

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. Р. М. НАГОРНАЯ, В. А. ЦВАНГ, В. П. ШЕВЧЕНКО

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Фундаментальные решения служат аппаратом для решения граничных задач теории тонких оболочек, а также представляют самостоятельный интерес как решения задач о действии локальных нагрузок на оболочку.

Проблема построения таких решений в форме, приемлемой для дальнейшего использования в начально-краевых задачах, исследована недостаточно. Математические трудности их построения связаны с высоким порядком соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных и сложностью их структуры. В имеющихся на настоящее время работах [1, 2] решения представлены в виде кратных интегралов. Кроме того результаты относятся к цилиндрическим оболочкам.

В публикуемой работе рассматриваются пологие изотропные оболочки произвольной отрицательной гауссовой кривизны:

1. Исследования будем проводить в рамках уравнений классической теории оболочек [3], где инерция учтена в нормальном к срединной поверхности оболочки направлении

$$\begin{aligned} & \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_1 + \frac{Eh}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_2 + \frac{Eh}{1-\nu^2} (K_1 + \nu K_2) \frac{\partial}{\partial x} u_3 = -F_1 \\ & \frac{Eh}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_1 + \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_2 + \frac{Eh}{1-\nu^2} (K_2 + \nu K_1) \frac{\partial}{\partial y} u_3 = -F_2 \\ & \frac{Eh}{1-\nu^2} (K_1 + \nu K_2) \frac{\partial}{\partial x} u_1 + \frac{Eh}{1-\nu^2} (K_2 + \nu K_1) \frac{\partial}{\partial y} u_2 + \\ & + \left[D \left(\nabla^2 \nabla^2 + \frac{12}{h^2} (K_1^2 + \nu K_1 K_2 + K_2^2) \right) + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u_3 = F_3 \end{aligned} \quad (1)$$

$$D = Eh^3 (12(1-\nu^2))^{-1}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Здесь $u_j = u_j(x, y, t)$ ($j = 1, 2, 3$) — компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки в направлении координатных осей X, Y, Z ; $F_i = F_i(x, y, t)$ ($i = 1, 2, 3$) — компоненты вектора внешней силовой нагрузки; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; K_1, K_2 — главные кривизны; h — толщина оболочки; ρ — массовая плотность материала; t — время.

Решения $u_j^{(l)}$ ($l = 1, 2, 3$) системы (1), соответствующие нагрузкам $F^{(l)}$ с компонентами $\delta^{\mu\nu} \delta(x, y) \delta(t) \delta^{\mu\nu}$ — символ Кронекера, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака, а также внутренние силовые величины $T_1^{(l)}, T_2^{(l)}, S^{(l)}, M_1^{(l)}, M_2^{(l)}, H^{(l)}, Q_1^{(l)}, Q_2^{(l)}$, возникающие в оболочке под действием данных нагрузок, образуют тензор фундаментальных решений (тензор Грина [4]).

Для построения фундаментальных решений системы (1) используем метод интегральных преобразований. Применим к (1) последовательно двумерное ин-

тегральное преобразование Фурье F по геометрическим координатам и преобразование Лапласа L по времени при нулевых начальных условиях, используя формулы

$$F[f(x, y)] = \bar{f}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy \quad (2)$$

$$L[g(t)] = \bar{g}(p) = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt \quad (3)$$

Полученную в результате систему алгебраических уравнений разрешим относительно трансформант Фурье — Лапласа $\bar{u}_i^{(l)} = \bar{u}_i^{(l)}(\xi, \eta, p)$ перемещений. Приведем их выражения

