МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1994

УДК 531.3

© 1994 г. Д. Ю. ЛАДИКОВ-РОЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ ГРУППОВЫХ МЕТОДОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В статье [1] была исследована задача о движении материальной точки под действием следящей силы. Для решения были использованы теоретико-групповые методы. В данной работе решена задача о движении материальной точки по вращающейся поверхности с вязким трением. А также расширен класс сил, для которых может быть построено точное решение этими методами. Для иллюстрации решены задачи: 1) о движении материальной точки под действием силы, направленной под постоянным углом к радиус-вектору; 2) о движении заряженной частицы в постоянном магнитном поле с индукцией, зависящей от радиус-вектора по степенному закону.

1. Движение частицы по вращающейся плоскости, с которой она взаимодействует по закону вязкого трения. Предположим, что горизонтальная плоскость вращается вокруг неподвижной вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. По плоскости скользит материальная точка, взаимодействующая с ней по закону вязкого трения. На точку со стороны плоскости действует сила, пропорциональная ее скорости (коэффициент пропорциональности C) и противоположная ей по знаку.

Уравнения движения в полярных координатах имеют вид

$$\dot{r} = v, \quad \dot{v} = \sigma^2 r^{-3} - Cv, \quad \dot{\sigma} = -C(\sigma - r^2\omega) \tag{1.1}$$

где обозначено: r — радиус-вектор, v — радиальная скорость, $\sigma = \dot{\varphi} r^2$ — секториальная скорость, φ — угол.

Подробный вывод уравнений движения материальной точки по вращающейся плоскости с сухим трением аналогичных данным, содержится в статье [1].

Группой симметрий данной системы дифференциальных уравнений является группа растяжений:

$$r' = \alpha r, \quad v' = \beta v, \quad \sigma' = \gamma\sigma \tag{1.2}$$

Система (1.1) будет симметрична относительно преобразования (1.2), если выполнены условия $\beta = \alpha$, $\gamma = \alpha^2$.

Проведя соответствующие вычисления, описанные в [1] и [3], находим вид замены переменных, понижающей порядок системы $r = e^x$, $v = ye^x$, $\sigma = ze^{2x}$.

В новых переменных система (1.1) запишется следующим образом:

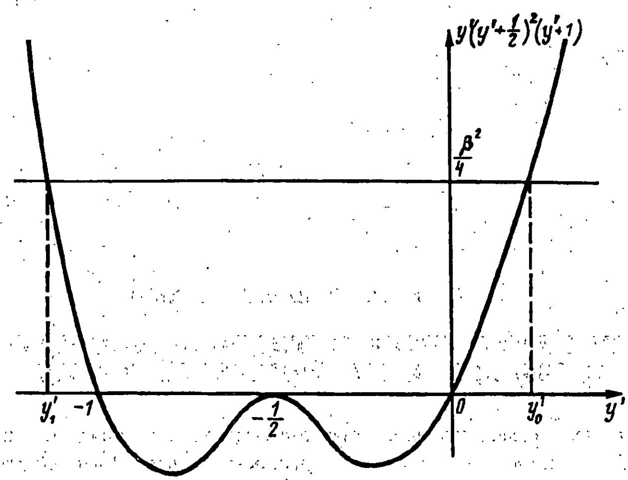
$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z^2 - Cy - y^2, \quad \dot{z} = -2zy - Cz + C\omega$$

Для нахождения особых точек получаем следующие уравнения:

$$z = C\omega/(C + 2y), \quad C^2\omega^2/4 = (Cy + y^2)(C/2 + y)^2$$

Разделив правую и левую части второго уравнения на C^4 и обозначив $y' = y/C$; $\omega^2/C^2 = \beta^2$, получим уравнение для нахождения y':

$$y'(y' + 1/2)^2(y' + 1) = \beta^2/4 \tag{1.3}$$



Фиг. 1

Решить это уравнение можно графически (фиг. 1). Из графика видно, что уравнение (1.3) имеет два действительных корня y_0' и y_1', причем $y_1' < -1$ и $y_0' > 0$. Значит система (1.1) имеет две особые точки:

$$y_1 = y_0'C, \quad z_1 = \omega/1 + 2y_0' \text{ и } y_2 = y_1'C, \quad z_2 = \omega/1 + 2y_1'$$

Характеристическое уравнение для особой точки y_i, z_i $(i = 1, 2)$ имеет вид $((C + 2y_i) + \lambda)^2 - (2z_i)^2 = 0$. Откуда находим $\lambda_{1,2} = -(C + 2y_i) \pm 2z_i i$.

