МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1994

УДК 531.36

 А. П. СЕЙРАНЯН

О ТЕОРЕМАХ МЕТЕЛИЦЫНА

Анализируются работы И. И. Метелицына [1, 2], вызвавшие немалый интерес исследователей. Подчеркнуты сильные стороны этих работ. С использованием неравенства, полученного в [1], доказана теорема о стабилизации механической системы диссипативными и потенциальными силами.

1. В [1] рассматриваются уравнения движения линейной механической системы

$$\sum_{s=1}^{n}(a_{rs}\ddot{x}_s + b_{rs}\dot{x}_s + \gamma_{rs}\dot{x}_s + c_{rs}x_s + \varepsilon_{rs}x_s) = 0\ (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Постоянные коэффициенты этой системы имеют определенный механический смысл: величины $a_{rs} = a_{sr}$ характеризуют инерционные свойства системы, матрица $\|a_{rs}\|$ является положительно определенной; величины $b_{rs} = b_{sr}$ характеризуют диссипативные силы, величины $\gamma_{rs} = -\gamma_{sr}$ характеризуют гироскопические силы, величины c_{rs} описывают потенциальные силы $c_{rs} = c_{sr}$, а величины $\varepsilon_{rs} = -\varepsilon_{sr}$ описывают неконсервативные позиционные силы.

Решение системы (1.1) ищется в виде $x_s = A_s e^{\lambda t}$, где t — время. В результате приходим к системе линейных однородных уравнений относительно констант A_s:

$$\sum_{s=1}^{n}[a_{rs}\lambda^2 + (b_{rs} + \gamma_{rs})\lambda + c_{rs} + \varepsilon_{rs}]A_s = 0\ (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Условием разрешимости этой системы служит равенство нулю детерминанта

$$\det\|a_{rs}\lambda^2 + (b_{rs} + \gamma_{rs})\lambda + c_{rs} + \varepsilon_{rs}\| = 0 \tag{1.3}$$

Раскрывая определитель и приравнивая его нулю, получим характеристическое уравнение порядка $2n$ относительно λ. Заметим, что ввиду вещественности коэффициентов уравнения (1.3) наряду с λ, существует и комплексно-сопряженный корень $\bar{\lambda}$, которому отвечает комплексно-сопряженный собственный вектор $\bar{A} = (\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n)$.

Умножим уравнение (1.2) на $\bar{A}_r$ и просуммируем по r. В результате имеем

$$T\lambda^2 + (D + i\Gamma)\lambda + P + iE = 0 \tag{1.4}$$

$$T = \sum_{s,r=1}^{n} a_{rs}A_s\bar{A}_r,\ D = \sum_{s,r=1}^{n} b_{rs}A_s\bar{A}_r,\ P = \sum_{s,r=1}^{n} c_{rs}A_s\bar{A}_r$$

$$i\Gamma = \sum_{r,s=1}^{n}\gamma_{rs}A_s\bar{A}_r,\ iE = \sum_{r,s=1}^{n}\varepsilon_{rs}A_s\bar{A}_r \tag{1.5}$$

Ввиду симметрии коэффициентов a_{rs}, b_{rs}, c_{rs} величины T, D, P действительны.

В самом деле, положим $A_r = A_r' + iA_r''$, где i — мнимая единица. Тогда, например, T будет

$$T = \sum_{s, r=1}^{n} a_{rs} A_r' A_s' + \sum_{s, r=1}^{n} a_{rs} A_r'' A_s'' \tag{1.6}$$

Если матрицы b_{rs}, c_{rs} положительно или отрицательно определены, то величины D, P, соответственно, положительные или отрицательные. Матрица масс считается положительно определенной, поэтому $T > 0$.

