

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. Г. И. МИХАСЁВ

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В НЕКРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Вопрос о возможных формах малых колебаний цилиндрической оболочки, обусловленных заданием некоторых начальных условий, рассмотрен в [1]. В частности установлено, что при выборе начального прогиба в виде изолированной волны и определенном распределении начальных скоростей возможна реализация режима изгибных волн, бегущих в окружном направлении. Ниже исследуется линейная задача о динамическом поведении тонкой упругой некруговой цилиндрической оболочки в случае, когда начальные прогиб и скорости являются функциями, быстро осциллирующими и затухающими вдали от некоторой образующей на поверхности оболочки. С использованием комплексного ВКБ — метода [2] построено асимптотическое решение уравнений движения в виде бесконечной суммы локализованных семейств (волновых пакетов) бегущих в окружном направлении изгибных волн. Проводится качественный анализ построенных решений.

1. Введем на срединной поверхности некруговой цилиндрической оболочки толщиной h и длиной L ортогональную систему координат, s , φ , где s — продольная координата, φ — координата на направляющей, выбираемая таким образом, чтобы первая квадратичная форма поверхности имела вид $d\sigma^2 = R^2(ds^2 + d\varphi^2)$. При этом радиус кривизны $R_2 = R/k(\varphi)$, где R — характерный размер срединной поверхности, который будет введен ниже, $k(\varphi)$ — дважды дифференцируемая по φ функция. Пусть оболочка ограничена двумя краями и не обязательно замкнута в направлении φ ($0 \leq s \leq l = L/R$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$).

В предположении о большой изменчивости волн в направлении круговой координаты φ , используем систему уравнений [1], записанную в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \Delta^2 W + k(\varphi) \partial^2 \Phi / \partial s^2 + \varepsilon^2 \partial^2 W / \partial t^2 &= 0 \\ \varepsilon^4 \Delta^2 \Phi - k(\varphi) \partial^2 W / \partial s^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \varepsilon^8 = \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)}, \quad t = \frac{t_*}{T_*}$$

$$W = \varepsilon^4 W_* R^{-1}, \quad \Phi = \Phi_* \varepsilon^{-4} E^{-1} h^{-1}, \quad T_*^2 = \rho R^2 \varepsilon^{-6} E^{-1}$$

где W_* , Φ_* — нормальный прогиб и функция напряженной, t_* — время, ρ — плотность материала, $0 < \varepsilon$ — естественный малый параметр, E , ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, T_* — характерное время.

Поставим задачу о распространении на поверхности оболочки в окружном направлении узкого волнового пакета. Пусть при $t = 0$ функция $W(s, \varphi, t, \varepsilon)$ удовлетворяет начальным условиям

$$W|_{t=0} = w_0(s, \varphi, \varepsilon) \exp[i\varepsilon^{-1} S_0(\varphi)], \quad \partial W / \partial t|_{t=0} = i\varepsilon^{-1} v_0(s, \varphi, \varepsilon) \exp[i\varepsilon^{-1} S_0(\varphi)] \quad (1.2)$$

где $w_0(s, \varphi, \varepsilon)$, $v_0(s, \varphi, \varepsilon)$ — вещественные, а $S_0(\varphi)$ — комплексная достаточное число раз дифференцируемые по φ и s функции, такие что

$$\frac{\partial w_0}{\partial \varphi}, \frac{\partial w_0}{\partial s}, \frac{\partial v_0}{\partial \varphi}, \frac{\partial v_0}{\partial s} \sim 1 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

$$\text{Im } S_0(0) = 0, \text{Im } S_0(\varphi) > 0, \varphi \neq 0 \quad (1.4)$$

Функцию $W_0 = w_0 \exp(i\varepsilon^{-1}S_0)$ будем называть начальным волновым пакетом. Как видно из (1.2), (1.4), он имеет максимум на образующей $\varphi = 0$. При удалении от этой образующей амплитуда волн пакета убывает. В качестве R примем значение радиуса кривизны R_2 на образующей $\varphi = 0$, так что $k(0) = 1$.

На краях $s = 0, s = l$ оболочки рассмотрим одну из двух групп граничных условий — группу шарнирного опирания или группу жесткой заделки. Каждая из этих групп включает по шесть вариантов граничных условий, приведенных в [3]. Напряженное состояние оболочки состоит из основного напряженного состояния и интегралов краевого эффекта [4]. Для исследования основного напряженного состояния на каждом краю $s = 0, s = l$ следует удовлетворить лишь двум главным условиям. С точностью до величин порядка ε^2 эти условия имеют вид [5]:

$$W = \partial^2 W / \partial s^2 = 0, W = \partial W / \partial s = 0 \quad (1.5)$$

для групп шарнирного опирания и жесткой заделки соответственно.