Значит, особым точкам соответствуют устойчивый и неустойчивый фокус на фазовом портрете системы. Причем устойчивый фокус соответствует точке y_1, z_1. Следовательно, асимптотически устойчивое решение данной системы имеет вид

$$r = r_0 \exp(y_0'Ct), \quad v = r_0 y_0'C \exp(y_0'Ct)$$

$$\sigma = r_0^2 \frac{\omega}{1 + 2y_0'} \exp(2y_0'Ct)$$

Траектории представляют собой логарифмические спирали

$$r = r_0 \exp\left[\frac{y_0'C(1 + 2y_0')}{\omega}(\varphi - \varphi_0)\right]$$

2. Общий вид сил, для которых система уравнений движения материальной точки допускает группы растяжения и сдвига. Движение материальной точки под действием произвольной силы может быть описано в полярной системе координат следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{r} = v, \quad \dot{v} = \sigma^2 r^{-3} + F_r, \quad \dot{\sigma} = F_\varphi r, \quad \dot{t} = 1 \qquad (2.1)$$

где r — радиус-вектор, v — радиальная скорость, σ — секториальная скорость, F_φ, F_r – проекции силы, которые в общем случае могут зависеть от r, v, σ, t.

Исследуем, при каких силах, действующих на материальную точку, система (2.1) будет симметрична относительно какой-либо из простейших групп. Вид данной системы позволяет искать группу симметрии в виде группы подобий или растяжений по r, v, σ и сдвига по t. Система (2.1) будет симметрична относительно группы с инфинитезимальным оператором U (см. [3]), если выполнено условие

$$[A, U] = \lambda A, \quad \lambda = \text{const} \qquad (2.2)$$

где A — оператор системы (2.1). В случае группы растяжений

$$U = \alpha_1 r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha_2 v \frac{\partial}{\partial v} + \alpha_3 \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} + \alpha_4 t \frac{\partial}{\partial t}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — константы.

Вычислив коммутатор $[A, U]$, найдем, что для выполнения условия (2.2) сила должна удовлетворять следующему уравнению:

$$UF = \alpha F, \quad \alpha = \mathrm{const} \tag{2.3}$$

Аналогичное утверждение справедливо и в том случае, когда по времени осуществляется не растяжение, а сдвиг. Записав уравнение (2.3) для группы растяжений, приходим к линейному уравнению в частных производных

$$\alpha_1 r \frac{\partial F}{\partial r} + \alpha_2 v \frac{\partial F}{\partial v} + \alpha_3 \sigma \frac{\partial F}{\partial \sigma} + \alpha_4 t \frac{\partial F}{\partial t} - \alpha F = 0$$

Это уравнение эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dr/\alpha_1 r = dv/\alpha_2 v = d\sigma/\alpha_3 \sigma = dt/\alpha_4 t = -dF/\alpha F$$

Решение его в неявном виде $\Phi(v^{1/\alpha_2} r^{-1/\alpha_1}, \sigma^{1/\alpha_3} r^{-1/\alpha_1}, t^{1/\alpha_4} r^{-1/\alpha_1}, F^{1/\alpha} r^{-1/\alpha_1}) = 0$. Здесь Φ — произвольная функция. Будем считать, что Φ удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции, тогда можно выразить F:

$$F = r^{-\alpha/\alpha_1} \Psi(v^{1/\alpha_2} r^{-1/\alpha_1}, \sigma^{1/\alpha_3} r^{-1/\alpha_1}, t^{1/\alpha_4} r^{-1/\alpha_1}) \tag{2.4}$$

Здесь Ψ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Частным случаем функции вида (2.4) является

$$F = F_0 r^{k_1} \sigma^{k_2} t^{k_3} v^{k_4} \tag{2.5}$$

где k_1, k_2, k_3, k_4, F_0 — некоторые константы.

