

УДК 531.36

© 1994 г. И. К. ВАЛЕЕВА, В. И. ГУЛЯЕВ, В. Л. КОШКИН

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ ШАРНИРНОЙ СВЯЗКИ ДВУХ ТЕЛ, НЕСУЩИХ МАХОВИКИ

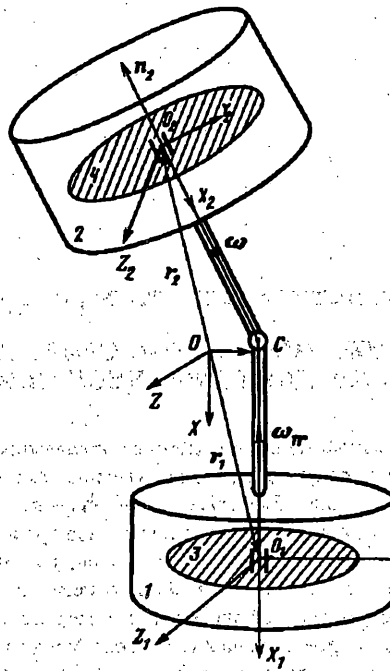
Рассматривается задача оптимального по быстродействию управления движением относительного центра масс механической системы, состоящей из двух соединенных двухступенным кардановым подвесом твердых тел, несущих маховики. Пренебрегая орбитальным движением системы, будем предполагать, что ее центр масс неподвижен в инерциальном пространстве, а управление осуществляется внутренними гироскопическими моментами, возникающими при изменении угла между осями маховиков (либо путем изменения взаимной ориентации несущих тел). Задачей оптимального управления является изменение пространственной ориентации оси одного из маховиков за минимальное время. Указанный прием, по принципу действия близкий к способам управления гироскопами, может оказаться достаточно эффективным для управления ориентацией панелей солнечных батарей, антенн, световых отражателей, солнечного паруса и др.

При построении математической модели движения механической системы, управляемой путем переориентации векторов внутренних кинетических моментов, и поиске оптимального программного управления использован подход и методика, примененные ранее при решении задач оптимального управления при помощи реактивных моментов взаимной пространственной ориентацией системы двух твердых тел, соединенных шарниром [1], и оптимального управления твердым телом путем активного изменения геометрии масс [2].

1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему (фиг. 1), состоящую из двух твердых тел 1 и 2, соединенных шарниром C , представляющим собой двухступенной кардановый подвес. С каждым из твердых тел жестко связаны невесомые оси, на которых вращаются маховики 3, 4. Будем считать, что оси маховиков совпадают с одной из главных центральных осей соответствующих несущих тел и проходят через шарнир C , а центры масс маховиков (точки O_1 и O_2) совпадают с центрами масс несущих тел.

Введем следующие системы координат: инерциальную $OXYZ$, с началом отсчета в центре масс системы — точке O ; жестко связанную с телом 1 систему $O_1X_1Y_1Z_1$ с началом в центре масс первого маховика — точке O_1 ; жестко связанную с телом 2 систему $O_2X_2Y_2Z_2$ с началом в центре масс второго маховика — точке O_2 , причем оси OY_i, OZ_i ($i=1, 2$) лежат в плоскостях, перпендикулярных осям соответствующих маховиков.

Примем следующие обозначения: ω_M — вектор абсолютной угловой скорости маховика 3; ω_1 — вектор абсолютной угловой скорости тела 1; ω_3 — вектор угловой скорости собственного вращения маховика 3 относительно системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$; ω_2 — вектор абсолютной угловой скорости маховика 4; Ω_2 — вектор угловой скорости тела 2 относительно системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$; ω_4 — вектор угловой скорости собственного вращения маховика 4 относительно системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$; r_1, r_2 — радиус-векторы центров масс маховиков 3, 4 соответственно относительно центра масс системы; s_1, s_2 — радиус-векторы, проведенные из центров масс маховиков (O_1 и O_2 соответственно) в точку C ; p — радиус-вектор центра масс маховика 4, проведенный из центра масс маховика 3; n_2 — единичный вектор, направленный в сторону, противоположную оси O_2X_2