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^{(1)} &= \frac{1}{2\pi E h K^2} \left[2(1+\nu) \frac{\eta^2 + \xi^2(1-\nu)/2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} + \frac{\xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \frac{\Delta_1^2}{\Delta} \right] \\ \bar{u}_2 &= \bar{u}_1^{(2)} = \frac{1}{2\pi E h K^2} \left[-(1+\nu)^2 \frac{\xi\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2} + \frac{\xi\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Delta} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\bar{u}_3^{(1)} = -\bar{u}_1^{(3)} = \frac{1}{2\pi E h K_2 K} \frac{i\xi\Delta_1}{\Delta}, \quad \bar{u}_3^{(2)} = -\bar{u}_2^{(3)} = \frac{1}{2\pi E h K_2 K} \frac{i\eta\Delta_2}{\Delta}$$

$$\bar{u}_3^{(3)} = \frac{1}{2\pi D K^4} \left[2(1+\nu) \frac{\xi^2 + \eta^2(1-\nu)/2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} + \frac{\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \frac{\Delta_2^2}{\Delta} \right]$$

$$\bar{u}_2^2 = \frac{1}{2\pi E h K^2} \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2}{\Delta}$$

$$\Delta_1 = (\lambda + \nu) \xi^2 + (2\lambda + \lambda\nu - 1) \eta^2, \quad \Delta_2 = (2 + \nu - \lambda) \xi^2 + (1 + \lambda\nu) \eta^2$$

$$\Delta = (\xi^2 + \eta^2)^4 + (\xi^2 + \lambda\eta^2)^2 + p^2 (\xi^2 + \eta^2)^2, \quad K^4 = 12(1-\nu^2) K_2^3 h^{-2}, \quad \lambda = K_1/K_2$$

Выражения для трансформант внутренних силовых величин могут быть получены применением формул (2), (3) интегральных преобразований Фурье и Лапласа к соотношениям упругости и подстановкой в них $\bar{u}_i^{(l)}$ из (4).

Например при $l=3$ имеем

$$\bar{T}_1^{(3)} = \frac{1}{2\pi K_2} \frac{\eta^2 (\xi^2 + \lambda\eta^2)}{\Delta}, \quad \bar{T}_2^{(3)} = \frac{1}{2\pi K_2} \frac{\xi^2 (\xi^2 + \lambda\eta^2)}{\Delta}$$

$$\bar{S}^{(3)} = -\frac{1}{2\pi K_2} \frac{\xi\eta (\xi^2 + \lambda\eta^2)}{\Delta}, \quad \bar{H}^{(3)} = \frac{1-\nu}{2\pi K^2} \frac{\xi\eta (\xi^2 + \lambda\eta^2)^2}{\Delta}$$

$$\bar{M}_1^3 = \frac{1}{2\pi K^2} \frac{(\xi^2 + \nu\eta^2)(\xi^2 + \eta^2)^2}{\Delta}, \quad \bar{M}_2^3 = \frac{1}{2\pi K^2} \frac{(\eta^2 + \nu\xi^2)(\xi^2 + \eta^2)^2}{\Delta} \quad (5)$$

Методику обращения трансформант составляющих тензора Грина рассмотрим на примере получения функции $\bar{u}_3^{(3)}$ прогиба оболочки под действием нагрузки $F^{(3)}$.

Применим к выражению $\bar{u}_3^{(3)}$ из (4) формулы обратных преобразований Фурье и Лапласа

$$u_3^{(3)}(x, y, t) = F^{-1} [L^{-1} [\bar{u}_3^{(3)}(\xi, \eta, p)]] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}_3^{(3)}(\xi, \eta, p) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \right] e^{pt} dp$$

Переходя к полярным координатам в обоих пространствах и используя теорему Эффроса [5], получим

$$u_3^{(3)} = \frac{1}{2\pi (D\rho h)^{1/2}} w^{(3)}(r, \varphi, t)$$

$$w^{(3)}(r, \varphi, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^t J_0 [(\cos^2 \vartheta + \lambda \sin^2 \vartheta) (t^2 - u^2)^{1/2}] \cos(R^2 u) \times \\ \times \cos(Rr \cos \vartheta \cos \varphi) \cos(Rr \sin \vartheta \sin \varphi) R du d\vartheta dR$$

где $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка.

