МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1994

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. В. А. ЕРЕМЕЕВ, Л. М. ЗУБОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ ТЕЛ С МОМЕНТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Для нелинейно-упругого континуума Коссера — среды с моментными напряжениями и взаимодействием частиц при наличии микровращения дана постановка задачи статической устойчивости, основанная на линеаризации уравнений и граничных условий вблизи известного равновесного состояния. Установлены необходимые и достаточные условия консервативности внешних нагрузок. Показано, в частности, что распределенная мертвая моментная нагрузка, в отличие от мертвой силовой, не является консервативной. Выведено выражение удельной потенциальной энергии малых деформаций предварительно напряженного тела Коссера. Доказано, что условие сильной эллиптичности линеаризованных уравнений равновесия, являющееся ограничением на функцию удельной потенциальной энергии деформации, служит необходимым условием устойчивости любой равновесной конфигурации упругого тела с моментными напряжениями. Решена задача устойчивости сжатого полупространства с учетом моментных напряжений.

1. Рассмотрим модель нелинейно-упругого континуума Коссера [1—5], согласно которой каждая частица сплошной среды обладает внутренней степенью свободы — микровращением. Положение частицы в деформированном состоянии задается радиусом вектором $\mathbf{R}$, а осредненный поворот микрочастиц, составляющих частицу континуума, характеризуется собственно ортогональным тензором $\mathbf{H}$, который назовем тензором микроповорота. Следуя принципу локального действия [6] в механике сплошной среды, функцию удельной (на единицу объема отсчетной конфигурации) потенциальной энергии деформации упругого континуума примем в виде

$$W = W(\mathbf{R}, \nabla_0\mathbf{R}, \mathbf{H}, \nabla_0\mathbf{H}), \quad \nabla_0 = \mathbf{r}^s\partial/\partial x^s$$
$$\mathbf{r}_k = \partial\mathbf{r}/\partial x^k, \quad \mathbf{r}^s\cdot\mathbf{r}_k = \delta_k^s \quad (s, k = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

где x^s — лагранжевы координаты, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы в отсчетной недеформированной конфигурации, ∇_0 — набла оператор отсчетной конфигурации. Согласно принципу материальной индифферентности [6, 7], потенциальная энергия упругого тела не должна изменяться при жестких движениях среды. Инвариантность относительно трансляций приводит к независимости функции W от аргумента R в (1.1). Требование инвариантности относительно вращений системы отсчета наблюдателя приводит к условию

$$W[(\nabla_0\mathbf{R})\cdot\mathbf{Q},\ \mathbf{H}\cdot\mathbf{Q},\ (\nabla_0\mathbf{H})\cdot\mathbf{Q}] = W(\nabla_0\mathbf{R}, \mathbf{H}, \nabla_0\mathbf{H}) \tag{1.2}$$

для любых ортогональных ($\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$) тензоров $\mathbf{Q}$. Положив в (1.2) $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^T$, получим

$$W = W[(\nabla_0\mathbf{R})\cdot\mathbf{H}^T,\ (\nabla_0\mathbf{H})\cdot\mathbf{H}^T] \tag{1.3}$$

В (1.3) учтено, что $\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^T = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — единичный тензор. Соотношение (1.3) получено как необходимое условие равенства (1.2). Можно проверить, что оно также и достаточно для инвариантности энергии относительно жестких движений.

Для изотропной среды удельная энергия деформации W будет функцией совместных инвариантов тензоров аргументов $(\nabla_0\mathbf{R})\cdot\mathbf{H}^T$, $(\nabla_0\mathbf{H})\cdot\mathbf{H}^T$.

Учитывая антисимметричность тензоров $(\partial\mathbf{H}/\partial x^k)\cdot\mathbf{H}^T$ $(k=1,\ 2,\ 3)$, тензор третьего ранга $(\nabla_0\mathbf{H})\cdot\mathbf{H}^T$ можно представить при помощи тензора (точнее, псевдотензора) второго ранга $\mathbf{L}$ следующим образом

$$(\nabla_0\mathbf{H})\cdot\mathbf{H}^T = -\mathbf{L}\times\mathbf{E},\quad \mathbf{L} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{r}^k\,[(\partial\mathbf{H}/\partial x^k)\cdot\mathbf{H}]_\times \tag{1.4}$$

Здесь и ниже символ $\mathbf{T}_\times$ означает векторный инвариант тензора второго ранга $\mathbf{T}$: $\mathbf{T}_\times = (T_{sk}\mathbf{r}^s\mathbf{r}^k)_\times = T_{sk}\mathbf{r}^s\times\mathbf{r}^k$.

Согласно (1.3), (1.4) упругий потенциал W в данной материальной частице зависит от деформации окрестности этой частицы посредством двух тензоров второго ранга: меры деформации $\mathbf{U} = (\nabla_0\mathbf{R})\cdot\mathbf{H}^T$ и тензора изгибной деформации $\mathbf{L}$.

Из (1.4) при помощи известного [8] представления собственно ортогонального тензора через вектор конечного поворота

$$\mathbf{H} = \mathbf{S}_+^{-1}\cdot\mathbf{S}_- = \mathbf{S}_-\cdot\mathbf{S}_+^{-1},\qquad \mathbf{S}_\pm = \mathbf{E}\pm\tfrac{1}{2}\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta} \tag{1.5}$$

получим выражение тензора изгибной деформации через вектор микроповорота $\boldsymbol{\theta}$:

$$\mathbf{L} = 4\,(4+\theta^2)^{-1}\,(\nabla_0\boldsymbol{\theta})\cdot(\mathbf{E}+\tfrac{1}{2}\mathbf{E}\times\boldsymbol{\theta}),\qquad \theta^2 = \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta} \tag{1.6}$$

Заметим, что длина вектора $\boldsymbol{\theta}$, соответствующего конечному микроповороту на угол φ, выражается формулой $\theta = 2\,\mathrm{tg}\,\varphi/2$.