Фиг. 1

(совпадает с вектором нормали к поверхности маховика 4); m_1, m_2 — массы тел 1 и 2 с маховиками 3 и 4 соответственно; $m = m_1 \cdot m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса системы; v_1, v_2 — векторы скорости центров масс тел 1 и 2 соответственно относительно инерциальной системы координат; K, K_1, K_2 — кинетические моменты системы, тел 1 и 2 с маховиками 3 и 4 соответственно относительно центра масс системы (точки O); I_1, I_2 — тензоры инерции маховиков в их центрах масс. Моментами инерции тел 1 и 2 будем пренебрегать.

Для вывода уравнений движения системы в отсутствие внешних моментов воспользуемся условием сохранения ее кинетического момента. Представим кинетический момент системы относительно точки O в виде

$$K = K_1 + K_2 \tag{1.1}$$

$$K_1 = I_1 \omega_1 + r_1 \times m_1 v_1, \quad K_2 = I_2 \omega_2 + r_2 \times m_2 v_2 \tag{1.2}$$

Векторы абсолютной угловой скорости маховиков 3 и 4 заменим суммами $\omega_M = \omega_1 + \omega_{1r}, \quad \omega_2 = \omega_1 + \Omega_r + \omega$ (1.3)

Из определения центра масс системы имеем соотношения для r_1 и r_2 :

$$r_1 = - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \rho, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \rho \tag{1.4}$$

причем $\rho = s_1 - s_2$.

Векторы v_1, v_2 абсолютной скорости центров масс маховиков 3 и 4 получим дифференцированием по времени радиус-векторов r_1 и r_2 :

$$v_1 = \dot{r}_1 = \dot{r}_1^* + \omega_1 \times r_1, \quad v_2 = \dot{r}_2 = \dot{r}_2^* + \omega_1 \times r_2 \tag{1.5}$$

где звездочкой обозначена локальная производная по времени в системе координат $O_1 X_1 Y_1 Z_1$.

Учитывая (1.4), выражения (1.5) можно привести к виду

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} [\Omega_r \times s_2 + \omega_1 \times (s_2 - s_1)] \quad (1.6)$$

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} [\Omega_r \times s_2 + \omega_1 \times (s_2 - s_1)]$$

Подставляя (1.3), (1.4), (1.6) в соотношения (1.2), получим

$$K_1 = I_1 (\omega_1 + \omega_{1r}) + \frac{mm_2}{m_1 + m_2} (s_2 - s_1) [\Omega_r \times s_2 + \omega_1 \times (s_2 - s_1)]$$

$$K_2 = I_2 (\omega_1 + \Omega_r + \omega) + \frac{mm_1}{m_1 + m_2} (s_2 - s_1) [\Omega_r \times s_2 + \omega_1 \times (s_2 - s_1)]$$

Тогда

$$K = I_1 (\omega_1 + \omega_{1r}) + I_2 (\omega_1 + \Omega_r + \omega) + m (s_2 - s_1) \times [\Omega_r \times s_2 + \omega_1 \times (s_2 - s_1)] \quad (1.7)$$

Ориентацию системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ относительно инерциальной системы координат будем определять с помощью кватерниона $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, где λ_i ($i = \overline{0,3}$) — параметры Родрига—Гамильтона, которые связаны первым интегралом $\sum \lambda_i^2 = 1$ ($i = \overline{0,3}$). Тогда кинематические уравнения можно представить в форме [3]:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega_i^{(i)} - \omega_i^{(i)} \circ \Lambda \quad (1.8)$$

Здесь символом \circ обозначено кватернионное умножение, а индекс (i) в скобках здесь и далее означает, что соответствующая векторная или тензорная величина задана в проекциях на оси системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$. Отметим, что в отличие от кинематических уравнений в самолетных углах или в углах Эйлера соотношение (1.8) не имеет особенностей.