Пользуясь разложением выражения $\cos(Rr \cos \vartheta \cos \varphi) \cos(Rr \sin \vartheta \sin \varphi)$ в ряд Неймана [6], а также представлением функции Бесселя в виде степенного ряда, будем иметь

$$w^{(3)}(r, \varphi, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{[(2k)!!]^2} U_{3nk}^2(\lambda) \times \\ \times \int_0^{+\infty} \int_0^t (t^2 - u^2)^k \cos(R^2 u) du J_{2n}(Rr) R dR \quad (6)$$

$$U_{3nk}^2(\lambda) = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \vartheta + \lambda \sin^2 \vartheta)^{2k} \cos(2n\vartheta) d\vartheta, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n \neq 0 \end{cases}$$

Вычислив интегралы в выражении (6), окончательно запишем функцию прогиба оболочки в виде

$$w^{(3)}(r, \varphi, t) = \frac{1}{2\pi^{1/2}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} U_{3nk}^{(3)}(\lambda) \times \\ \times \Phi\left(k, n+1, \frac{n+1}{2}; t; -\frac{r^4}{64t^2}\right) \quad (7)$$

$$\Phi\left(k, \alpha, \beta; t; -\frac{z}{4}\right) = \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\alpha-2\beta} (4z)^{(\alpha-1)/2} \times \\ \times \left\{ \Gamma\left[\begin{matrix} \beta \\ k - \beta + \frac{3}{2}, 2\alpha - 1 \end{matrix}\right] {}_2F_3\left(-k + \beta - \frac{1}{2}, \beta; \frac{1}{2}, \alpha - \frac{1}{2}, \alpha; -\frac{z}{4}\right) - \right. \\ \left. - 2z^{1/2} \Gamma\left[\begin{matrix} \beta + \frac{1}{2} \\ k - \beta + 1, 2\alpha \end{matrix}\right] {}_2F_3\left(-k + \beta, \beta + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \alpha, \alpha + \frac{1}{2}; -\frac{z}{4}\right) \right\},$$

$$\Gamma\left[\begin{matrix} a \\ b, c \end{matrix}\right] = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)\Gamma(c)} \quad (8)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, ${}_2F_3(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2, \beta_3; -z)$ — обобщенная гипергеометрическая функция [6].

Следуя описанной методике, можно получить выражения для остальных ком-

понент тензора Грина, аналогичные (7). В частности для трансформант (5) имеем следующие оригиналы

$$\left\{ \begin{matrix} T_1^{(3)} \\ T_2^{(3)} \end{matrix} \right\} = \frac{K^4}{4\pi K_2} \left(\frac{D}{\pi \rho h} \right)^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ \begin{matrix} T_{1nk}^{(3)}(\lambda) \\ T_{2nk}^{(3)}(\lambda) \end{matrix} \right\} \times \\ \times \Phi \left(k, n+1, \frac{n+1}{2}; t; -\frac{r^4}{64t^2} \right)$$

$$S^{(3)} = -\frac{K^4}{4\pi K_2} \left(\frac{D}{\pi \rho h} \right)^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon_n \sin(2n\varphi) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} S_{nk}^{(3)}(\lambda) \times \\ \times \Phi \left(k, n+1, \frac{n+1}{2}; t; -\frac{r^4}{64t^2} \right)$$

$$\left\{ \begin{matrix} M_1^{(3)} \\ M_2^{(3)} \end{matrix} \right\} = \frac{K^2}{4\pi} \left(\frac{D}{\pi \rho h} \right)^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ \begin{matrix} M_{1nk}^{(3)}(\lambda) \\ M_{2nk}^{(3)}(\lambda) \end{matrix} \right\} \times \\ \times \Phi \left(k, n+1, \frac{n+2}{2}; t; -\frac{r^4}{64t^2} \right)$$

$$H^{(3)} = \frac{(1-\nu)K^2}{4\pi} \left(\frac{D}{\pi \rho h} \right)^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \varepsilon_n \sin(2n\varphi) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} H_{nk}^{(3)}(\lambda) \times \\ \times \Phi \left(k, n+1, \frac{n+2}{2}; t; -\frac{r^4}{64t^2} \right) \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{matrix} T_{1nk}^{(3)}(\lambda) \\ T_{2nk}^{(3)}(\lambda) \end{matrix} \right\} = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \vartheta + \lambda \sin^2 \vartheta)^{2k+1} \cos(2n\vartheta) \left\{ \begin{matrix} \sin^2 \vartheta \\ \cos^2 \vartheta \end{matrix} \right\} d\vartheta$$

$$S_{nk}^{(3)}(\lambda) = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \vartheta + \lambda \sin^2 \vartheta)^{2k+1} \sin(2n\vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta$$