2. Обозначим через $z_1(s), z_2(s), \dots$ бесконечную нормированную систему собственных функций краевой задачи (1.5) для уравнения $d^4 z / ds^4 - \lambda z = 0$, а через $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — соответствующую им систему собственных значений. Функции $z_n(s)$ образуют полную ортогональную систему [6]. Пусть w_0, v_0 , входящие в начальные условия (1.2), удовлетворяют одному из рассматриваемых вариантов граничных условий (1.5). Тогда для любого φ из промежутка $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ функции w_0 и v_0 допускают разложение по системе собственных функций z_n ($n = 1, 2, \dots$) в равномерно сходящиеся ряды [6]:

$$w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(\varphi, \varepsilon) z_n(s), \quad \eta_n = \int_0^l w_0 z_n ds \quad (2.1)$$

$$v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(\varphi, \varepsilon) z_n(s), \quad \zeta_n = \int_0^l v_0 z_n ds$$

на отрезке $0 \leq s \leq l$.

Представим решение задачи (1.1), (1.2), (1.5) в виде ряда

$$W(s, \varphi, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\varphi, t, \varepsilon) z_n(s) \quad (2.2)$$

В силу (1.3), функции w_0, v_0 имеют небольшую изменчивость в направлении координаты s . Тогда η_n, ζ_n в (2.1) малы при больших значениях n и в (2.2) при практических расчетах можно ограничиться конечным числом слагаемых.

Подставим (2.2) в (1.1), предварительно исключив Φ . Принимая во внимание ортогональность функций $z_n(s)$ на отрезке $0 \leq s \leq l$, получим последовательность уравнений

$$\varepsilon^8 \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial^4 U_n}{\partial \varphi^4} \right) + \varepsilon^6 \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} \right) + \lambda_n k U_n = 0 \quad (2.3)$$

относительно $U_n(\varphi, t, \varepsilon)$, где $n = 1, 2, \dots$

Соответствующие им начальные условия примут вид

$$U_n|_{t=0} = \eta_n(\varphi, \varepsilon) \exp [i\varepsilon^{-1}S_0(\varphi)] \quad (2.4)$$

$$\partial U_n / \partial t|_{t=0} = i\varepsilon^{-1}\zeta_n(\varphi, \varepsilon) \exp [i\varepsilon^{-1}S_0(\varphi)] \quad (2.5)$$

Ниже, при построении решения задачи Коши (2.4), (2.5) для уравнения (2.3), индекс n в U_n , λ_n , η_n , ζ_n будем опускать.

3. Введем функции $\eta^+(\varphi, \varepsilon)$, $\eta^-(\varphi, \varepsilon)$, удовлетворяющие условию (1.3) и равенству

$$\eta^+(\varphi, \varepsilon) + \eta^-(\varphi, \varepsilon) = \eta(\varphi, \varepsilon) \quad (3.1)$$

Рассмотрим вспомогательные начальные условия

$$\begin{aligned} U|_{t=0} &= \eta^+(\varphi, \varepsilon) \exp [i\varepsilon^{-1}S_0(\varphi)], \quad \partial U / \partial t|_{t=0} = \\ &= i\varepsilon^{-1}H(D^1, \varphi^2) \eta^+(\varphi, \varepsilon) \exp [i\varepsilon^{-1}S_0(\varphi)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} U|_{t=0} &= \eta^-(\varphi, \varepsilon) \exp [i\varepsilon^{-1}S_0(\varphi)], \quad \partial U / \partial t|_{t=0} = \\ &= i\varepsilon^{-1}H(D^1, \varphi^2) \eta^-(\varphi, \varepsilon) \exp [i\varepsilon^{-1}S_0(\varphi)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $D = -i\varepsilon d/d\varphi$, $H(D^1, \varphi^2)$ — псевдодифференциальный оператор с символом

$$H(p, \varphi) = \sqrt{p^4 + \lambda \kappa^2(\varphi) p^{-4}} \quad (3.4)$$

действующий по формуле [7]:

$$H(D^1, \varphi^2) f(\varphi) = F_{p \rightarrow \varphi}^{-1} [H(p, \varphi) F_{\varphi \rightarrow p} f(\varphi)] \quad (3.5)$$

Здесь $F_{\varphi \rightarrow p}$, $F_{p \rightarrow \varphi}^{-1}$ — прямое и обратное преобразования Фурье, цифры 1 и 2 в $H(D^1, \varphi^2)$ указывают на порядок действия операторов D и φ , $H(p, \varphi)$ — функция вещественной переменной φ и комплексной переменной p , определенная везде кроме $p = 0$.