Ориентацию системы $O_2X_2Y_2Z_2$ относительно системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ будем определять самолетными углами рысканья ψ_2 , тангажа θ_2 и крена φ_2 . Исходя из того, что конструкция шарнира представляет собой двухстепенной карданный подвес, имеем $\varphi_2(t) = 0$, $\dot{\varphi}_2(t) = 0$, где t — время.

При заданном законе изменения углов ориентации $\psi_2(t)$, $\theta_2(t)$ системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$ относительно системы $O_1X_1Y_1Z_1$ проекции вектора угловой скорости $\Omega_r^{(2)}$ на оси системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$ можно представить в форме

$$\Omega_{rX}^{(2)} = \psi_2 \sin \theta_2, \quad \Omega_{rY}^{(2)} = \psi_2 \cos \theta_2, \quad \Omega_{rZ}^{(2)} = \theta_2 \quad (1.9)$$

Выражение для кинетического момента системы (1.7) приведем к виду

$$K^{(0)} = B^T \{I_1^{(1)} (\omega_1^{(1)} + \omega_{1r}^{(1)}) + A^T I_2^{(2)} (A\omega_1^{(1)} + \Omega_r^{(2)} + \omega^{(2)}) + m (A^T s_2^{(2)} - s_1^{(1)}) \times [A^T (\Omega_r^{(2)} \times s_2^{(2)}) + \omega_1^{(1)} \times (A^T s_2^{(2)} - s_1^{(1)})]\} \quad (1.10)$$

где индекс (0) означает, что вектор K задан в инерциальной системе координат; $B = \{b_{ij}\}$ — матрица направляющих косинусов осей системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ в инерциальной системе координат $OXYZ$, элементы которой определяются зависимостями [3]:

$$b_{11} = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2, \quad b_{12} = 2(-\lambda_0\lambda_3 + \lambda_2\lambda_1), \quad b_{13} = 2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1)$$

$$b_{21} = 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_4\lambda_2), \quad b_{22} = \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_1^2, \quad b_{23} = 2(-\lambda_0\lambda_1 + \lambda_3\lambda_2)$$

$$b_{31} = 2(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3), \quad b_{32} = 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \quad b_{33} = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2$$

где $A = \{a_{ij}\}$ — матрица направляющих косинусов системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$ в системе координат $O_1X_1Y_1Z_1$, элементы которой подсчитываются по формулам $a_{11} = \cos \psi_2 \cos \theta_2$, $a_{12} = -\cos \psi_2 \sin \theta_2$, $a_{13} = \sin \psi_2$, $a_{21} = \sin \theta_2$, $a_{22} = \cos \theta_2$, $a_{23} = 0$, $a_{31} = -\sin \psi_2 \cos \theta_2$, $a_{32} = \sin \psi_2 \sin \theta_2$, $a_{33} = \cos \psi_2$. Компоненты вектора $\omega_1^{(1)}$ определяются из условия $K = K^{(0)} = \text{const}$. Для вычисления проекций вектора ω_1 на оси системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ выпишем следующую систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} & B^T (I_1^{(1)} + A^T I_2^{(2)} A) \omega_1^{(1)} + mB^T (A^T s_2^{(2)} - s_1^{(1)}) [\omega_1^{(1)} \times (A^T s_2^{(2)} - s_1^{(1)})] = \\ & = K^{(0)} - B^T I_1^{(1)} \omega_{1r}^{(1)} - B^T A^T I_2^{(2)} (\Omega_r^{(2)} + \omega^{(2)}) - \\ & - mB^T [(A^T s_2^{(2)} - s_1^{(1)}) \times A^T (\Omega_r^{(2)} \times s_2^{(2)})] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Перейдем в (1.11) к безразмерным уравнениям, введя новые безразмерные переменные и постоянные: $\tau = \omega t$, $\Omega_i = \omega_1 \cdot \omega^{-1}$, $\Omega_2 = \Omega_r \cdot \omega^{-1}$, $\Omega_3 = \omega_{1r} \cdot \omega^{-1}$, $\Theta_i = I m^{-1} (s_1^2 + s_2^2)^{-1}$ ($i = 1, 2$), $\omega_0 = \omega \cdot \omega^{-1}$, $l_i = s_i (s_1^2 + s_2^2)^{-1/2}$ ($i = 1, 2$), $G = K \cdot m^{-1} (s_1^2 + s_2^2)^{-1} \omega^{-1}$.