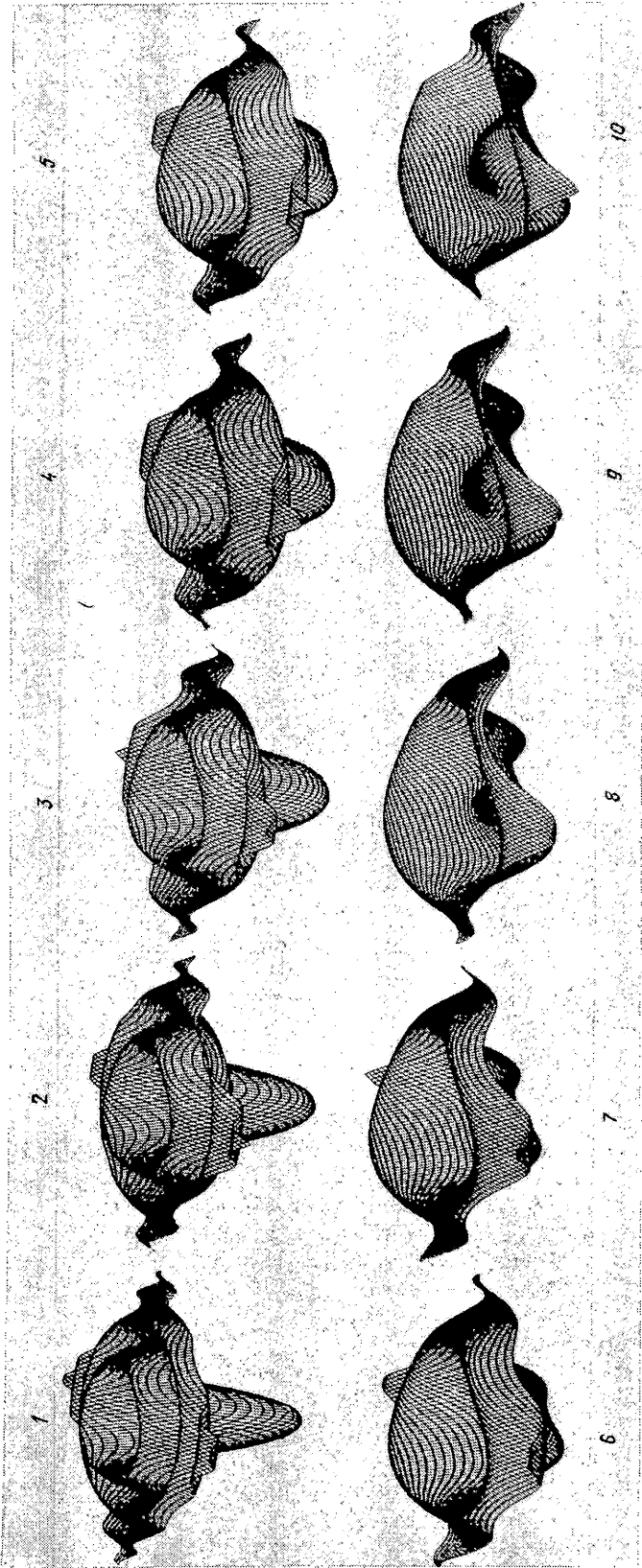
$$\left\{ \begin{matrix} M_{1nk}^{(3)}(\lambda) \\ M_{2nk}^{(3)}(\lambda) \end{matrix} \right\} = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \vartheta + \lambda \sin^2 \vartheta)^{2k} \cos(2n\vartheta) \left\{ \begin{matrix} \cos^2 \vartheta + \nu \sin^2 \vartheta \\ \sin^2 \vartheta + \nu \cos^2 \vartheta \end{matrix} \right\} d\vartheta$$

$$H_{nk}^{(3)}(\lambda) = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \vartheta + \lambda \sin^2 \vartheta)^{2k} \sin(2n\vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta$$