Если по времени осуществляется не растяжение, а сдвиг, ифинитезимальный оператор будет иметь вид

$$U = \alpha_1 r \frac{\partial}{\partial r} + \alpha_2 v \frac{\partial}{\partial v} + \alpha_3 \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} + \alpha_4 \frac{\partial}{\partial t}$$

Проведя аналогичные рассуждения в этом случае, получим функцию F вида

$$F = r^{-\alpha/\alpha_1} H(v^{1/\alpha_2} r^{-1/\alpha_1}, \sigma^{1/\alpha_3} r^{-1/\alpha_1}, e^{t/\alpha_4} r^{-1/\alpha_1}) \tag{2.6}$$

Частным случаем функции (2.6) является ($k_1, k_2, k_3, \omega, F_0$ — константы):

$$F = F_0 r^{k_1} \sigma^{k_2} v^{k_3} e^{\omega t} \tag{2.7}$$

3. Движение материальной точки под действием следящей силы. В этом случае система (2.1) упрощается $F_r = 0$.

Если сила F_φ (фиг. 2) описывается функцией вида (2.4), то порядок системы (2.1) может быть понижен заменой переменных $r = e^{\alpha_1 x}$, $v = y^{\alpha_2} e^{\alpha_2 x}$, $\sigma = z^{\alpha_3} e^{\alpha_3 x}$, $t = \theta^{\alpha_4} e^{\alpha_4 x}$. При этом нужно требовать выполнения условия $\alpha_2 - \alpha_1 = 2\alpha_3 - 3\alpha_1 - \alpha_2 = -\alpha_4 = \alpha - \alpha_3$. Если же сила F_α имеет вид (2.6), то порядок системы (2.1) может быть понижен заменой $r = e^{\alpha_1 x}$, $v = y^{\alpha_2} e^{\alpha_2 x}$, $\sigma = z^{\alpha_3} e^{\alpha_3 x}$, $t = \alpha_4 (x + \ln \theta)$. При этом необходимо, чтобы $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha - \alpha_3 = 2\alpha_3 - 3\alpha_1 - \alpha_2 = 1$.

Рассмотрим случаи, когда силы имеют вид (2.5) и (2.7) более подробно. При этом можно всегда подобрать замену переменных понижающую порядок системы (найти группу симметрии системы (2.1)). Действительно:

а). Пусть сила $F_\varphi(r, v, \sigma, t)$ описывается выражением (2.5). Тогда группой симметрии системы (2.1) является группа растяжений

$$(r, v, \sigma, t) \to (r', v', \sigma', t') : r' = \alpha r, \;\; v' = \beta v, \;\; \sigma' = \gamma\sigma, \;\; t' = \delta t$$

Система будет симметрична относительно этого преобразования, если выполнены условия

$$\beta\alpha^{-1} = \gamma^2\alpha^{-3}\beta^{-1} = \alpha^{k_1+1}\gamma^{k_2-1}\delta^{k_3}\beta^{k_4} = \delta^{-1} \tag{3.1}$$

Выбирая α произвольным, найдем

$$\beta = \alpha^{n_1}, \quad \gamma = \alpha^{n_2}, \quad \delta = \alpha^{n_3} \tag{3.2}$$

$$n_1 = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + 1}{k_3 - k_2 - k_4 + 2}, \quad n_2 = \frac{2k_3 + k_1 - k_4 + 3}{k_3 - k_2 - k_4 + 2}, \quad n_3 = \frac{1 - k_1 - 2k_2 - k_4}{k_3 - k_2 - k_4 + 2}$$

Проведя соответствующие вычисления, описанные в [1] и [3], находим вид замены, понижающей порядок системы (2.1):

$$r = e^x, \quad v = ye^{n_1 x}, \quad \sigma = ze^{n_2 x}, \quad t = \theta e^{n_3 x} \tag{3.3}$$