Тогда (1.9) и (1.11) можно переписать в виде

$$\Omega_{2X}^{(2)} = \psi_2' \sin \theta_2, \quad \Omega_{2Y}^{(2)} = \psi_2' \cos \theta_2, \quad \Omega_{2Z}^{(2)} = \theta_2' \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} & B^T (\Theta_1^{(1)} + A^T \Theta_2^{(2)} A) \Omega_1^{(1)} + B^T (A^T l_2^{(2)} - l_1^{(1)}) \times [\Omega_1^{(1)} \times (A^T l_2^{(2)} - l_1^{(1)})] = \\ & = G^{(0)} - B^T \Theta_1^{(1)} \Omega_3^{(1)} - B^T A^T (\Omega_2^{(2)} + \omega_0^{(2)}) - B^T [(A^T l_2^{(2)} - l_1^{(1)}) \times A^T (\Omega_2^{(2)} \times l_2^{(2)})] \end{aligned}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по τ .

Целью управления является изменение ориентации оси маховика 4 в инерциальном пространстве. Управление осуществляется внутренними гироскопическими моментами за счет изменения взаимной ориентации осей маховиков. В качестве компонент вектора управления u_1, u_2 примем производные углов ψ_2, θ_2 : $u_1 = \psi_2'$, $u_2 = \theta_2'$.

Сформулируем задачу оптимального управления: построить оптимальное программное управление $\{u_1, u_2\}$, которое переводит систему из состояния

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \psi_2(0) = \psi_{20}, \quad \theta_2(0) = \theta_{20} \quad (1.13)$$

в состояние

$$n_2^{(0)}(\Lambda, \psi_2, \theta_2, T) = n_{2T}^{(0)} \quad (1.14)$$

$$\psi_2(T) = \psi_{2T}, \quad \theta_2(T) = \theta_{2T} \quad (1.15)$$

за минимальное время $T \rightarrow \min$ при наличии ограничений на управляющие функции

$$|u_i(\tau)| \leq U_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.16)$$

Краевые условия (1.14) можно записать следующим образом

$$B^T(T) A^T(T) (-1; 0; 0)^T = (n_{2XT}^{(0)}, n_{2YT}^{(0)}, n_{2ZT}^{(0)}), \quad (n_{2XT}^{(0)}, n_{2YT}^{(0)}, n_{2ZT}^{(0)}) = n_{2T}^{(0)}$$

Компоненты вектора n_2 связаны первым интегралом $|n_2| = 1$, поэтому из (1.14) имеем два независимых терминальных условия

$$n_{2X}^{(0)}(T) = n_{2XT}^{(0)}, \quad n_{2Z}^{(0)}(T) = n_{2ZT}^{(0)} \quad (1.17)$$

2. Методика решения задачи оптимального управления. Для решения

сформулированной задачи оптимального управления используется модификация метода проекции градиента с коррекцией невязки в ограничениях [2].

В уравнениях (1.12) произведем замену независимой переменной $\tau = \gamma v$, где γ — управляющий параметр, v — новая переменная, изменяющаяся на фиксированном отрезке $[0, T_0]$. С учетом произведенной замены систему (1.12) с краевыми условиями (1.17), (1.15) представим в виде

$$F(x) dx/dv = \gamma f(x, u, \gamma v) \quad (2.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad h[x(T)] = h_T \quad (2.2)$$

Здесь $x = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \psi_2, \theta_2\}^T$ — вектор состояния размерностью $n = 6$, $u = \{u_1, u_2\}$ — вектор управления размерностью $k = 2$, $T = \gamma T_0$ — время перехода системы в заданное состояние.