Для вывода уравнений равновесия и граничных условий нелинейно-упругого континуума Коссера воспользуемся вариационным уравнением Лагранжа

$$\delta\int_v W dv - \delta' A = 0 \tag{1.7}$$

где v — объем тела в отсчетной конфигурации, $\delta' A$ — элементарная работа внешней нагрузки, не являющаяся в общем случае вариацией какого-либо функционала. На основании (1.3), (1.4), (1.6) имеем

$$\delta W = \mathbf{D}^T\cdot\cdot(\nabla_0\delta\mathbf{R}) + \mathbf{D}^T\cdot\cdot(\nabla_0\mathbf{R}\times\boldsymbol{\psi}) + \mathbf{G}^T\cdot\cdot(\nabla_0\boldsymbol{\psi}) \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{\psi} = 4\,(4+\theta^2)^{-1}\,(\delta\boldsymbol{\theta}+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\theta}\times\delta\boldsymbol{\theta})$$

$$\mathbf{D} = (\partial W/\partial\mathbf{U})\cdot\mathbf{H},\quad \mathbf{G} = (\partial W/\partial\mathbf{L})\cdot\mathbf{H} \tag{1.9}$$

Интегрируя по частям и использую теорему о дивергенции, при помощи (1.8) получим

$$\delta\int_v W dv = \int_\sigma \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\cdot\delta\mathbf{R}\,d\sigma + \int_\sigma \mathbf{n}\cdot\mathbf{G}\cdot\boldsymbol{\psi}\,d\sigma - \tag{1.10}$$

$$-\int_v(\nabla_0\cdot\mathbf{D})\cdot\delta\mathbf{R}\,dv - \int_v[\nabla_0\cdot\mathbf{G} + ((\nabla_0\mathbf{R})^T\cdot\mathbf{D})_\times]\cdot\boldsymbol{\psi}\,dv$$

Равенство (1.10) диктует выражение элементарной работы внешних сил

$$\delta' A = \int_v \rho_0\,(\mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{R} + \mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\psi})\,dv + \int_\sigma(\boldsymbol{\varphi}_0\cdot\delta\mathbf{R} + \boldsymbol{\mu}_0\cdot\boldsymbol{\psi})\,d\sigma \tag{1.11}$$

В (1.10), (1.11) σ — поверхность тела в отсчетной конфигурации с нормалью $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{l}$ — массовые плотности распределенных по объему силы и момента, $\boldsymbol{\varphi}_0$ и $\boldsymbol{\mu}_0$ — интенсивности распределенных по σ силовой и моментной нагрузок, ρ_0 — плотность материала в отсчетной конфигурации. Из вариационного уравнения

(1.7) и выражения (1.11) вытекают уравнения равновесия и статические граничные условия

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{D} + \rho_0 \mathbf{b} = 0, \quad \nabla_0 \cdot \mathbf{G} + [(\nabla_0 \mathbf{R})^T \cdot \mathbf{D}]_\times + \rho_0 \mathbf{l} = 0 \tag{1.12}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \varphi_0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{G} = \mu_0 \tag{1.13}$$

Так как требование $\psi = 0$ эквивалентно условию $\delta\theta = 0$, кинематические граничные условия состоят в задании на поверхности тела вектора перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$ и вектора микроповорота θ. Используя тождество Пиолы [7], условия равновесия (1.12), (1.13) можно записать в геометрии деформированного состояния

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \rho \mathbf{l} = 0 \tag{1.14}$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = \varphi, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{M} = \mu, \quad \nabla = \mathbf{R}^s \partial/\partial x^s, \quad \mathbf{R}^s \cdot \mathbf{R}_k = \delta^s_k, \quad \mathbf{R}_k = \partial \mathbf{R}/\partial x^k \tag{1.15}$$

$$\mathbf{T} = J^{-1} (\nabla_0 \mathbf{R})^T \cdot \mathbf{D}, \quad \mathbf{M} = J^{-1} (\nabla_0 \mathbf{R})^T \cdot \mathbf{G}, \quad J = \det (\nabla_0 \mathbf{R}) \tag{1.16}$$

Здесь $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений, аналогичные тензору напряжений Коши в теории упругости простых материалов, φ и μ — интенсивности нагрузок на единицу площади поверхности Σ в деформированном состоянии, $\mathbf{N}$ — единичная нормаль к Σ, ρ — плотность материала в деформированной конфигурации. Тензоры $\mathbf{D}$ и $\mathbf{G}$ аналогичны тензору напряжений Пиолы в обычной нелинейной теории упругости.

Внешние силы могут быть следящими. Это означает, что нагрузки $\mathbf{B}$, $\mathbf{l}$, φ_0, μ_0 не обязательно являются заданными функциями лагранжевых координат x^k, а могут заданным образом зависеть от векторов $\mathbf{R}$ и θ и их градиентов, например $\mu_0 = \mu_0 (\mathbf{r}, \mathbf{R} (\mathbf{r}), \theta (\mathbf{r}); \nabla_0 \mathbf{R} (\mathbf{r}), \nabla_0 \theta (\mathbf{r}))$.

Сформулированные выше основные уравнения нелинейной теории упругости для тел с моментными напряжениями другими методами были получены в [2—5].

