$

$$B_2^i(x, \theta, u) = \frac{\partial F_{ir}(x, \theta + \omega u)}{\partial \theta_p} K_{rk}(u) H_{pk}(x, \theta)$$

Здесь B_j^i — i-я компонента вектора B_j, F_{pk}, H_{pk} компоненты матриц F_0, H_0; по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Симметризованная матрица диффузии $a(x) = \sigma(x)\sigma'(x)$ представима в виде

$$a(x) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} A(x, \theta, u)\, du,$$

$$A(x, \theta, u) = F_0(x, \theta + \omega u) K_\xi(u) F_0'(x, \theta) \qquad (2.18)$$

Определим оператор L, входящий в условие (1.5), формулой

$$Lf(x) = \bar{q}_1(x) + \bar{q}_2(x) = b'(x) f_x(x) + 1/2 \operatorname{Tr} a(x) f_{xx}(x) \qquad (2.19)$$

$b = b_1 + b_2$. В [4, 6] показано, что (1.5) выполняется, если в области D_N справедливы оценки (2.11).

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если условия A и B выполняются, то при $t \in [0, T/\varepsilon^2]$, $\varepsilon \to 0$ решение $x(t, \varepsilon)$ системы (1.1) слабо сходится к диффузионному процессу $x_0(\tau)$, $\tau = \varepsilon^2 t$, которому соответствует производящий дифференциальный оператор (2.19).

Установим вид коэффициентов оператора (2.19). Пусть

$$F_{ir}(x, \theta) = \sum_{s=0}^{S} F_{ir}^s(x) \cos(\lambda^s, \theta + \alpha_{ir}^s), \qquad (2.20)$$

$$H_{pk}(x, \theta) = \sum_{s=0}^{S} H_{pk}^s(x) \cos(\lambda^s, \theta + \beta_{pk}^s)$$

Здесь λ^s — целочисленный вектор с компонентами $\lambda^{s1}, \ldots, \lambda^{sm}$, такой, что $\lambda^0 = 0$, $|\lambda^s| \neq 0$, $s \neq 0$ и скалярное произведение $(\lambda^s, \theta) \neq (\lambda^l, \theta)$ при всех $\theta \in R_m$, если $s \neq l$.

Тогда из (2.16)—(2.18) получим

$$a_{ij}(x) = F_{ir}^0(x) F_{jk}^0(x) S_{rk}(0) + 1/2 F_{ir}^s(x) F_{jk}^s(x) S_{rk}(\lambda^s, \omega) \cos(\lambda^s, \alpha_{ir}^s - \alpha_{jk}^s) \qquad (2.21)$$

$$b_1^i(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial F_{ir}^0(x)}{\partial x_j} F_{jk}^0(x) S_{rk}(0) +$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{\partial F_{ir}^s(x)}{\partial x_j} F_{jk}^s(x) [S_{rk}(\lambda^s, \omega) \cos(\lambda^s, \alpha_{ir}^s - \alpha_{jk}^s) -$$

$$- Z_{rk}(\lambda^s, \omega) \sin(\lambda^s, \alpha_{ir}^s - \alpha_{jk}^s)$$

$$b_2^i(x) = -1/4 \lambda^{sj} F_{ir}^s(x) H_{jk}^s(x) [S_{rk}(\lambda^s, \omega) \sin(\lambda^s, \alpha_{ir}^s - \beta_{jk}^s) +$$

$$+ Z_{rk}(\lambda^s, \omega) \cos(\lambda^s, \alpha_{ir}^s - \beta_{jk}^s)$$

где по повторяющимся индексам проводится суммирование. В (2.21) обозначено

$$S_{rk}(\omega) = 2\int_0^{\infty} K_{ik}(u) \cos \omega u\, du, \quad Z_{rk}(\omega) = 2\int_0^{\infty} K_{rk}(u) \sin \omega u\, du \qquad (2.22).$$

Из (2.20) следует, что периодические коэффициенты в (1.1) включают гармоники с частотами $(\lambda^s, \omega) = \lambda^{s1}\omega_1 + \ldots + \lambda^{sm}\omega_m$.

В (2.21) показано, что коэффициенты сноса и диффузии аппроксимирующего процесса (1.2) зависят от спектральных характеристик возмущения $\xi(t)$ на этих же частотах. Если расценивать выделение доминирующих частот как аналог резонансных факторов, то можно утверждать, что случайные возмущения всегда возбуждают движения резонансного типа. Стохастические аналоги резонансов для частных случаев системы (1.1) подробно рассмотрены в [1—4].