Пусть $u_0(v)$ — некоторое допустимое управление, переводящее систему из состояния $x_{(0)}$ на терминальное многообразие h_T при изменении v от 0 до T_0 при $\gamma = \gamma_0$. Для построения улучшающих вариаций управления $\delta u(v)$ и параметра $\delta \gamma$ линеаризуем (2.1), (2.2) в окрестности состояния $x_{(0)}(v)$, $u_0(v)$, γ_0 :

$$d\delta x/dv = \gamma_0 [(F^{-1})_x f + F^{-1} f_x] \delta x + \gamma_0 F^{-1} f_u \delta u + \gamma_0 F^{-1} f_\gamma \delta \gamma + F^{-1} f \delta \gamma$$

$$\delta x(0) = 0, \quad [\partial h / \partial x(T)] \delta x(T) = 0$$

где $(F^{-1})_x = \partial F^{-1} / \partial x$ — трехиндексная матрица размером $6 \times 6 \times 6$, f_u , f_γ , f_x , $\partial h / \partial x(T)$ — матрицы Якоби соответствующих размеров.

Для исключения вариаций переменных состояния из линеаризованных терминальных условий применялась формула Коши:

$$\delta x(v) = \int_0^v D(v, q) \delta u(q) dq + H(v) \delta \gamma$$

$$D(v, q) = \gamma \Phi(v, q) F^{-1} f_u, \quad H(v) = \gamma \int_0^v \Phi(v, q) F^{-1} (f_\gamma + f / \gamma) dq$$

Здесь $\Phi(v, q) = [\Psi(q) \cdot \Psi^{-1}(v)]^T$ — матрица Коши, $\Psi(v)$ — фундаментальная матрица системы уравнений, сопряженной к системе уравнений в вариациях.

Контроль ограничений неравенств (1.13) на отрезке от 0 до T_0 производился с некоторым шагом Δv .

Вследствие использования линеаризации функции управления, построенные на каждом этапе численного поиска, приводят к нарушению краевых условий и появлению невязки $R = \{R_{nX}, R_{nZ}, R_{\psi_2}, R_{\theta_2}\}$ в терминальных условиях (1.17), (1.15), которая компенсируется путем добавления поправок к вариациям управлений и параметра γ :

$$\delta u_R(v) = -(\partial h / \partial x(T)) \cdot D(T_0, v) \Gamma^{-1} R$$

$$\delta \gamma_R = -\frac{\partial h}{\partial x(T)} \int_0^{T_0} \Phi(T, q) F^{-1}(q) f(q) dq \Gamma^{-1} R, \quad \Gamma =$$

$$= \int_0^{T_0} D(T_0, q) \cdot D^T(T_0, q) dq + H(T_0) H^T(T_0)$$

Здесь Γ — матрица Грама линеаризованных условий. Принимая $u_1(v) = u_0(v) + \delta u(v) + \delta u_R(v)$ и $\gamma_1 = \gamma_0 + \delta \gamma + \delta \gamma_R$ в качестве порождающего решения строим следующее приближение и т. д. При выполнении с заданной точностью необходимых условий оптимальности в форме Куна—Таккера [4, 5] оптимизационный поиск прекращается.

3. Построение начального приближения. Для решения задачи оптимального управления используется прямой метод, при котором оптимизационный поиск осуществляется путем построения улучшающих вариаций управляющих функций и масштабного параметра, начиная с некоторого допустимого управления. Для построения такого управления решена задача о кинетическом программном управлении и численно найдены законы изменения управляющих функций $u_1(\tau)$, $u_2(\tau)$, обеспечивающие заданную ориентацию орта n_2 оси маховика 4 в инерциальном пространстве в процессе движения как функцию времени t : $n_2^{(0)} = f_2(t)$, где $f_2(t)$ — заданная вектор-функция, причем $|f_2(t)| = 1$.