2. Предположим, что известно некоторое состояние равновесия нелинейно-упругого тела Коссера, обусловленное действием заданных нагрузок и называемое в дальнейшем начальным или основным. Это состояние характеризуется векторными полями $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ и $\theta(\mathbf{r})$. Наряду с начальным деформированным состоянием рассмотрим положение равновесия тела, мало отличающееся от него. Линейные части приращений различных величин, характеризующих возмущенное состояние равновесия, будем обозначать точкой, например

$$\mathbf{D}^{\cdot} = \frac{d}{d\tau} \mathbf{D} \,[\nabla_0 (\mathbf{R} + \tau \mathbf{v}), \ (\mathbf{H} - \tau \mathbf{H} \times \omega), \ \nabla_0 (\mathbf{H} - \tau \mathbf{H} \times \omega)]|_{\tau=0} \tag{2.1}$$

$$\omega = 4 (4 + \theta^2)^{-1} (\theta^{\cdot} - \tfrac{1}{2} \theta^{\cdot} \times \theta)$$

Здесь $\mathbf{v}$ — вектор добавочного перемещения, ω — линейный вектор добавочного поворота, характеризующий малый поворот, отсчитываемый от начального деформированного состояния. Справедливы формулы

$$\mathbf{H}^{\cdot} = -\mathbf{H} \times \omega, \quad \theta^{\cdot} = \omega - \tfrac{1}{2} \theta \times \omega + \tfrac{1}{4} \theta (\theta \cdot \omega) \tag{2.2}$$

$$\mathbf{U}^{\cdot} = (\nabla_0 \mathbf{R}) \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{L}^{\cdot} = (\nabla_0 \mathbf{R}) \cdot \varkappa \cdot \mathbf{H}^T, \quad \varepsilon = \nabla \mathbf{v} + \mathbf{E} \times \omega, \quad \varkappa = \nabla \omega$$

где ∇ — набла-оператор в начальной деформированной конфигурации, ε и $\varkappa$ — тензор деформации и тензор изгибной деформации, используемые в линейной моментной теории упругости [1].

Краевая задача, описывающая возмущенное положение равновесия, мало отличающееся от основного состояния, получается путем линеаризации уравнений равновесия (1.12) и граничных условий и имеет вид

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{D}^\bullet + \rho_0 \mathbf{b}^\bullet = 0, \quad \nabla_0 \cdot \mathbf{G}^\bullet + [(\nabla_0 \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{D} + (\nabla_0 \mathbf{R})^T \cdot \mathbf{D}^\bullet]_\times + \rho_0 \mathbf{l}^\bullet = 0 \tag{2.3}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^\bullet|_{\sigma_2} = \varphi_0^\bullet, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{G}^\bullet|_{\sigma_2} = \mu_0^\bullet, \quad \mathbf{v}|_{\sigma_1} = 0, \quad \omega|_{\sigma_1} = 0 \tag{2.4}$$

где σ_1 — часть поверхности тела, на которой заданы перемещения и микроповороты, σ_2 — часть поверхности, на которой заданы нагрузки. Тензоры $\mathbf{D}^\bullet$ и $\mathbf{G}^\bullet$ являются линейными функциями тензоров ε, $\Omega = \mathbf{E} \times \omega$ и $\varkappa$. Эти функции находятся путем линеаризации определяющих соотношений (1.9) с привлечением формул (2.2). Введя тензоры

$$\mathbf{P} = J^{-1} (\nabla_0 \mathbf{R})^T \cdot \mathbf{D}^\bullet, \quad \Phi = J^{-1} (\nabla_0 \mathbf{R})^T \cdot \mathbf{G}^\bullet \tag{2.5}$$

линеаризованные уравнения равновесия (2.3) и граничные условия (2.4) можно записать в геометрии начального деформированного состояния

$$\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho \mathbf{b}^\bullet = 0, \quad \nabla \cdot \Phi + [(\nabla \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{T}]_\times + \mathbf{P}_\times + \rho \mathbf{l}^\bullet = 0 \tag{2.6}$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{P}|_{\Sigma_2} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{N} \cdot \Phi|_{\Sigma_2} = \mathbf{m}, \quad \mathbf{f} d\Sigma = \varphi_0^\bullet d\sigma, \quad \mathbf{m} d\Sigma = \mu_0^\bullet d\sigma \tag{2.7}$$

Здесь $d\sigma$ и $d\Sigma$ — элементы площади поверхности тела соответственно в отсчетной начальной деформированной конфигурациях. Векторы $\mathbf{b}^\bullet$, $\mathbf{l}^\bullet$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{m}$ — линейный функции кинематических величин $\mathbf{v}$, ω, ε, $\varkappa$. Все приведенные выше соотношения справедливы при любом выборе отсчетной конфигурации. В целях упрощения формул в дальнейшем будем считать, что отсчетная конфигурация совпадает с начальным (основным) напряженно-деформированным состоянием. Это означает, что в основном состоянии $\nabla_0 \mathbf{R} = \mathbf{U} = \mathbf{E}$, $\theta = \mathbf{L} = 0$. При указанном выборе отсчетной конфигурации из (1.9), (2.2) получим

$$\mathbf{P} = (\partial^2 W / \partial \mathbf{U} \partial \mathbf{U}) \cdot\cdot\, \varepsilon^T + (\partial^2 W / \partial \mathbf{U} \partial \mathbf{L}) \cdot\cdot\, \varkappa^T - \mathbf{T} \times \omega \tag{2.8}$$

$$\Phi = (\partial^2 W / \partial \mathbf{L} \partial \mathbf{U}) \cdot\cdot\, \varepsilon^T + (\partial^2 W / \partial \mathbf{L} \partial \mathbf{L}) \cdot\cdot\, \varkappa^T - \mathbf{M} \times \omega$$