Величины Γ и E в (1.4), (1.5) действительные. Это следует из кососимметрии коэффициентов γ_{ij}, ε_{ij}. Например

$$\sum_{s, r=1}^{n} \gamma_{rs} (A_s' + iA_s'')(A_r' - iA_r'') = i \sum_{s, r=1}^{n} (\gamma_{rs} A_s'' A_r' - \gamma_{rs} A_s' A_r'') =$$

$$= 2i \sum_{s, r=1}^{n} \gamma_{rs} A_s'' A_r'$$

поэтому

$$\Gamma = 2 \sum_{s, r=1}^{n} \gamma_{rs} A_s'' A_r', \quad E = 2 \sum_{s, r=1}^{n} \varepsilon_{rs} A_s'' A_r' \tag{1.7}$$

Соотношение (1.4) представляет собой квадратное уравнение относительно λ. Разрешив его, имеем [1]:

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2} \left[-(D + i\Gamma) \pm \sqrt{m + in} \right] / T \tag{1.8}$$

$$m = D^2 - \Gamma^2 - 4TP, \quad n = 2D\Gamma - 4TE$$

Заметим, что величины T, D, Γ, P, E соответствует собственному вектору A, отвечающему собственному значению λ. Поэтому лишь один из корней квадратного уравнения (1.8) является собственным значением λ. Второй корень может оказаться лишним. Априори неизвестно, какой знак — плюс или минус надо выбрать перед радикалом.

Обозначим $(m + in)^{1/2} = a + ib$. Тогда для a получим квадратное уравнение, из которого определим a, а затем найдем b:

$$a = \pm \left[\tfrac{1}{2} (m + (m^2 + n^2)^{1/2}) \right]^{1/2}, \quad b = \tfrac{1}{2} n / a \tag{1.9}$$

Достаточное условие асимптотической устойчивости системы, как нетрудно видеть из (1.8), имеет вид

$$-D \pm a < 0 \tag{1.10}$$

Это условие означает, что все корни λ лежат в левой части комплексной плоскости.

Считая матрицу диссипативных сил $\|b_{rs}\|$ положительно определенной, имеем $D > 0$. Тогда условие (1.10) с учетом (1.9) можно преобразовать к виду $m^2 + n^2 < (2D^2 - m)^2$. В результате несложных преобразований это соотношение запишется в виде

$$TE^2 < D\Gamma E + D^2 P \tag{1.11}$$

Это неравенство было получено в [1] и уточнено в [3]. Через 20 лет это же неравенство было получено в [4].

Из (1.11) выводятся теоремы Метелицына [1, 3]. К сожалению, эти теоремы ошибочны или не доказаны. Критические замечания в адрес этих теорем содержатся в [5—7]. Доказательства некоторых теорем содержат логическую ошибку. Так, теоремы 1 и 3 носят необходимый характер, а выводятся из достаточного условия.

Тем не менее, достаточное условие устойчивости (1.11) является весьма полезным. Из него, например, следует справедливость третьей теоремы Томсона — Тета — Четаева. Действительно, положив в (1.11) $E=0$, получим $D^2P>0$. Следовательно, статически устойчивая система становится асимптотически устойчивой при произвольных гироскопических силах и диссипативных силах с полной диссипацией.

На основании условия (1.11) можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема. Система (1.1) может быть стабилизирована достаточно большими диссипативными ($D>0$) и (или) потенциальными силами ($P>0$).

Эта теорема обобщает ряд результатов, полученных в [4, 5, 7—9]. Приведем доказательство теоремы.

Прежде всего, справедливо неравенство

$$D^2P + D\Gamma E - TE^2 \geq D^2P - D\,|\Gamma|\;|E| - T\,|E|^2 \tag{1.12}$$

Оценим величины D, T, P, используя (1.5), (1.6). Круглыми скобками обозначим скалярное произведение в R^n:

$$d_1\,[(A',A')+(A'',A'')] \leq D = \sum_{r,s=1}^{n} b_{rs}A_s\bar{A}_r \leq$$

$$\leq d_2\,[(A',A')+(A'',A'')] \tag{1.13}$$

Здесь d_1 и d_2, соответственно, минимальное и максимальное собственные значения положительно определенной матрицы диссипативных сил $\|b_{rs}\|$, $d_1>0$, $d_2>0$. Аналогично имеем

$$T \leq t_2\,[(A',A')+(A'',A'')],\quad P \geq p_1\,[(A',A')+(A'',A'')] \tag{1.14}$$

где t_2 — максимальное собственное значение матрицы $\|a_{rs}\|$, а p_1 — минимальное собственное значение матрицы $\|c_{rs}\|$, $t_2>0$, $p_1>0$.