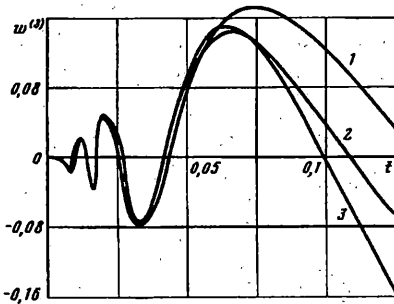
Представление компонент тензора Грина в виде (7), (9), позволяет получать для них асимптотические формулы в начальные моменты времени. Например

$$w^{(3)}(r, \varphi, t) \approx \frac{2t}{r^2} \cos\left(\frac{r^2}{4t}\right) + 2\left(\frac{2t}{r^2}\right)^2 \sin\left(\frac{r^2}{4t}\right) - 3\left(\frac{2t}{r^2}\right)^3 \cos\left(\frac{r^2}{4t}\right) + \\ + t^2 \frac{2t}{r^2} \left\{ \cos(2\varphi) \frac{1-\lambda^2}{12} - \cos(4\varphi) \frac{(1-\lambda)^2}{24} \right\} \quad (10)$$

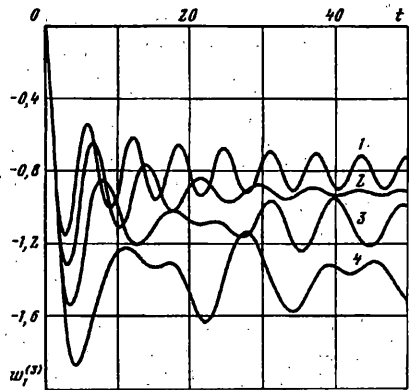
2. Полученные результаты могут быть использованы для исследования напряженно-деформированного состояния оболочек произвольной кривизны под действием локальных нагрузок.



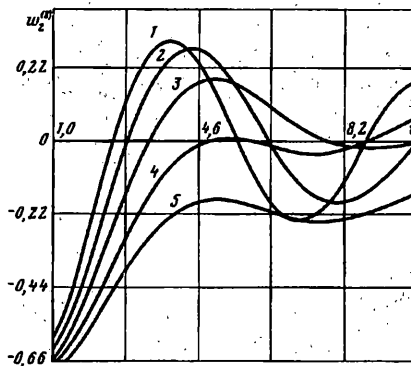
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

2.1. Сосредоточенные динамические нагрузки. Рассмотренные выше нагрузки $F^{(i)}$ имеют смысл сосредоточенных сил, действующих в направлении координатных осей X, Y, Z . Например, $F^{(3)}$ — сосредоточенная сила, нормальная к срединной поверхности оболочки.

Ниже приведены результаты численных исследований нормального прогиба оболочки для случая сосредоточенной силы $F^{(3)}$, полученные на основании формул (7), (10).

На фиг. 1 показаны изображения формы прогиба $w^{(3)}(r, \varphi, t)$ срединной поверхности оболочки двойкой кривизны ($\lambda = 0,5$) для десяти последовательных моментов времени $t = 1; 1,25; 1,5; 1,75; 2; 2,25; 2,5; 3; 3,25; 3,5$ ($t = 1$ соответствует 100 мкс). При этом наблюдается характерная для задач о сосредоточенных воздействиях локальность деформированного состояния и несимметрия формы прогиба относительно точки приложения нагрузки, связанная с различием радиусов R_1, R_2 кривизны оболочки в направлении координатных осей.

При исследовании напряженно-деформированного состояния оболочек в начальные моменты времени удобно использовать простые асимптотические формулы типа (10). В связи с этим возникает вопрос об определении границ временного интервала применимости таких формул вместо численных результатов.