После замены переменных приходим к новому виду исходной системы уравнений

$$\dot{x} = ye^{(n_1-1)x}, \quad \dot{y} = (z^2 - n_1 y^2)\, e^{(n_1-1)x} \tag{3.4}$$

$$\dot{z} = (F_0 z^{k_2}\theta^{k_3}y^{k_4} - n_2 zy)\, e^{(n_1-1)x}, \quad \dot{\theta} = (1 - n_3\theta y)\, e^{(n_1-1)x}$$

Если $n_1 \neq 1$, то для понижения порядка новой системы достаточно перейти к независимой переменной x:

$$dy/dx = z^2 - n_1 y^2/y \tag{3.5}$$

$$dz/dx = F_0 z^{k_2}\theta^{k_3}y^{k_4} - n_2 zy/y, \quad d\theta/dx = 1 - n_3\theta y/y$$

В случае, если выполнено условие

$$k_4 + k_2 - k_3 = 2 \tag{3.6}$$

группой симметрии системы (3.5) также является группа растяжений

$$(y, z, \theta) \to (y', z', \theta') : y' = \alpha y, \quad z' = \alpha z, \quad \theta' = \theta/\alpha$$

Произведем замену переменных $(y, z, \theta) \to (\xi, \eta, \zeta) : y = e^\xi;\; z = \eta e^\xi;\; \theta = \zeta e^{-\xi}$. После замены система примет вид

$$\dot{\xi} = \eta^2 - n_1, \quad \dot{\eta} = F_0\eta^{k_2}\zeta^{k_3} - \eta^3 - \eta$$

$$\dot{\zeta} = 1 + \zeta\eta^2 - (n_1 + n_3)\,\zeta \tag{3.7}$$

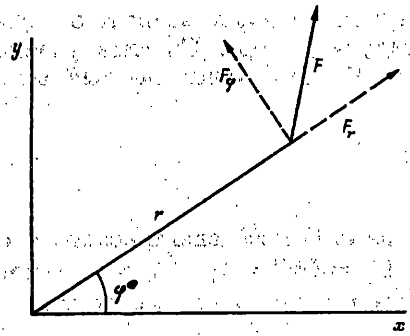
Здесь использовано равенство $n_1 - n_2 = 1$, которое можно легко получить из (3.2). Как видно, система разделилась и для ее решения можно рассматривать только последние два уравнения в (3.7).

Дальнейшее понижение порядка при помощи группы растяжений уже невозможно.

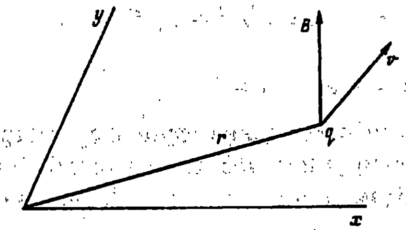
б). Теперь рассмотрим систему (2.1) для силы $F_\alpha(r, v, \sigma, t)$ вида (2.7). Группой симметрий в этом случае является группа растяжений по r, v, σ и сдвига по t:

$$(r, v, \sigma, t) \to (r', v', \sigma', t') : r' = \alpha r, \quad v' = \beta v, \quad \sigma' = \gamma\sigma, \quad t' = t + \tau \tag{3.8}$$

Обозначим $\delta = e^{\omega\tau}$. Система (2.1) будет симметрична относительно группы



Фиг. 2



Фиг. 3

(3.8), если выполнены условия $\alpha^{-1}\beta = \gamma^2\alpha^{-3}\beta^{-1} = \alpha^{k_1}\beta^{k_3}\gamma^{k_2-1}\delta = 1$. Выбирая α произвольным, находим

$$\beta = \alpha, \quad \gamma = \alpha^2, \quad \delta = \alpha^{1-k_1-2k_2-k_3}$$

В этом случае, необходимая задача координат имеет вид

$$r = e^x, \quad v = ye^x, \quad \sigma = ze^{2x}, \quad t = m\,(x + \ln\theta)/\omega \tag{3.9}$$

$$m = 1 - k_1 - 2k_2 - k_3 \tag{3.10}$$

После замены (3.9) система примет вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z^2 - y^2 \tag{3.11}$$

$$\dot{z} = F_0\theta^m 2^{k_2} y^{k_3} - 2zy, \quad \dot{\theta} = (\omega/m - y)\,\theta$$