Наряду с истинным полем перемещений $\mathbf{v}$ и поворотов ω возмущенного состояния равновесия (т. е. векторов $\mathbf{v}$ и ω, удовлетворяющих краевой задаче (2.6), (2.7)) будем рассматривать кинематически возможные поля $\delta\mathbf{v}$ и $\delta\omega$, под которыми будем понимать дважды дифференцированные функции координат, удовлетворяющие условиям $\delta\mathbf{v} = \delta\omega = 0$ на Σ_1. Умножим скалярно первое из уравнений (2.6) на вектор $\delta\mathbf{v}$, второе — на вектор $\delta\omega$, сложим и проинтегрируем по области V, занимаемой упругим телом в начальной конфигурации. После преобразования с учетом (2.7) получим равенство

$$\int_V [\mathbf{P} \cdot\cdot\, \delta\varepsilon^T + (\mathbf{T}^T \cdot (\varepsilon - \Omega)) \cdot\cdot\, \delta\Omega + \Phi \cdot\cdot\, \delta\varkappa^T]\, dV = \tag{2.9}$$

$$= \int_V \rho\, (\mathbf{b}^\bullet \cdot \delta\mathbf{v} + \mathbf{l}^\bullet \cdot \delta\omega)\, dV + \int_{\Sigma_2} (\mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{v} + \mathbf{m} \cdot \delta\omega)\, d\Sigma$$

При помощи (2.8) доказывается соотношение

$$\mathbf{P} \cdot\cdot\, \delta\varepsilon^T + (\mathbf{T}^T \cdot (\varepsilon - \Omega)) \cdot\cdot\, \delta\Omega + \Phi \cdot\cdot\, \delta\varkappa^T = \delta w - \tag{2.10}$$

$$- \tfrac{1}{2} ((\mathbf{T}^T - \mathbf{T}) \cdot \Omega) \cdot\cdot\, \delta\Omega + \tfrac{1}{2} (\mathbf{M} \times \delta\omega) \cdot\cdot\, (\nabla\omega)^T - \tfrac{1}{2} (\mathbf{M} \times \omega) \cdot\cdot\, (\nabla\delta\omega)^T$$

$$w = \tfrac{1}{2} \mathbf{P} \cdot\cdot\, \varepsilon^T + \tfrac{1}{2} (\mathbf{T}^T \cdot (\varepsilon - \Omega)) \cdot\cdot\, \Omega + \tfrac{1}{2} \Phi \cdot\cdot\, \varkappa^T$$

Справедливы тождества

$$-(\mathbf{M}\times\delta\boldsymbol{\omega})\cdot\cdot(\nabla\boldsymbol{\omega})^T+(\mathbf{M}\times\boldsymbol{\omega})\cdot\cdot(\nabla\delta\boldsymbol{\omega})^T= \tag{2.11}$$

$$=\nabla\cdot[(\mathbf{M}\times\boldsymbol{\omega})\cdot\delta\boldsymbol{\omega}]-[(\nabla\cdot\mathbf{M})\times\boldsymbol{\omega}]\cdot\delta\boldsymbol{\omega}$$

$$[(\mathbf{T}^T-\mathbf{T})\cdot\boldsymbol{\Omega}]\cdot\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}=-(\mathbf{T}_\times\times\boldsymbol{\omega})\cdot\delta\boldsymbol{\omega} \tag{2.12}$$

При учете (2.10)—(2.12), а также (1.14), (1.15) вариационное уравнение (2.9) принимает вид

$$\delta\int_V w dV=K(\mathbf{v},\boldsymbol{\omega},\delta\mathbf{v},\delta\boldsymbol{\omega}) \tag{2.13}$$

$$K(\mathbf{v},\boldsymbol{\omega},\delta\mathbf{v},\delta\boldsymbol{\omega})\equiv\int_V[\rho\mathbf{b}^{\bullet}\cdot\delta\mathbf{v}+\tfrac{1}{2}\rho(\mathbf{l}\times\boldsymbol{\omega})\cdot\delta\boldsymbol{\omega}+\rho\mathbf{l}^{\bullet}\cdot\delta\boldsymbol{\omega}]\,dV+$$

$$+\int_{\Sigma_2}\left[\mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{v}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{\omega})\cdot\delta\boldsymbol{\omega}+\mathbf{m}\cdot\delta\boldsymbol{\omega}\right]d\Sigma$$

Необходимое и достаточное условие того, чтобы правая часть (2.13) была вариацией некоторого квадратичного функционала, состоит в выполнении для любых $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\delta\mathbf{v}$, $\delta\boldsymbol{\omega}$, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям, следующего равенства

$$K(\mathbf{v},\boldsymbol{\omega},\delta\mathbf{v},\delta\boldsymbol{\omega})=K(\delta\mathbf{v},\delta\boldsymbol{\omega},\mathbf{v},\boldsymbol{\omega}) \tag{2.14}$$

Поскольку функции $\mathbf{b}^{\bullet}$, $\mathbf{l}^{\bullet}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{m}$ представляют собой возмущения нагрузок $\mathbf{b}$, $\mathbf{l}$, $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\mu}$, то условие (2.14), выполненное для любого основного состояния, будет необходимым и достаточным для того, чтобы элементарная работа $\delta' A$ была вариацией некоторого функционала. Другими словами, равенство (2.14) есть необходимое и достаточное условие консервативности внешних нагрузок.