3. **Замечания.** *1.* Пусть возмущенная система имеет вид

$$x^{\bullet} = \varepsilon F(x, \theta, t) + \varepsilon G(x, \theta), \quad \theta^{\bullet} = \omega + \varepsilon H(x, \theta, t) + \varepsilon D(x, \theta) \tag{3.1}$$

где функции G, D представимы в виде

$$G(x, \theta) = G^s(x) \cos(\lambda^s, \theta + \alpha^s), \quad D(x, \theta) = D^s(x) \cos(\lambda^s, \theta + \beta^s) \tag{3.2}$$

(как и выше, по повторяющимся индексам проводится суммирование, $s = 1, \ldots, S$). Тогда коэффициент b в операторе (2.19) принимает вид $b = b_1 + b_2 + \varkappa_1 + \varkappa_2$, где

$$\varkappa_l(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} K_l(x, \theta)\, d\theta, \quad K_1(x, \theta) = G_x(x, \theta)\, G^s(x) \frac{\sin(\lambda^s, \theta + \alpha^s)}{(\lambda^s, \omega)} \tag{3.3}$$

$$K_2(x, \theta) = G_\theta(x, \theta)\, D^s(x) \sin(\lambda^s, \theta + \alpha^s)/(\lambda^s, \omega)$$

Как и для систем в стандартной форме [2—4], слагаемые $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ учитывают второе приближение метода усреднения для детерминированной части системы (3.1) [9].

2. Из анализа коэффициентов (2.15)—(2.18) следует, что при выполнении условий (1.3) и B пространственные средние $\overline{q}_j(x)$ совпадут с временными средними функций $Q_j(x, \omega t + \varphi, t)$ при всех φ. Условие B определяет отсутствие резонанса в детерминированном смысле; условия (1.3) означают, что спектр системы достаточно гладкий и не имеет острых пиков, в том числе и на частотах (λ^s, ω).

3. Предположение о нормальности процесса $\xi(t)$ может быть заменено более общими условиями перемешивания [4, 6].

4. Возмущенные движения волчка Лагранжа при случайных колебаниях точки опоры. Рассмотрим быстрое вращение динамически симметричного тяжелого волчка при вертикальных колебаниях точки опоры. Уравнения движения приводятся к виду [10]:

$$Ap^{\bullet} + (C - A)\, qr = G_1 + \varepsilon M_1 \tag{4.1}$$

$$Aq^{\bullet} + (A - C)\, pr = G_2 + \varepsilon M_2, \quad Cr^{\bullet} = 0$$

$$\psi^{\bullet} = \varepsilon(p \sin\varphi + q\cos\varphi) \operatorname{coseq}\theta, \quad \theta^{\bullet} = \varepsilon(p\cos\varphi - q\sin\varphi)$$

$$\varphi^{\bullet} = r - \varepsilon(p\sin\varphi + q\cos\varphi) \operatorname{ctg}\theta$$

Динамические уравнения (4.1) записаны в проекциях на главные оси инерции тела, проходящие через точку опоры. Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости на эти оси, M_l — проекции вектора возмущающего момента сил инерции, G_l — проекции вектора момента сил тяжести на эти оси, ψ — угол прецессии, θ — угол нутации, φ — угол собственного вращения. Введение малого параметра ε означает [10], что $p^2 + q^2 \ll r^2$, $Cr^2 \gg mgl$ и возмущающие силы малы по сравнению с силами тяжести. Моменты сил имеют вид

$$M_1 = mla(t) \sin\theta \cos\varphi, \quad G_1 = mgl \sin\theta\cos\varphi \tag{4.2}$$

$$M_2 = -mla(t)\sin\theta\sin\varphi, \quad G_2 = -mgl\sin\theta\sin\varphi$$

Здесь m — масса тела, l — расстояние от точки опоры до центра тяжести, g — ускорение силы тяжести, $a(t)$ — ускорение точки опоры. Предполагаем, что $a(t)$ включает периодическую и случайную составляющие

$$a(t) = g\,[\xi(t) + \rho\cos\omega_1 t] \tag{4.3}$$

где $\xi(t)$ — стационарный нормальный процесс с нулевым средним, удовлетворяющий условию (1.3).

Для приведения системы (4.1) к стандартной форме введем новые переменные x, α по формулам (ср. [10]):

$$p = e^x\cos(\alpha - \varphi) + k\sin\theta\sin\varphi \tag{4.4}$$

$$q = e^x\sin(\alpha - \varphi) + k\sin\theta\cos\varphi, \quad k = mglC^{-1}r^{-1}$$