4. Полагая функции $\eta^\pm(\varphi, \varepsilon)$ известными, будем искать решения уравнения (2.3) с начальными условиями (3.2), (3.3) в виде волнового пакета [2]:

$$U(\varphi, t, \varepsilon) = u(\varphi, t, \varepsilon) \exp [i\varepsilon^{-1}S(\varphi, t)] \quad (4.1)$$

где S , u — неизвестные функции, такие что

$$\partial u / \partial \varphi = O(1) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{Im } S(\varphi, t) \geq 0 \quad (4.2)$$

Последнее неравенство гарантирует затухание амплитуды волн в пределах пакета.

Предположим

$$\partial S / \partial \varphi \neq 0 \quad (4.3)$$

в области $\Omega = \{\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, 0 \leq t \leq T < +\infty\}$. Подставляя (4.1) в (2.3), (3.2), (3.3), получим каноническую систему уравнений относительно функций S , u :

$$S_t \pm H(S_\varphi, \varphi) = 0 \quad (4.4)$$

$$S|_{t=0} = S_0(\varphi) \quad (4.5)$$

$$u_t \pm \Pi u + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (4.6)$$

$$u|_{t=0} = \eta^\pm(\varphi, \varepsilon) \quad (4.7)$$

$$P = H_p(S_\varphi, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} H_{pp}(S_\varphi, \varphi) S_{\varphi\varphi} + G(\varphi, t)$$

$$G(\varphi, t) = \left[k \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \right) \frac{p^4 - H^2}{2pH} - 4p^{-1} H_\varphi - \frac{1}{2} H^{-1} H_p H_\varphi \right] \Big|_{p=S_\varphi}$$

где индексы t, φ, p означают дифференцирование по соответствующей переменной, а знаки (+) и (-) отвечают начальным условиям (3.2) и (3.3) соответственно.

5. Уравнение (4.4) является нелинейным и не допускает точного решения. Введем вспомогательные понятия, необходимые для конструкции приближенного решения канонической системы (4.4) — (4.7).

Пусть $f(\varphi) \geq 0, g(\varphi)$ — гладкие по φ функции. Будем писать [2] $g = O_f(\varepsilon^m)$, если

$$\partial^\alpha g / \partial \varphi^\alpha e^{-f/\varepsilon} = O(\varepsilon^{m-\alpha/2}) \quad (5.1)$$

при $m - \alpha/2 \geq 0$ на любом компактном множестве действительных чисел.

Пример. $x^m = O_x(\varepsilon^{m/2})$, где $0 \leq m$ — целое число.

6. Обозначим через $P^\pm(t), Q^\pm(t)$ решения системы Гамильтона

$$p' = \mp H_q(p, q), \quad q' = \pm H_p(p, q), \quad p|_{t=0} = \frac{dS_0}{d\varphi}(0), \quad q|_{t=0} = 0 \quad (6.1)$$

а через $B^\pm(t), C^\pm(t)$ решение системы в вариациях

$$B' = \mp H_{qp} B \mp H_{qq} C, \quad C' = \pm H_{pp} B \pm H_{pq} C$$

$$B|_{t=0} = \frac{dS_0}{d\varphi^2}(0), \quad C|_{t=0} = 1 \quad (6.2)$$

где вторые производные функции $H(p, q)$ вычисляются при $p = P^\pm(t), q = Q^\pm(t)$.

Тогда при всех $0 \leq t \leq T$ и $C^\pm(t) \neq 0$ существует приближенное, с точностью до функций $O_{S_2}(\varepsilon^2)$, решение уравнения (4.4), определяемое формулой (по теореме 2.1 на стр. 46 [2]):

$$S^\pm = S_0(0) + \int_0^t \left\{ P^\pm(\tau) \frac{dQ^\pm(\tau)}{d\tau} \mp H[P^\pm(\tau), Q^\pm(\tau)] \right\} d\tau + \\ + P^\pm(t) [\varphi - Q^\pm(t)] + 1/2 B^\pm(t) [\varphi - Q^\pm(t)]^2 / C^\pm(t) \quad (6.3)$$

удовлетворяющее неравенству (4.2) в области Ω и начальному условию (4.5) с точностью до $O_{S_2}(\varepsilon^2)$. Здесь $S_2 = \text{Im } S^\pm, S_{02} = \text{Im } S_0$.