Система (3.11) разделилась. Для ее решения достаточно рассмотреть последние три уравнения. Приравнивая нулю правые части в (3.11), находим три особые точки:

$$y_1 = \omega/m, \quad z_1 = \omega/m, \quad \theta_1 = \left[\frac{2}{F_0}(m/\omega)^{k_2+k_3-2}\right]^{1/m}$$

$$y_2 = \omega/m, \quad z_2 = -\omega/m, \quad \theta_2 = \left[\frac{2}{F_0}(-1)^{k_2-1}(m/\omega)^{k_2+k_3-2}\right]^{1/m}$$

$$y_3 = 0, \quad z_3 = 0, \quad \theta_3 = 0 \tag{3.12}$$

В силу замены (3.10), необходимо выполнение условия $\theta_i > 0$. Для третьей точки это условие не выполняется, а $\theta_2 > 0$ лишь при нечетном k_2.

Проведя исследование на устойчивость системы (3.11) в окрестности особых точек (3.12), придем к выводу, что устойчивые движения материальной точки являются раскручивающимися логарифмическими спиралями вида

$$r = \frac{1}{\theta_1} e^{\varphi-\varphi_0}\left(\varphi = \varphi_0 + \frac{\omega}{mt}\right) \quad \text{и} \quad r = \frac{1}{\theta_2} e^{\varphi_0-\varphi}\left(\varphi = \varphi_0 - \frac{\omega}{mt}\right)$$

4. Случай с силой не перпендикулярной радиусу-вектору. Во многих задачах, например, при описании движения тела по вращающейся шероховатой поверхности, существует составляющая силы, направленная вдоль радиуса-вектора ($F_r \neq 0$ в системе (2.1)). Исследования такой задачи можно провести описанным выше методом. Но при этом к системе уравнений для нахождения группы симметрии вида (3.1) добавилось еще одно уравнение, обусловленное наличием в системе силы F_r.

Рассмотрим такую задачу, когда сила экспоненциально зависит от времени и направлена под постоянным углом к радиусу-вектору. Система уравнений, описывающая такое движение, имеет вид (F_1, F_2 – некоторые постоянные):

$$\dot{r} = v, \quad \dot{v} = \sigma^2 r^{-3} + F_1 e^{\omega t} \tag{4.1}$$

$$\dot{\sigma} = F_2 e^{\omega t} r, \quad t = 1$$

Для нахождения группы симметрий системы (4.1) необходимо решить систему уравнений (см. п. 3, случай *в*)): $\beta\alpha^{-1} = \gamma^2\alpha^{-3}$, $\beta^{-1} = \delta\beta^{-1} = \delta\gamma^{-1}$, $\alpha = 1$, из которой находим $\beta = \delta = \alpha$, $\gamma = \alpha^2$. Замена координат в этом случае имеет вид

$$r = e^x, \quad v = ye^x, \quad \sigma = ze^{2x} t = (x + \ln\theta)/\omega \tag{4.2}$$

В новых переменных система запишется следующим образом:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z^2 - y^2 + F_1\theta \tag{4.3}$$

$$\dot{z} = F_2\theta - 2zy, \quad \dot{\theta} = (\omega - y)\,\theta$$

Для ее решения достаточно рассмотреть три последние уравнения. Система имеет две особые точки:

$$y_1 = \omega, \quad z_1 = -\frac{F_1}{F_2}\omega + \omega\left(\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 + 1\right)^{1/2},$$

$$\theta_1 = \frac{2\omega^2}{F_2}\left(-\frac{F_1}{F_2} + \left(\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 + 1\right)^{1/2}\right) \tag{4.4}$$

$$y_2 = \omega, \quad z_2 = -\frac{F_1}{F_2}\omega - \omega\left(\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 + 1\right)^{1/2}, \quad \theta_2 = -\frac{2\omega^2}{F_2}\left(\frac{F_1}{F_2} + \left(\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 + 1\right)^{1/2}\right)$$

Так как $\theta_i > 0$ в силу замены (4.3), то вторую точку мы можем не рассматривать ($\theta_2 < 0$).