После преобразований получим

$$x^{\cdot} = \varepsilon e^{-x}\cos\alpha\left\{\mu\sin\theta\,[\xi(t) + \rho\cos\nu] + \frac{1}{2}k^2\sin 2\theta\right\} \tag{4.5}$$

$$\theta^{\cdot} = \varepsilon e^x\cos\alpha, \quad \psi^{\cdot} = \varepsilon(e^x\sin\alpha + k\sin\theta)\operatorname{cosec}\theta$$

$$\varphi^{\cdot} = r - \varepsilon(e^x\sin\alpha + k\sin\theta)\operatorname{ctg}\theta, \quad \nu^{\cdot} = \omega_1$$

$$\alpha^{\cdot} = \omega_2 - \varepsilon e^{-x}\sin\alpha\,\{\mu\sin\theta\,[\xi(t) + \rho\cos\nu] + \tfrac{1}{2}k^2\sin 2\theta\} -$$

$$- \varepsilon(2k\cos\theta + e^x\sin\alpha\operatorname{ctg}\theta)$$

$$\mu = mglA^{-1}, \quad \omega_2 = CA^{-1}r$$

Ограничимся рассмотрением нерезонансного случая, когда частоты ω_1, ω_2 и r несоизмеримы. Тогда из теоремы 1 с учетом (2.15)—(2.18), (3.3) следует, что при $\varepsilon \to 0$ процесс $x(t, \varepsilon)$ слабо сходится к медленному диффузионному процессу $x_0(\tau)$, удовлетворяющему уравнению

$$dx_0 = e^{-x_0}\sigma_0\,dw(\tau), \quad \tau = \varepsilon^2 t \tag{4.6}$$

$$\sigma_0^2 = \tfrac{1}{2}\mu^2\sin^2\theta_0 S(\omega_2), \quad \theta_0 = \theta(0) = \text{const}$$

Используя (4.4), (4.6), оценим характер среднеквадратичного значения угловой скорости

$$\Omega^2(x, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} d\alpha\int_0^{2\pi} M\omega^2(x, \theta, \alpha, \varphi)\,d\varphi \tag{4.7}$$

$$\omega^2 = p^2 + q^2 = e^{2x} + k^2\sin^2\theta + 2ke^x\sin\theta\cos\alpha$$

Из (4.6), (4.7) следует, что при $\varepsilon \to 0$, $0 \le t \le T/\varepsilon^2$:

$$\Omega^2(x, \theta) = M(e^{2x} + k^2\sin^2\theta) = \Omega^2(x_0, \theta_0) + \varepsilon\ldots \tag{4.8}$$

$$x_0 = x_0(\tau), \quad \theta_0 = \theta(0) = \text{const}$$

откуда, в силу (4.6), получим

$$\Omega^2(x_0(\tau), \theta_0) = \Omega_0^2 + 2\sigma_0^2\tau, \quad \Omega_0^2 = p^2(0) + q^2(0) \tag{4.9}$$

Таким образом, в нерезонансном случае периодические возмущения не влияют на медленную эволюцию системы, а случайные возмущения вызывают неустойчивость вращения.

5. **Колебания маятника на упругом подвесе при горизонтальных колебаниях основания.** Линеаризованные уравнения движения приводятся к виду [4]:

$$\delta^{\cdot\cdot} + \omega_1^2\delta + 2\varepsilon^2\beta_1\delta^{\cdot} = \varepsilon\xi(t)\varphi \tag{5.1}$$

$$\varphi^{\cdot\cdot} + \omega_2^2\varphi + 2\varepsilon^2\beta_2\varphi^{\cdot} = \varepsilon\xi(t)(1-\delta)$$

Здесь φ — угол отклонения маятника от вертикали, $\delta = z/l$ — упругая деформация подвеса, отсчитываемая от положения статического равновесия, l — длина подвеса в положении статического равновесия, $\omega_1^2 = c/m$, $\omega_2^2 = g/l$, c — жесткость подвеса, m — масса маятника, $\varepsilon\xi(t) = a(t)/l$, $a(t)$ — горизонтальное ускорение основания, $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним и спектральной плотностью $S(\omega)$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ — приведенные коэффициенты диссипации, ε — малый параметр. Заменой переменных

$$\delta = R_1\cos\theta_1, \quad \delta^{\cdot} = -\omega_1 R_1 \sin\theta_1 \tag{5.2}$$

$$\varphi = R_2\cos\theta_2, \quad \varphi^{\cdot} = -\omega_2 R_2\sin\theta_2$$

система (5.1) приводится к стандартной форме

$$R_1^{\cdot} = -\varepsilon\omega_1^{-1}\xi(t)R_2\cos\theta_2\sin\theta_1 - 2\varepsilon^2\beta R_1\sin^2\theta_1 \tag{5.3}$$

$$R_2^{\cdot} = -\varepsilon\omega_2^{-1}\xi(t)(1-R_1\cos\theta_1)\sin\theta_2 - 2\varepsilon^2\beta R_2\sin^2\theta_2$$

$$\theta_1^{\cdot} = \omega_1 - \varepsilon(\omega_1R_1)^{-1}\xi(t)R_2\cos\theta_2\cos\theta_1 - 2\varepsilon^2\beta\sin\theta_1\cos\theta_1$$

$$\theta_2^{\cdot} = \omega_2 - \varepsilon(\omega_2R_2)^{-1}\xi(t)(1-R_1\cos\theta_1)\cos\theta_2 - 2\varepsilon^2\beta\sin\theta_2\cos\theta_2$$

При преобразованиях (5.2) в уравнениях (5.3) появилась особенность типа R^{-1}. Справедливость теоремы 1 в этом случае может быть показана так же, как для системы в стандартной форме [4].