Из (1.4), (6.3) следует, что требование (4.3) выполняется, если $d \text{Re } S_0 / d\varphi \neq 0$ при $\varphi = 0$.

Пусть $\eta^\pm(\varphi, \varepsilon) = O_{S_2}(\varepsilon^N)$, где $0 \leq N$ — целое число. Тогда (по теореме 3.1 на стр. 93 [2]) на отрезке $0 \leq t \leq T$ функция

$$u^\pm = \exp \int_0^t \Psi^\pm(\tau) d\tau \frac{1}{N!} \frac{\partial^N \eta^\pm}{\partial \varphi^N}(0, \varepsilon) \frac{[\varphi - Q^\pm(t)]^N}{[C^\pm(t)]^{N+1/2}} \quad (6.4)$$

где $\Psi^\pm = \pm 1/2 H_{pp}[P^\pm(\tau), Q^\pm(\tau)] \mp G[Q^\pm(\tau), \tau]$ является приближенным решением задачи Коши (4.6), (4.7), удовлетворяющим уравнению (4.6) и начальному условию (4.7) с точностью до $O_{S_2}[\varepsilon^1]$ и $O_{S_2}[\varepsilon^1]$ соответственно ($\gamma = 1/2(N+1)$).

7. Рассмотрим функцию

$$U(\varphi, t, \varepsilon) = u^+ \exp(i\varepsilon^{-1}S^+) + u^- \exp(i\varepsilon^{-1}S^-) \quad (7.1)$$

которая является приближенным решением уравнения (2.3) и удовлетворяет, в силу (3.1)—(3.3), начальному условию (2.4). Второму условию (2.5) можно удовлетворить подобрав соответствующим образом функции $\eta^+(\varphi, \varepsilon)$, $\eta^-(\varphi, \varepsilon)$. Подставим (7.1) в (2.5), при этом примем во внимание (4.4)—(4.7), а также учтем погрешность, с которой были найдены функции $S^\pm(\varphi, t)$, $u^\pm(\varphi, t, \varepsilon)$ в классе $O_\varepsilon(\varepsilon^m)$. В результате получим уравнение

$$\sum^\pm [-H^\pm + O_{S_m}(\varepsilon^N)] [\eta^\pm + O_{S_m}(\varepsilon^N)] + i\varepsilon \sum^\pm \{ H_p^\pm [\eta^\pm + O_{S_m}(\varepsilon^{N/2})] + \frac{1}{2} H_{pp}^\pm \frac{\partial^2 S_0}{\partial \varphi^2} [\eta^\pm + O_{S_m}(\varepsilon^N)] + G^\pm [\eta^\pm + O_{S_m}(\varepsilon^N)] \} = \zeta \quad (7.2)$$

для определения $\eta^\pm(\varphi, \varepsilon)$. Здесь $H^+ = H$, $H^- = -H$, функции H , H_p , H_{pp} вычисляются при $p = dS_0/d\varphi$, символ \sum^\pm означает суммирование стоящего за ним выражения со знаками (+) и (—) соответственно.

Пусть $\eta(\varphi, \varepsilon) = O_{S_m}(\varepsilon^K)$, $\zeta(\varphi, \varepsilon) = O_{S_m}(\varepsilon^M)$, где $0 \leq K$, $0 \leq M$ — целые числа. Будем искать η^\pm в классе функций $O_{S_m}(\varepsilon^N)$. Из (3.1) следует, что $N \leq K$. Используя свойства функций класса $O_\varepsilon(\varepsilon^m)$ [2], нетрудно заметить, что в фигурных скобках стоят функции порядка $O_{S_m}(\varepsilon^\alpha)$, где $\alpha \geq N + 1$, а значит при определении η^\pm в классе $O_{S_m}(\varepsilon^N)$ в расчет могут не приниматься. Отсюда

$$\eta^\pm = 1/2 \eta + O_{S_m}(\varepsilon^N) \text{ при } M > K$$

$$\eta^\pm = 1/2 (\eta \mp \zeta/H) + O_{S_m}(\varepsilon^N) \text{ при } M = K \quad (7.3)$$

$$\eta^\pm = \mp 1/2 \zeta/H + O_{S_m}(\varepsilon^N) \text{ при } M < K$$

Во всех случаях $N = \min \{K, M\}$.