Исследуем на устойчивость первую особую точку. Характеристическое уравнение в ее окрестности имеет вид

$$\lambda^3 + 4\omega\lambda^2 + (2 + 3/2\beta)\,4\omega^2\lambda + (1 + \beta)\,4\omega^3 = 0 \tag{4.5}$$

$$\beta = \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 - \frac{F_1}{F_2}\left(\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 + 1\right)^{1/2} \tag{4.6}$$

Корни уравнения (4.5) будут иметь отрицательные вещественные части, если $\beta > -1$. Исследование выражения (4.6) показывает, что $\beta > -1/2$ при всех $F_1/F_2 \in (-\infty, \infty)$. А значит, при любом отношении F_1/F_2 устойчивым движением будет раскручивающаяся логарифмическая спираль

$$r = \frac{1}{\theta_1}\exp\left[\frac{\omega}{z_1}(\varphi - \varphi_0)\right]$$

Т. е. для силы указанного выше типа при наличии сколь угодно малой составляющей, направленной перпендикулярно радиусу-вектору, точка будет удаляться от начала координат. Центробежная сила, обусловленная этой составляющей будет больше, чем составляющая, параллельная радиусу-вектору и направленная к началу координат. Аналогичное утверждение справедливо и для постоянной силы.

Рассмотрим пример задач, которые могут быть решены при помощи теории групп. Сначала решим элементарную задачу о движении заряженной частицы в однородном и постоянном магнитном поле (фиг. 3), перпендикулярном плоскости движения частицы. Такое движение описывается системой дифференциальных уравнений [4]:

$$\dot{r} = v, \quad \dot{v} = \sigma^2 r^{-3} + \sigma r^{-1}\omega_0, \quad \dot{\sigma} = -\omega_0 v r \tag{4.7}$$

где $\omega_0 = qB/m$ – циклотронная частота, q — электрический заряд, B —магнитная индукция; m — масса частицы. При этом сила, действующая на частицу, имеет вид (2.5), поэтому группу симметрий системы (4.7) будем искать в виде группы растяжений (3.1). Проведя вычисления, аналогичные описанным выше, находим канонические координаты группы симметрии системы (4.7) и делаем замену переменных $r = e^x$, $v = ye^x$, $\sigma = ze^{2x}$.

В новых переменных система (4.7) запишется следующим образом:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z^2 - y^2 + z\omega_0, \quad \dot{z} = -\omega_0 y - 2zy \tag{4.8}$$

Система (4.8) имеет две особые точки: $y = z = 0$ и $y = 0$, $z = -\omega_0$. Вторая точка соответствует вращению частицы вокруг начала координат с $v = 0$ и постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi} = -\omega_0$. Первая — покоящейся частице.

Теперь усложним задачу. Пусть магнитная индукция B зависит от радиус-вектора $-B(r) = B_0 r^k$. Система уравнений, описывающая движение частицы в таком поле, имеет вид

$$\dot{r} = v, \quad \dot{v} = \sigma^2 r^{-3} + \omega_0 \sigma r^{k-1}$$

$$\dot{\sigma} = -\omega_0 v r^{k+1} \tag{4.9}$$

Канонические координаты группы симметрии в этом случае $x = \ln r$, $y = vr^{-(k+1)}$, $z = \sigma r^{-(k+2)}$. Обратная замена

$$r = e^x, \quad v = ye^{(k+1)x}, \quad \sigma = ze^{(k+2)x}$$

После замены переменных система (4.9) примет вид

$$\dot{x} = ye^{kx}, \quad \dot{y} = (z^2 + \omega_0 z - (k+1)\, y^2)\, e^{kx}$$

$$\dot{z} = (-\omega_0 y - (k+2)\, zy)\, e^{kx} \tag{4.10}$$

Понизить порядок этой системы можно разделив два последних уравнения (4.10) на первое

$$dy/dx = z^2 + \omega_0 z - (k+1)\, y^2/y$$

$$dz/dx = -\omega_0 - (k+2)\, z \tag{4.11}$$

Система (4.11) может быть решена точно. Ее решение (C_1, C_2 – постоянные):

$$z = C_1 e^{-(k+2)x} - \omega_0/k + 2$$

$$y = [\omega_0^2 (1-k)/(k+2)^2(k+1) + C_2 e^{-(k+1)x} - k - 2/k + 2\omega_0 C_1 e^{-(k+2)x}]^{1/2}$$

Совершая обратную замену можно получить точное решение исходной системы.