Рассмотрим пример приложения полученного критерия консервативности. Предположим, что силовая нагрузка является мертвой, а моментная нагрузка распределена по объему и отсутствует на поверхности, т. е. $\mathbf{f}=\mathbf{b}^{\bullet}=\boldsymbol{\mu}=\mathbf{m}=0$. Видно, что критерий (2.14) не выполняется при $\mathbf{l}^{\bullet}=0$. Это означает, что мертвая моментная нагрузка не является консервативной. Не будет консервативным и следящий момент, вектор которого поворачивается вместе с частицей $\mathbf{l}^{\bullet}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{l}$. В то же время условию консервативности, очевидно, удовлетворяет моментная нагрузка, для которой $\mathbf{l}^{\bullet}=\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{l}$ и которую можно назвать полуследящим распределенным моментом. Аналогичные утверждения справедливы и для моментной нагрузки, распределенной по поверхности.

При консервативных внешних нагрузках, как известно [9], исследовать устойчивость основного состояния равновесия можно статическим методом Эйлера, состоящим в определении тех значений параметров нагружения, при которых существуют нетривиальные решения линейной однородной краевой задачи (2.3), (2.4).

Пусть моментная нагрузка в основном и возмущенном состоянии равна нулю, а силовая нагрузка — мертвая. Тогда потенциальная энергия упругого тела выражается формулой

$$\Pi=\int_V W dV-\int_V\rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}\,dV-\int_{\Sigma_2}\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{u}\,d\Sigma \tag{2.15}$$

Вычислим приращение энергии в возмущенном положении равновесия по сравнению с энергией в основном состоянии, ограничиваясь членами не выше второго порядка малости

$$\Pi-\Pi_0=(\partial\Pi/\partial\tau)|_{\tau=0}+\tfrac{1}{2}(\partial^2\Pi/\partial\tau^2)|_{\tau=0}+\ldots \tag{2.16}$$

Из равновесности основного состояния аналогично [10] вытекает, что первая вариация энергии $(\partial \Pi/\partial \tau)|_{\tau=0}$ равна нулю, а вторая вариация имеет вид

$$(\partial^2 \Pi/\partial \tau^2)_{\tau=0} = 2 \int_V w dV \tag{2.17}$$

На основании (2.15)—(2.17) функцию w, являющуюся квадратичной формой тензорных переменных ε, $\varkappa$, Ω, можно назвать удельной потенциальной энергией малых деформаций предварительно напряженной моментной среды. При помощи (2.8) энергию представим в виде разложения

$$w = w' + w'' \tag{2.18}$$

$$w' = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon^T \cdot\cdot (\partial^2 W/\partial \mathbf{U} \partial \mathbf{U}) \cdot\cdot \varepsilon^T + \varepsilon^T \cdot\cdot (\partial^2 W/\partial \mathbf{U} \partial \mathbf{L}) \cdot\cdot \varkappa^T + \tfrac{1}{2}\, \varkappa^T \cdot\cdot (\partial^2 W/\partial \mathbf{L} \partial \mathbf{L}) \cdot\cdot \varkappa^T$$

$$w'' = \operatorname{tr} (\Omega \cdot \mathbf{T}^T \cdot \varepsilon) - \tfrac{1}{2} \operatorname{tr} (\Omega \cdot \mathbf{T}^T \cdot \Omega) + \tfrac{1}{2} \operatorname{tr} (\Omega \cdot \mathbf{M}^T \cdot \varkappa)$$

Разложение (2.18) аналогично разбиению удельной энергии предварительно напряженного простого тела на энергию чистой деформации и энергию поворотов [11]. Коэффициенты квадратичной формы w', не зависящей от Ω, определяются свойствами материала и начальной деформацией, в то время как коэффициенты формы w'' полностью определяются начальными силовыми и моментными напряжениями и одинаковы для всех материалов.

Состояние равновесия упругого тела будем называть устойчивым, если в этом состоянии вторая вариация потенциальной энергии тела строго положительна. Из этого определения вытекает, что положение равновесия будет неустойчивым, если существует нетривиальное решение $\mathbf{v}_0$, ω_0 линеаризованной задачи (2.3), (2.4). В самом деле, вторая вариация обращается в нуль на решении $\mathbf{v}_0$, ω_0.

3. В теории устойчивости простых (т. е. не обладающих моментными напряжениями) нелинейно-упругих тел важную роль играют условие сильной эллиптичности и его более слабая формулировка — условие Адамара [6, 7]. Помимо устойчивости эти условия связываются с гладкостью решений уравнений равновесия, возможностью распространения волн, выпуклостью удельной потенциальной энергии, наблюдаемостью в эксперименте [6, 7, 12, 23]. Свойство сильной эллиптичности также использовалось при изучении ветвления решений уравнений равновесия нелинейно-упругих тел [14].

Для вывода условия сильной эллиптичности в моментно-упругих средах воспользуемся общей теорией эллиптических систем уравнений [15]. В качестве исходной системы уравнений будем рассматривать линеаризованные уравнения равновесия в форме (2.6). Выделим в выражениях для $\mathbf{P}$ и Φ члены, содержащие производные максимального (первого) порядка от неизвестных функций $\mathbf{v}$ и ω.

$$\mathbf{P}_0 (\nabla \mathbf{v}, \nabla \omega) = (\partial^2 W/\partial \mathbf{U} \partial \mathbf{U}) \cdot\cdot (\nabla \mathbf{v})^T + (\partial^2 W/\partial \mathbf{U} \partial \mathbf{L}) \cdot\cdot (\nabla \omega)^T \tag{3.1}$$

$$\Phi_0 (\nabla \mathbf{v}, \nabla \omega) = (\partial^2 W/\partial \mathbf{L} \partial \mathbf{U}) \cdot\cdot (\nabla \mathbf{v})^T + (\partial^2 W/\partial \mathbf{L} \partial \mathbf{L}) \cdot\cdot (\nabla \omega)^T$$