Эта задача сводится к совместному интегрированию кинематических уравнений (1.8) и уравнений

$$\psi_2 = \Omega_2^{(2)} / \cos \theta_2, \quad \theta_2 = \Omega_2^{(2)} \quad (3.1)$$

Компоненты векторов $\omega_1^{(1)}$ и $\Omega_r^{(2)}$ на каждом шаге интегрирования определяются из системы (1.11), а два других получены на основании заданного закона движения орта $n_2^{(0)} = f_2(t)$. Для построения этих двух уравнений введем базис e_1, e_2, e_3 таким образом, чтобы орт e_1 совпадал с ортом n_2 , орт e_2 был направлен вдоль вектора скорости \dot{n}_2 (учитываем, что $n_2 \cdot \dot{n}_2 = 0$), то есть $e_2 = \dot{f}_2(t) / |\dot{f}_2(t)|$, а орт e_3 был направлен по мгновенной оси вращения, то есть $e_3 = (f_2 \times \dot{f}_2) / |f_2 \times \dot{f}_2|$. Отметим, что вектор угловой скорости орта оси маховика 4 равен $\omega_n = \dot{f}_2 \times f_2$ и направлен вдоль мгновенной оси вращения. Проектируя вектор угловой скорости $\omega_1 + \Omega_r$ системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$ относительно инерциальной на оси, задаваемые ортами e_2 и e_3 , получим после преобразований следующие уравнения

$$\dot{f}_2(\omega_1 + \Omega_r) = 0, \quad (f_2 \times \dot{f}_2) \cdot (\omega_1 + \Omega_r) = |\dot{f}_2|^2 \quad (3.2)$$

Задавая ω_1 в системе координат $O_1X_1Y_1Z_1$, а Ω_r — в $O_2X_2Y_2Z_2$, приведем (3.2) к виду

$$\dot{f}_2 \cdot (B^T \omega_1^{(1)} + B^T A^T \Omega_r^{(2)}) = 0, \quad (f_2 \times \dot{f}_2) \cdot (B^T \omega_1^{(1)} + B^T A^T \Omega_r^{(2)}) = |\dot{f}_2|^2 \quad (3.3)$$

Лишнее неизвестное в системе уравнений (1.11), (3.3) исключим, используя вытекающее из условий $\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$ равенство $\Omega_2^{(2)} - \Omega_2^{(2)} \operatorname{tg} \theta_2 = 0$. В результате интегрирования системы уравнений (1.8), (1.11), (3.1), (3.3) численно построим начальное приближение $w(t) = w(\tau/\omega) = u(\tau)$ для задачи оптимизации.

4. Анализ оптимальных программ управления. Рассмотрим механическую систему, состоящую из одинаковых несущих тел 1 и 2 и одинаковых маховиков 3 и 4. Маховики вращаются с постоянной угловой скоростью вокруг осей, связанных с телами 1 и 2. Расстояния от шарнира C до центров масс маховиков-точек O_1 и O_2 равны. Рассмотрим задачу об оптимальном по быстродействию программном изменении ориентации оси маховика 4 при следующих параметрах системы: $\Theta_i^{(0)} = \operatorname{diag}(\Theta_{xx}, \Theta_{yy}, \Theta_{zz})$, $\Theta_{xx} = 2\Theta_{yy} = 2\Theta_{zz} = 1800$,