5. Обобщение на случай силы, представленной в виде полинома. Класс сил, для которых система (2.1) с $F_r = 0$ допускает группу растяжений, как и растяжений по r, σ, v и сдвига по t может быть значительно расширен. Пусть сила имеет вид

$$F_\varphi(r, v, \sigma, t) = F_0(r, v, \sigma, t) + \Delta(r, v, \sigma, t) \tag{5.1}$$

где $F_0(r, v, \sigma, t)$ имеет вид (2.5) или (2.7). Сделаем замену переменных, соответствующую виду силы.

После замены, если сила имеет вид (2.5), нужно разделить три последние уравнения на первое. В результате придем к системе

$$dy/dx = (z^2 - n_1 y^2)/y$$

$$dz/dx = F_0 z^{k_2}\theta^{k_3}y^{k_4} - n_2 zy/y + \Delta^*(x, y, z, \theta)/ye^{-(n_1-1)x} \tag{5.2}$$

$$d\theta/dx = (1 - n_3\theta_y)/y$$

где $\Delta^*(x, y, z, \theta)$ – образ $\Delta(r, v, \sigma, t)$. Если при этом $\Delta^*(x, y, z, \theta)\, e^{-(n_1-1)x} \to 0$ при $x \to \infty$, то по теореме об устойчивости при постоянно действующих возмущениях [2] система (5.2) имеет решение сколь угодно близкое к стационарному (при $\Delta^* = 0$). Следовательно, при больших r движение точки под действием силы вида (5.1) мало отличается от движения при $\Delta(r, v, \sigma, t) = 0$. И для решения такой задачи достаточно провести исследование системы (5.2) при $\Delta^*(x, y, z, \theta) = 0$.

Аналогичные рассуждения справедливы и в случае, если сила $F_0(r, v, \sigma, t)$ имеет вид (2.7). Только здесь необходимо требовать, чтобы $\Delta^*(x, y, z, \theta) \to 0$ при $x \to \infty$.

Таким образом, можно найти решение системы (2.1), если сила, действующая на точку, представлена полиномом

$$F_\varphi(r, v, \sigma, t) = \sum_{i=1}^{N} F_i t^{k_3^i} r^{k_1^i} v^{k_4^i} \sigma^{k_2^i} \tag{5.3}$$

В этом случае нужно выбрать $F_0(r, v, \sigma, t) = F_j t^{k_3^j} r^{k_1^j} v^{k_4^j} \sigma^{k_2^j}$, где $1 \le j \le N$, чтобы выполнялось условие

$$k_3^i n_3^i + k_2^i n_2^i + k_4^i n_1^i + k_1^i \le n_1^j - 1 \tag{5.4}$$

Коэффициенты n_1^i, n_2^i, n_3^i определяются по формулам (3.2) для всех i, $1 \le i \le N$. Если сила имеет вид

$$F_\varphi(r, v, \sigma, t) = \sum_{i=1}^{N} F_i r^{k_1^i} \sigma^{k_2^i} v^{k_3^i} e^{\omega_i t} \tag{5.5}$$

то можно выбрать $F_0(r, v, \sigma, t) = F_j r^{k_1^j} \sigma^{k_2^j} v^{k_3^j} e^{\omega_j t}$ так, чтобы выполнялось условие

$$k_1^i + 2k_2^i + k_3^i + m_j\omega_i/\omega_j \le 1 \tag{5.6}$$

при всех i, $1 \le i \le N$, коэффициент m_j определяется из (3.10).

Автор искренне благодарит профессора В. Ф. Журавлева за постановку задачи и руководство работой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В. Ф., Ишлинский А. Ю.* Метод подобия в задачах динамики точки//Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 6—12.
2. *Малкин И. Г.* Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях//ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 241—245.
3. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
4. *Лонгмайр К.* Физика плазмы. М.: Атомиздат, 1957. С. 8—9.

Москва

Поступила в редакцию
12.XII.1991