Будем считать, что выполнено условие Адамара, если справедливо неравенство

$$B (\xi, \eta, \zeta) \equiv \mathbf{P}_0 (\xi \eta, \xi \zeta) \cdot\cdot (\eta \xi) + \Phi_0 (\xi \eta, \xi \zeta) \cdot\cdot (\zeta \xi) \geq 0 \tag{3.2}$$

для любых векторов ξ, η, ζ, и будем считать, что выполнено условие сильной эллиптичности, если равенство в (3.2) возможно только при обращении в нуль векторов ξ, η, ζ. Заметим, что для неоднородных тел $B (\xi, \eta, \zeta)$ зависит и от координат. Можно показать, что приведенное условие сильной эллиптичности совпадает с определением сильно эллиптических систем уравнений [15].

Используя уравнения (2.3), дадим эквивалентное (3.2) определение, более удобное при использовании отсчетной конфигурации, не совпадающей с основным состоянием. Как при выводе (3.1), введем тензоры $\mathbf{D}_0^{\bullet}$ и $\mathbf{G}_0^{\bullet}$, связанные с $\mathbf{P}_0$ и

Φ_0 формулами (2.5). В этом случае условия сильной эллиптичности и Адамара определяются неравенством

$$B'(\xi, \eta, \zeta) \equiv \mathbf{D}_0^{\circ}(\xi\eta, \xi\zeta)\cdot\cdot(\eta\xi) + \mathbf{G}_0^{\circ}(\xi\eta, \xi\zeta)\cdot\cdot(\xi\xi) \geq 0 \tag{3.3}$$

Эквивалентность неравенств (3.2) и (3.3) следует из тождества $B'((\nabla_0\mathbf{R})\cdot\xi, \eta, \zeta) = JB(\xi, \eta, \zeta)$, которое получается с использованием соотношений (2.2) и (2.5).

Имеют место соотношения, связывающие вторую вариацию потенциальной энергии с выражениями в (3.2), (3.3):

$$B(\xi, \eta, \zeta) = 2w'(\varepsilon, \varkappa); \quad \varepsilon = \xi\eta, \quad \varkappa = \xi\zeta \tag{3.4}$$

$$B'(\xi, \eta, \zeta) = \frac{d^2}{d\tau^2} W(U + \tau\xi\eta\cdot H^T, L + \tau\xi\zeta\cdot H^T)|_{\tau=0}$$

Последнее выражение связывает неравенство Адамара и условие выпуклости удельной потенциальной энергии.

Покажем, что неравенство Адамара является необходимым условием устойчивости равновесной конфигурации моментного упругого тела, а именно, что из положительности второй вариации энергии (2.17) следует выполнение (3.2) в каждой точке тела.

Предположим противное, что существует такая точка $\mathbf{R}^{\circ}$ и такие векторы $\xi^{\circ}, \eta^{\circ}, \zeta^{\circ}$, что $B(\xi^{\circ}, \eta^{\circ}, \zeta^{\circ}) < 0$. Выберем окрестность V° точки $\mathbf{R}^{\circ}$, в которой также $B(\xi^{\circ}, \eta^{\circ}, \zeta^{\circ}) < 0$, и непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(\mathbf{R})$ равную нулю вне V°. Рассматривая значения $\Pi_2 = (\partial^2 W/\partial\tau^2)_{\tau=0}$ на функциях вида $\mathbf{v}^{\circ} = \varphi(\mathbf{R})\cos(k\xi^{\circ}\cdot\mathbf{R})\,\eta^{\circ}$, $\omega^{\circ} = \varphi(\mathbf{R})\sin(k\xi^{\circ}\cdot\mathbf{R})\,\zeta^{\circ}$ получим

$$\Pi_2(\mathbf{v}^{\circ}, \omega^{\circ}) = k^2\int\limits_{V^{\circ}} \varphi^2(\mathbf{R})\cos^2(k\xi^{\circ}\cdot\mathbf{R})\,B(\xi^{\circ}, \eta^{\circ}, \zeta^{\circ})\,dV + O(k)$$

В силу предположения об отрицательности $B(\xi^{\circ}, \eta^{\circ}, \zeta^{\circ})$ в окрестности V° первое слагаемое в правой части отрицательно. Рассматривая достаточно большие значения k, получаем, что $\Pi_2(\mathbf{v}^{\circ}, \omega^{\circ}) < 0$, что противоречит устойчивости рассматриваемого состояния. Установленное противоречие доказывает нужное утверждение.

Приведем пример проверки условия сильной эллиптичности. Рассмотрим удельную энергию, являющуюся квадратичной формой тензоров $\mathbf{U} - \mathbf{E}$ и $\mathbf{L}$ (физически линейный материал). В случае изотропного материала общее выражение этой квадратичной формы имеет вид [1]:

$$W = \tfrac{1}{2}\lambda\,\mathrm{tr}^2(\mathbf{U} - \mathbf{E}) + \tfrac{1}{2}\nu\,\mathrm{tr}(\mathbf{U} - \mathbf{E})^2 + \tfrac{1}{2}\mu\,\mathrm{tr}((\mathbf{U} - \mathbf{E})\cdot(\mathbf{U}^T - \mathbf{E})) + \tag{3.5}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\gamma\,\mathrm{tr}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}^T) + \tfrac{1}{2}\beta\,\mathrm{tr}(\mathbf{L}^2) + \tfrac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tr}^2\,\mathbf{L}$$

Используя соотношение (3.3) и формулы дифференцирования тензорнозначных функций [7], получим

$$B'(\xi, \eta, \zeta) = \mu(\xi\cdot\xi)(\eta'\cdot\eta') + (\lambda + \nu)(\xi\cdot\eta')^2 + \tag{3.6}$$

$$+ \gamma(\xi\cdot\xi)(\zeta'\cdot\zeta') + (\alpha + \beta)(\xi\cdot\zeta')^2, \quad \eta' = \eta\cdot\mathbf{H}^T, \quad \zeta' = \zeta\cdot\mathbf{H}^T$$

Из (3.6) следует, что условие сильной эллиптичности для данного материала эквивалентно неравенствам $\mu > 0$, $\gamma > 0$, $\lambda + \nu + \mu > 0$, $\alpha + \beta + \gamma > 0$.