Оценим теперь сверху величины $|\Gamma|$ и $|E|$. Используя (1.7), получим

$$\Gamma^2 = \Big(2\sum_{s,r=1}^{n}\gamma_{rs}A_s''A_r'\Big)^2 \leq 4\,(\gamma A'',\gamma A'')\,(A',A') = 4\,(\gamma^T\gamma A'',A'')\,(A',A') \leq$$

$$\leq 4\gamma_2^2\,(A'',A'')\,(A',A') \leq \gamma_2^2\,[(A'',A'')+(A',A')]^2,\ \gamma=\|\gamma_{rs}\| \tag{1.15}$$

Здесь γ_2^2 является максимальным собственным значением симметричной и положительно определенной матрицы $\gamma^T\gamma$, $\gamma_2>0$. Заметим, что $\gamma^T\gamma=-\gamma^2$, поскольку $\gamma^T=-\gamma$. Из (1.15) следует $|\Gamma| \leq \gamma_2\,[(A'',A'')+(A',A')]$. Аналогично получим

$$|E| < \varepsilon_2\,[(A'',A'')+(A',A')] \tag{1.16}$$

где ε_2^2 — максимальное собственное значение матрицы ε^2, $\varepsilon=\|\varepsilon_{rs}\|$, $\varepsilon_2>0$.

Объединяя оценки (1.12)—(1.16), имеем

$$D^2P + D\Gamma E - TE^2 \geq (d_1^2p_1 - d_2\gamma_2\varepsilon_2 - t_2\varepsilon_2^2)\,[(A',A')+(A'',A'')]^3 > 0$$

Последнее неравенство справедливо, если выполнено соотношение

$$d_1^2p_1 - d_2\gamma_2\varepsilon_2 - t_2\varepsilon_2^2 > 0 \tag{1.17}$$

так как $[(A',A')+(A'',A'')]>0$ при любом собственном векторе $A=A'+iA''$. Соотношение (1.17) является достаточным условием асимптотической устойчивости системы (1.1). Это соотношение может быть обеспечено за счет выбора достаточно больших значений d_1, p_1, т. е. за счет больших диссипативных и потенциальных сил. Заметим, что для обеспечения условия устойчивости диссипативными силами величина d_2 — должна возрастать не быстрее, чем d_1^2. Например, если $\|b_{ij}\| = k\, \|d_{ij}\|$, где $\|d_{ij}\|$ — фиксированная матрица, а k — параметр, $k > 0$, то (1.17) будет выполнено при достаточно больших k.

Доказанную теорему можно интерпретировать и следующим образом: при наличии диссипативных сил небольшие гироскопические и неконсервативные силы не могут дестабилизировать статически устойчивую систему.

2. Перейдем к анализу работы [2]. В ней рассматривается гироскопическая консервативная система, поэтому в уравнении (1.4) следует положить $D = 0$, $E = 0$. В результате, согласно (1.8), получаются следующие выражения для корней:

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2} i - \left(\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 + 4TP} \right) / T \tag{2.1}$$

Отсюда видно, что если система статически устойчива ($P > 0$), то оба корня (2.1) чисто мнимые. Знак плюс в (2.1) соответствует положительной частоте $\lambda_1 = i\omega_1$, $\omega_1 > 0$, а минус — отрицательной частоте $\lambda_2 = -i\omega_2$, $\omega_2 > 0$. Так как наряду с корнем λ существует и комплексно-сопряженный корень $\bar{\lambda}$, то, следовательно, в выражениях (2.1) n раз надо взять знак плюс и n раз знак минус.