На фиг. 2 изображена зависимость нормального прогиба оболочки $w^{(3)}(r, \varphi, t)$ от параметра времени t ($\lambda = 0,75, r = 1, \varphi = 0$). Кривая 1, построенная по первому члену формулы (10), соответствует первому пластиночному приближению, кривая 2 дает первое оболочечное приближение, кривая 3 получена по формуле (7). Из графиков на фиг. 2 видно, что на интервале $t < 0,1$ для вычисления $w^{(3)}$ применима формула (10).

На фиг. 3 показана зависимость нормального прогиба оболочки $w_2^{(3)}(0, 0, t)$ от параметра времени t при действии нормальной сосредоточенной импульсной нагрузки $\Psi_3 = -\delta(x, y) H(t)$ для различных значений параметра кривизны λ ($H(t)$ — единичная функция Хевисайда). Результаты получены путем интегрирования формулы (7) по времени. Кривые 1—4 на фиг. 3 соответствуют значениям λ равным 1; 0,75; 0,5; 0,25. С увеличением времени значения прогиба стремятся к соответствующим для сосредоточенного статического нагружения.

2.2. Локальные динамические нагрузки. Пусть внешняя нагрузка Φ_3 , нормальная к срединной поверхности оболочки, распределена по круговой площадке радиуса R_0 по степенному закону

$$\Phi_3(x, y, t) = \begin{cases} -\frac{1+\mu}{\pi R_0^2} \left(1 - \frac{x^2+y^2}{R_0^2}\right)^\mu \delta(t), & x^2+y^2 \leq R_0^2 \\ 0, & x^2+y^2 > R_0^2 \end{cases}$$

где μ — плотность распределения нагрузки.

Тогда выражения для компонент тензора Грина определяются формулой свертки [7]. Например

$$w_2^{(3)}(r, \varphi, t) = -\frac{1}{R_0^{2(\mu+1)}} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} w^{(3)}(r_1, \varphi_1, t) [R_0^2 - (r_1^2 - 2r_1r \cos(\varphi_1 - \varphi) + r^2)]^\mu r_1 dr_1 d\varphi_1$$

Таким образом, нахождение выражений для компонент напряженно-деформированного состояния оболочки сводится к интегрированию полученных фундаментальных решений по круговой площадке радиуса R_0 .

Особенно простой вид формулы для составляющих тензора Грина приобретает в центре площадки нагружения. Для прогиба оболочки в данном случае имеем

$$w_2^{(3)}(t) = -\frac{\Gamma(\mu+2)}{2\pi^{\mu/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} U_{30k}^{(3)}(\lambda) \left(\frac{t}{2}\right)^{-(\mu+1)/2} \left(\frac{R_0^2}{2t}\right)^{-(\mu+1)/2} \times \\ \times \Phi\left(k, 1 + \frac{\mu+1}{2}, \frac{1}{2}; t; -\frac{R_0^4}{64t^2}\right) \quad (11)$$

На основании (11) проведены численные исследования $w_2^{(3)}(t)$ при различных значениях радиуса площадки нагружения. Установлено, что с уменьшением размеров площадки нагружения, значения $w_2^{(3)}$ стремятся к соответствующим для сосредоточенной нагрузки.

Зависимость $w_2^{(3)}$ от времени для оболочек с различным отношением радиусов кривизны показана на фиг. 4. Кривые 1—5 построены при $\mu = 1$, $R_0 = 1$ и соответствуют значениям $\lambda = 1; 0,75; 0,5; 0,25; 0$. Из графиков видно, что для всех моментов времени абсолютная величина прогиба цилиндрической оболочки больше, чем у оболочек других рассмотренных кривизн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агафонов А. В. Действие внезапно приложенной сосредоточенной силы на цилиндрическую оболочку // Изв. АН СССР. МТТ. 1965. № 1. С. 148—150.
2. Колодяжный А. В., Скоблик И. И. Локальное импульсное неосесимметричное деформирование упругой цилиндрической оболочки // Проблемы машиностр. 1987. № 28. С. 3—6.

3. *Власов В. З.* Избранные труды. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 528с.
4. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280с.
5. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 542с.
6. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750с.
7. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518с.

Донецк

Поступила в редакцию
16.XII.1991