4. Рассмотрим далее задачу о потере устойчивости при сжатии моментного упругого полупространства. Поверхностная неустойчивость в простых нелинейно-упругих телах изучалась в [16—23]. В качестве определяющего соотношения выберем модель псевдоконтинуума Коссера, в которой тензор микровращения $\mathbf{H}$

отождествляется с тензором макроповорота $\mathbf{O} = (\nabla_0\mathbf{R}\cdot(\nabla_0\mathbf{R})^T)^{-1/2}\cdot\nabla_0\mathbf{R}$, что может быть записано как условие симметричности и положительной определенности тензора $\mathbf{U}$. Линейная теория псевдоконтинуума Коссера изучалась в [2, 24]. Вопросы обобщения указанной теории на нелинейный случай исследовались в [3, 5]. Кроме того, наложим на определяющие соотношения условие несжимаемости материала [6, 7], использованное в задачах изучения поверхностной неустойчивости в [19, 20, 23]. Выражая рассматриваемые условия через тензор $\mathbf{U}$, получаем

$$\mathbf{U}_\times = 0, \quad \det \mathbf{U} = 1 \tag{4.1}$$

Уравнения равновесия нелинейно-упругого континуума Коссера с наложенными связями (4.1) могут быть получены из вариационного уравнения вида (1.7) с помощью метода множителей Лагранжа [7]. Здесь тензоры напряжений и моментных напряжений определяются соотношениями

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_e - p\,(\nabla_0\mathbf{R})^{-T} - \mathbf{q}\times\mathbf{H}, \quad \mathbf{D}_e = (\partial W/\partial\mathbf{U})\cdot\mathbf{H}, \quad \mathbf{G} = (\partial W/\partial\mathbf{L})\cdot\mathbf{H} \tag{4.2}$$

где p и $\mathbf{q}$ — неизвестные функции, не зависящие от деформации. Определяющие соотношения со связями (4.1) использовались в [25]. Приняв функцию энергии W в виде [25]:

$$W = 2\mu\,\mathrm{tr}\,\mathbf{U} + \tfrac12\gamma\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{L}\cdot\mathbf{L}^T) + \tfrac12\beta\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{L}^2) + \tfrac12\alpha\,\mathrm{tr}^2\,\mathbf{L} \tag{4.3}$$

получим $\mathbf{D}_e = 2\mu\mathbf{H}$, $\mathbf{G} = (\gamma\mathbf{L} + \beta\mathbf{L}^T + \alpha\mathbf{E}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{L})\cdot\mathbf{H}$.

Будем считать полупространство свободным от действия поверхностных и объемных нагрузок ($\mathbf{b} = \mathbf{l} = \mu_0 = \varphi_0 = 0$). В предположении об осевой симметрии начальная деформация полупространства дается формулами $\mathbf{R} = \lambda r\mathbf{e}_r + \lambda^{-2}z\mathbf{e}_z$, $\theta = 0$, где r, z, φ — цилиндрические координаты в недеформированном состоянии, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_\varphi$ — связанный с ними ортонормированный базис, λ — коэффициент сжатия в радиальном направлении. Кроме того, положим $\mathbf{q} = 0$. Можно показать, что в начальном деформированном состоянии $\mathbf{G} = 0$, $\mathbf{D} = \mathrm{const}$, уравнения равновесия (1.12) и условия (4.1) выполнены тожественно, краевые условия на поверхности полупространства удовлетворяются за счет выбора функции p из (4.2).

С учетом (4.2), (4.3) линеаризованные уравнения равновесия (2.3) и линеаризованные уравнения связей принимают вид

$$-(\nabla_0 p^\bullet)\cdot(\nabla_0\mathbf{R})^{-T} - 2\mu\nabla_0\times\boldsymbol{\omega} + \nabla_0\times\mathbf{q}^\bullet = 0 \tag{4.4}$$

$$\gamma\nabla_0\cdot\nabla_0\boldsymbol{\omega} + (\alpha+\beta)\,\nabla_0\nabla_0\cdot\boldsymbol{\omega} + (-2\mu\,(\nabla_0\mathbf{R})^T\times\boldsymbol{\omega} + (\nabla_0\mathbf{R})^T\times\mathbf{q}^\bullet + 2\mu\,(\nabla_0\mathbf{v})^T)_\times = 0$$

$$(\nabla_0\mathbf{R}\times\boldsymbol{\omega})_\times + \nabla_0\times\mathbf{v} = 0, \quad (\nabla_0\mathbf{R})^{-1}\cdot\cdot\nabla_0\mathbf{v} = 0$$

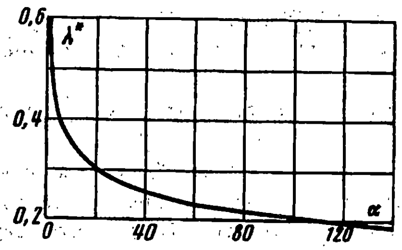
Решение уравнений (4.4) ищется в виде

$$\mathbf{v} = Y_1(z)\,J_1(\chi r)\,\mathbf{e}_r + Y_2(z)\,J_0(\chi r)\,\mathbf{e}_z, \quad p^\bullet = Y_3(z)\,J_0(\chi r) \tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{\omega} = Y_4(z)\,J_1(\chi r)\,\mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{q}^\bullet = Y_5(z)\,J_1(\chi r)\,\mathbf{e}_\varphi$$

где J_0, J_1 — функции Бесселя, $Y_k(z)$ $(k = 1, \ldots, 5)$ — неизвестные функции.