В [2] изучается влияние масс и жесткостей на частоты колебаний. Для статически устойчивой гироскопической системы получены выражения для производных от λ по коэффициентам матрицы жесткостей c_{rs}:

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial c_{rs}} = i \frac{\partial P/\partial c_{rs}}{\sqrt{\Gamma^2 + 4PT}}, \quad \frac{\partial\lambda_2}{\partial c_{rs}} = -i \frac{\partial P/\partial c_{rs}}{\sqrt{\Gamma^2 + 4PT}} \tag{2.2}$$

и матрицы масс a_{rs}:

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial a_{rs}} = -i \frac{\lambda_1^2 \partial T/\partial a_{rs}}{\sqrt{\Gamma^2 + 4PT}}, \quad \frac{\partial\lambda_2}{\partial a_{rs}} = -i \frac{\lambda_2^2 \partial T/\partial a_{rs}}{\sqrt{\Gamma^2 + 4PT}} \tag{2.3}$$

$$\lambda_1 = i\omega_1,\ \lambda_2 = -i\omega_2\ (\omega_1, \omega_2 > 0)$$

Исходя из (2.2), (2.3), И. И. Метелицын [2] сформулировал утверждение.

С увеличением жесткости идеальной гироскопической системы частоты колебаний ее увеличиваются. С увеличением масс системы частоты колебаний уменьшаются, если система статически устойчива.

Увеличение жесткости и массы здесь понимаются в смысле потенциальной и кинетической энергии. В нелокальном варианте эта теорема была доказана в [10, 11]. Случай кратных частот рассмотрен в [12].

Вывод выражений (2.2), (2.3) в [2] основан на предположении, что при вычислении производных от λ не варьируется собственный вектор $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Это предположение оказывается верным для идеальной гироскопической системы, поскольку соответствующая вариация равна нулю [12]. Однако в общем случае $E \neq 0$, $\Gamma \neq 0$ это предположение неверно. В общем случае производные от λ по параметрам системы содержат собственный вектор сопряженной задачи, отличный от A [12]. По этой причине выражения для производных (6), (7) в [2] в случае $E \neq 0$, $\Gamma \neq 0$ неверны, а соответствующие выводы сомнительны.

В заключение отметим, что хотя отдельные результаты И. И. Метелицына представляют ограниченный интерес, тем не менее его подход, связанный с анализом корней характеристического уравнения, оказался плодотворным и способствовал получению ряда новых результатов. То же самое можно сказать и о результатах И. И. Метелицына о влиянии масс и жесткостей на частоты колебаний гироскопической системы.

Автор благодарит А. Ю. Ишлинского, В. Ф. Журавлева и В. Клима за интерес к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Метелицын И. И.* К вопросу о гироскопической стабилизации // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. № 1. С. 31—34.
2. *Метелицын И. И.* Влияние изменения параметров линейных гироскопических систем на частоты колебаний и коэффициенты затухания // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. № 3. С. 540—542.
3. *Метелицын И. И.* Избранные труды. М.: Наука, 1977. 131 с.
4. *Frik M.* Zur Stabilität nichtkonservativer linearer Systeme // ZAMM. 1972. B. 52. S. 47—49.
5. *Агафонов С. А.* Об устойчивости неконсервативных систем // Вестник МГУ. Математика, механика. 1972. № 4. С. 87—90.
6. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
7. *Лахаданов В. М.* О влиянии структуры сил на устойчивость движения // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 246—253.
8. *Карапетян А. В.* Об устойчивости неконсервативных систем // Вестник МГУ. Математика, механика. 1975. № 4. С. 109—113.
9. *Вербицкий В. Г.* Влияние структуры сил на устойчивость линейной системы // Прикл. механика. 1982. Т. 18. № 12. С. 119—121.
10. *Журавлев В. Ф.* Обобщение теоремы Релея на гироскопические системы // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 606—610.
11. *Балинский А. И.* Поведение частот гироскопических систем // В кн.: Математические методы и физико-механические поля. Киев: Наук. думка, 1978. Вып. 7. С. 20—21.
12. *Сейранян А. П., Шаранюк А. В.* Анализ чувствительности частот колебаний механических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 37—41.

Москва

Поступила в редакцию 29.IV.1991