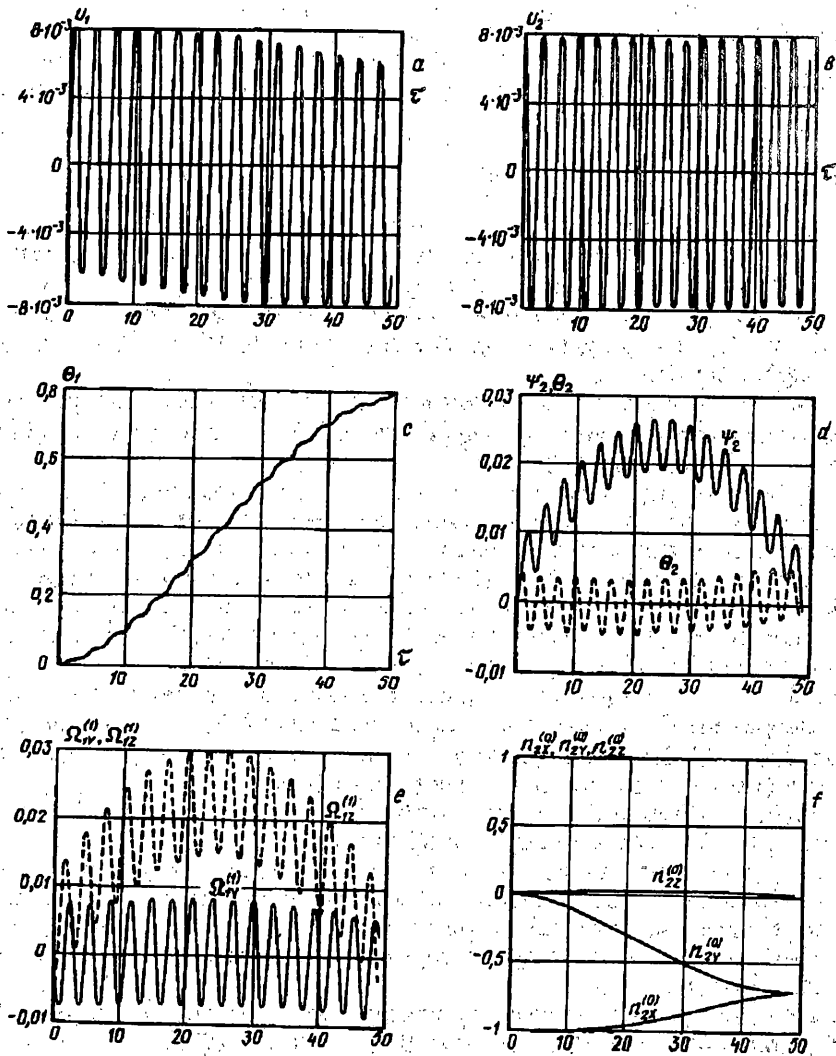
$$I_i^{(0)} = ((-1)^i \cdot \sqrt{2}/2; 0; 0) \quad (i = 1, 2), \quad \omega_0 = (1; 0; 0), \quad \Omega_3 = (-1; 0; 0), \quad G = 0.$$

Будем считать, что в начальный момент времени направления осей инерциальной системы координат и систем $O_1X_1Y_1Z_1, O_2X_2Y_2Z_2$ совпадают, тогда параметры Родрига—Гамильтона $\lambda_i(0)$ ($i = \overline{0,3}$) и самолетные углы ψ_2, θ_2 равны

$$\lambda_0(0) = 1, \quad \lambda_1(0) = \lambda_2(0) = \lambda_3(0) = 0, \quad \psi_2(0) = \theta_2(0) = 0 \quad (4.1)$$

Необходимо за минимальное время $T = T_{\min}$ повернуть и стабилизировать систему в требуемом конечном состоянии, определяемом терминальными условиями вида (1.15), (1.17) при наличии ограничений на управляющие функции

$$|u_i(\tau)| \leq 8 \cdot 10^{-3} \quad (4.2)$$



Фиг. 2

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: нормаль $n_2^{(0)}$ к маховику 4 требуется повернуть на угол β в плоскости OXY и стабилизировать механическую систему в этом состоянии. Ограничения на положение нормали в процессе переориентации не накладываются. В первом случае $\beta = \pi/4$, во втором $\beta = \pi/2$, в третьем $\beta = \pi$.