Подстановка соотношений (4.5) в уравнения (4.4) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений $d\mathbf{Y}/dz = \mathbf{A}(\chi)\cdot\mathbf{Y}$. Можно показать, что ее решение имеет вид $\mathbf{Y}(z) = (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 z)\exp(\nu_1 z) + \mathbf{c}_3\exp(\nu_2 z)$, где $\nu_2 = (\chi^2 + 2\mu(\lambda^3+1)/(\gamma\lambda^2))^{1/2}$, $\nu_1 = \chi\lambda^{-3/2}$, $\mathbf{c}_k$ — постоянные интегрирования, из которых только три независимы. Используя преобразованные с учетом (4.2), (4.3), (4.5) краевые условия на поверхности полупространства для определения независимых постоянных интегрирования, получим, что условием существования



нетривиальных решений уравнений нейтрального равновесия служит обращение в нуль выражения

$$D(a,\lambda)=\left(\lambda+\frac{\lambda^3+1}{\lambda a}\right)^{1/2}\left[2+\frac{(\lambda^3+1)^2}{2a\lambda^2(1-\lambda^3-(\lambda^3+1)\lambda/a)}\right]+$$

$$+\frac{(\lambda^3+1)^2}{a\lambda^2(\lambda^3-1+(\lambda^3+1)\lambda/a)^2}\left[\left(\lambda+\frac{\lambda^3+1}{\lambda a}\right)^{1/2}-\frac{1}{\lambda}\right],\quad a=\frac{\gamma\chi^2}{2\mu}$$

В отличие от случая простого однородного нелинейно-упругого полупространства полученное выражение через параметр a зависит от волнового числа χ. Зависимость критического значения коэффициента λ^* от a приведена на фигуре. При $a=0$ коэффициент $\lambda^*=(1/3)^{1/3}$, что совпадает с величиной критического сжатия для полупространства из материала Бартенева — Хазановича. При $a\to\infty$ коэффициент $\lambda^*\to 0$.

Приведенный пример указывает на возможность качественных отличий потери устойчивости моментных упругих тел от потери устойчивости простых нелинейно-упругих тел.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-013-16497).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пальмов В. А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости//ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401—408.
2. *Toupin R. A.* Theories of elasticity with couple-stress//Arch. Rat. Mech. Anal. 1964. V. 17. N 5. P. 85—112.
3. *Шкутин Л. И.* Нелинейные модели деформируемых моментных сред//ПМТФ. 1980. № 6. С. 111—117.
4. *Жилин П. А.* Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек//Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1982. № 386. С. 29—46.
5. *Шкутин Л. И.* Механика деформаций гибких тел. Новосибирск: Наука, 1988. 127 с.
6. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
7. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
8. *Зубов Л. М.* Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1982. 143 с.
9. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
10. *Зубов Л. М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Случай наложения малой деформации на конечную//ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 5. С. 848—852.
11. *Зубов Л. М.* Теория малых деформаций предварительно напряженных тонких оболочек//ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 85—95.
12. *Гурвич Е. Л.* Условие Адамара в нелинейной теории упругости//Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 1. С. 45—51.
13. *Эриксен Дж.* Некоторые специальные вопросы эластостатики//Исследования по механике сплошных сред. М.: Мир, 1977. С. 124—188.
14. *Зеленин А. А., Зубов Л. М.* Ветвление решений статических задач нелинейной теории упругости//ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 275—292.
15. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.

16. *Biot M. A.* Mechanics of incremental deformations. N.— Y.: Willey, 1965. 504 p.
17. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 272 с.
18. *Гузь А. Н.* Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища школа, 1986. 512 с.
19. *Боярченко С. И., Зубов Л. М.* К теории складкообразования на поверхности неоднородного полупространства//Изв. Сев.-Кавказ. научн. центра высш. шк. Естеств. науки. 1980. № 4. С. 30—33.
20. *Боярченко С. И., Зубов Л. М.* Поверхностная неустойчивость упругого неоднородного тяжелого полупространства//Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. № 1. С. 11—19.
21. *Triantafillidis N.* Surface instabilities in finitely strained solids under static loading//Intern. J. Eng. Sci. 1984. V. 22. No. 8/10. P. 1187—1192.
22. *Cao Guang-zhong.* On the surface instability of elastic half spaces//Иньюн шусюэ-хэ лисюэ. Appl. Math. and Mech. 1986. V. 7. No. 10. P. 937—945.
23. *Cao Guang-zhong.* Surface instability of an incompressible elastic half space subjected to biaxial loading//Гути лисюэ сюэбао. Acta mech. solida. sin. 1986. No. 3. P. 272—277.
24. *Koiter W. T.* Couple-stresses in the theory of elasticity//Proc. Kon. Nederland. Akad. Wetensch. 1964. B-67. No. 1.
25. *Зубов Л. М., Карякин М. И.* Дислокации и дисклинации в нелинейно-упругих телах с моментными напряжениями//ПМТФ. 1990. № 3. С. 160—167.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию 22.IX.1989