Ограничимся рассмотрением нерезонансного случая, когда частоты ω_1, ω_2 несоизмеримы. Тогда из теоремы 1 с учетом (3.3)—(3.8) следует, что при $\varepsilon \to 0$ амплитуды R_1, R_2 слабо сходятся к диффузионным процессам r_1, r_2, удовлетворяющим уравнениям

$$dr_1 = [(\eta-\beta)r_1 + \tfrac{1}{2}\alpha_1 r_2^2/r_1]\,d\tau + \sigma_{11}\,dw_1 + \sigma_{12}\,dw_2 \tag{5.4}$$

$$dr_2 = [\delta/r_2 + (\eta-\beta)r_2 + \tfrac{1}{2}\alpha_2 r_1^2/r_2]\,d\tau + \sigma_{21}\,dw_1 + \sigma_{22}\,dw_2$$

$$\eta = (8\omega_1\omega_2)^{-1}[S(\omega_1-\omega_2) - S(\omega_1+\omega_2)] \tag{5.5}$$

$$\alpha_j = (8\omega_j^2)^{-1}[S(\omega_1-\omega_2) + S(\omega_1+\omega_2)], \quad \delta = (4\omega_2^2)^{-1}S(\omega_2)$$

где компоненты σ_{ij} матрицы диффузии σ определяются соотношениями

$$\sigma_{i1}\sigma_{j1} + \sigma_{i2}\sigma_{j2} = a_{ij} \tag{5.6}$$

$$a_{11} = \alpha_1 r_2^2, \quad a_{22} = \alpha_2 r_1^2 + 2\delta, \quad a_{12} = a_{21} = -\eta r_1 r_2 \tag{5.7}$$

Установим условия устойчивости системы в среднеквадратичном. Пусть $\mu_j = Mr_j^2$. Тогда из теоремы 1 следует, что при $\tau \in [0, T]$ и достаточно малых ε справедлива оценка

$$|MR_j^2(t,\varepsilon) - \mu_j(\tau)| \le c\varepsilon, \quad t = \tau/\varepsilon^2 \tag{5.8}$$

Из (5.4) легко получить уравнения для моментов

$$d\mu_1/d\tau = 2(\eta - \beta)\mu_1 + 2\alpha_1\mu_2 \tag{5.9}$$

$$d\mu_2/d\tau = 2\alpha_2\mu_1 + 2(\eta - \beta)\mu_2 + 4\delta$$

Характеристическое уравнение системы (5.9) имеет вид

$$[p - 2(\eta - \beta)]^2 - 4\alpha_1\alpha_2 = 0 \tag{5.10}$$

откуда следует

$$p_1 = \frac{S(\omega_1 - \omega_2)}{2\omega_1\omega_2} - 2\beta, \tag{5.11}$$

$$p_2 = -\frac{S(\omega_1 + \omega_2)}{2\omega_1\omega_2} - 2\beta$$

Таким образом, благодаря перекрестным связям, в системе возникают эффекты типа комбинационных резонансов. Если

$$S(\omega_1 - \omega_2) < 4\beta\omega_1\omega_2 \tag{5.12}$$

то система (5.9) экспоненциально асимптотически устойчива. Следуя [6], можно показать, что при экспоненциальной устойчивости (5.9) оценка (5.8) справедлива при всех $t \in [0, \infty)$, т. е. неравенство (5.12) обеспечивает устойчивость возмущенной системы (5.1) в среднеквадратичном.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 93-012-874.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.
2. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
3. *Диментберг М. Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. М.: Наука, 1989. 175 с.
4. *Ковалева А. С.* Управление колебательными и виброударными системами. М.: Наука, 1990. 256 с.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965. 568 с.
6. *Kushner H. J.* Approximation and Weak Convergence Methods for Random Processes, with Applications to Stochastic Systems Theory. Cambridge, MA: The MIT Press, 1984. 269 p.
7. *Kurtz T. G.* Semigroups of conditional shifts and approximations of Markov processes//Ann. Prob. 1975. V. 3. No. 4. P. 618—642.
8. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986. 431 с.
9. *Волосов Б. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ. 1971. 507 с.
10. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 3—10.

Москва

Поступила в редакцию
3.XII.1991