Для этой задачи оптимального управления терминальные условия (1.15) приобретают форму

$$\psi_2(T) = 0, \quad \theta_2(T) = 0 \quad (4.3)$$

а условия (1.17) сводятся к виду

$$n_{2X}^{(0)}(T) = -\cos \beta, \quad n_{2Z}^{(0)}(T) = 0 \quad (4.4)$$

в первом и втором случае. Для третьего случая, исходя из (1.14) выберем следующие терминальные условия:

$$n_{2Y}^{(0)}(T) = 0, \quad n_{2Z}^{(0)}(T) = 0 \quad (4.5)$$

В качестве начального приближения для этой оптимизационной задачи выбран закон управления $u(\tau) = \{u_1(\tau), u_2(\tau)\}$, при котором орт n_2 оси маховика 4 совершает поворот в плоскости OXY с постоянной угловой скоростью $\omega_n = (0, 0, \alpha)$ на угол β :

$$n_2^{(0)}(\tau) = (-\cos(\alpha\tau), -\sin(\alpha\tau), 0) \quad (4.6)$$

Этот закон обеспечивает переход механической системы из начального состояния (4.1) за время $T = \beta/\alpha$ а конечное состояние (4.4) или (4.5) (для случая $\beta = \pi$). Если при этом терминальные условия (4.4) не выполнены, то решение задачи начинается с минимизации вспомогательного штрафного функционала вида $V(\Lambda, \psi_2, \theta_2, u) = g_1(\psi_2(T) - \psi_{2T})^2 + g_2(\theta_2(T) - \theta_{2T})^2 \rightarrow \min$, где g_1, g_2 — весовые коэффициенты.

Значение α для построения начального приближения выбиралось так, чтобы управляющие функции, обеспечивающие закон ориентации орта $n_2^{(0)}$ (4.6), удовлетворяли ограничениям (4.2).

В результате проведенных численных исследований были найдены пространственные локально-оптимальные программы управления для приведенной выше задачи оптимального управления при $\beta = \pi/4$ (фиг. 2), $\beta = \pi/2$, $\beta = \pi$. Оптимальные управления u_1, u_2 являются функциями близкими к гармоническим (фиг. 2, а, в), частота которых близка к значению $2\omega_0$. На фиг. 2, с приведен график изменения угла ориентации θ_1 системы $O_1X_1Y_1Z_1$ в инерциальном пространстве, при этом максимальные значения углов ψ_1 и ϕ_1 не превышают 10^3 . На фиг. 2, г, д приведены графики изменения углов ориентации ψ_2, θ_2 системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$ относительно системы $O_1X_1Y_1Z_1$ и графики изменения функций $\Omega_1^{(1)}, \Omega_2^{(1)}$. Проекция вектора $\Omega_1^{(1)}$ на ось OX_1 имеет порядок 10^{-4} . Орт n_2 оси маховика 4 незначительно выходит из плоскости OXY (фиг. 2, д), при этом максимальный угол между плоскостью OXY и вектором n_2 для оптимальной программы при $\beta = \pi/4$ составляет 0,02 радиана.

Оптимальные программы управления позволяют осуществить маневр переориентации на 40—60% быстрее по сравнению с программным управлением, принятым в качестве начального приближения. Способ построения начального приближения описан выше, а время переориентации выбиралось таким образом, чтобы $\max |u_i(\tau)| \leq U_i$.

Целевой функционал для задачи оптимального управления при $\beta = \pi/4$ равен $T_{\min} = 48$, при $\beta = \pi/2$ — $T_{\min} = 96$, при $\beta = \pi$ — $T_{\min} = 192$.

Анализ результатов расчета показывает, что при выбранном диапазоне значений параметров системы и ограничений время быстрогодействия линейно зависит от угла переориентации. При этом управляющие функции достигают предельно допустимых значений лишь в некоторых точках интервала $(0, T_{\min})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуляев В. И., Кошкин В. Л., Рыраховский Л. А. Оптимальное управление движением в центральном силовом поле системы двух тел, соединенных шарниром//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 30—37.
2. Гуляев В. И., Кошкин В. Л., Савилова И. В. Оптимальный пространственный разворот космического аппарата с переменной геометрией масс//Космические исследования. 1991. Т. 29. № 2. С. 221—229.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
4. Численные методы условной оптимизации//Под ред. Ф. Гылла, У. Мюрея. М.: Мир, 1977. 290 с.
5. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 534 с.

Киев

Поступила в редакцию
10.XII.1991