Из способа построения функции (7.1) и определения (5.1) следует, что погрешность решения (7.1) уравнения (2.3) вычисляется по формуле $[O_{S_2}(\varepsilon^N) + \varepsilon O_{S_2}(\varepsilon^N)] \exp(-\varepsilon^{-1}S_2) = O(\varepsilon^N)$ и не зависит от числа N . Последний факт объясняется недостаточной степенью точности решения $S^\pm(\varphi, t)$ уравнения (4.4).

8. Пусть S_n^\pm , u_n^\pm определяются по формулам (6.3), (6.4), где η_n^\pm берется из (7.2). Индекс n здесь указывает на то, что рассматриваются решения канонической системы, соответствующие гамильтониану $H_n(p, \varphi) = [p^4 + \lambda_n k^2(\varphi) p^{-4}]^{1/2}$. Тогда функция

$$W(s, \varphi, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(s) \{ u_n^+(\varphi, t, \varepsilon) \exp[i\varepsilon^{-1}S_n^+(\varphi, t)] + u_n^-(\varphi, t, \varepsilon) \exp[i\varepsilon^{-1}S_n^-(\varphi, t)] \} \quad (8.1)$$

является приближенным, с точностью до $O(\varepsilon^N)$, решением задачи (1.1), (1.2), (1.5). Будем называть слагаемые со знаками (+) и (—) в (8.1) « n^+ -ым» и « n^- -ым» волновыми пакетами соответственно. Анализ формул (6.3), (6.4), (8.1) показывает, что при фиксированном t вне окрестности образующих $\varphi = Q_n^\pm(t)$ выполняется соотношение $|U_n| = O(\varepsilon^N)$, т. е. (—) волны в пределах каждого n^\pm -го пакетов сосредоточены вблизи образующих $\varphi = Q_n^\pm(t)$. Это говорит о том, что начальный волновой пакет ($t = 0$) при $t > 0$ разбивается на бесконечное множество n^\pm -ых

пакетов, которые двигаются в противоположных от образующей $\varphi = 0$ направлениях с групповыми скоростями $v_n^\pm(t) = dQ_n^\pm(t)/dt$. Ширина каждого пакета есть величина порядка $\varepsilon^{1/2}/\text{Im } J_n^\pm(t)$, где $J_n^\pm = B_n^\pm/C_n^\pm$. Число волн в пределах каждого пакета пропорционально $P_n^\pm(t)$.

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, положив $k = 1$, $\varphi_1 = -\pi$, $\varphi_2 = \pi$. В этом случае $H_n = H_n(p)$ и системы (6.1), (6.2) могут быть решены в явном виде:

$$P_n^\pm = \frac{dS_0}{d\varphi}(0), \quad Q_n^\pm(t) = \pm \frac{dH_n}{dp} \left[\frac{dS_0}{d\varphi}(0) \right] t$$

$$B_n^\pm = \frac{d^2 S_0}{d\varphi^2}(0), \quad C_n^\pm(t) = 1 \pm \frac{d^2 S_0}{d\varphi^2}(0) \frac{d^2 H_n}{dp^2} \left[\frac{dS_0}{d\varphi}(0) \right] t \quad (8.2)$$

Таким образом в круговой цилиндрической оболочке n^\pm -ые волновые пакеты двигаются с постоянной групповой скоростью

$$v_n^\pm = \pm \frac{dH_n}{dp} \left[\frac{dS_0}{d\varphi}(0) \right] = \pm \frac{2(a^8 - \lambda_n)}{a^3(a^8 + \lambda_n)^{1/2}}, \quad a = \frac{dS_0}{d\varphi}(0) \quad (8.3)$$

При $a = \lambda_n^{1/4}$ начальный n -ый пакет (2.4) не раздваивается, а расплывается. Если $a \rightarrow 0$ или $a \rightarrow +\infty$, то $|v_n^\pm| \rightarrow +\infty$. Однако в первом случае построенное решение становится непригодным, так как при $a = 0$ не выполняется условие (4.3). Неограниченность групповой скорости во втором случае является следствием дефекта (негиперболичности) исходных уравнений (1.1).

Из (8.3) следует, что самыми быстрыми являются первые (1^\pm) пакеты, ибо

$$\max_n |v_n^\pm| = |v_1^\pm| = 2(a^8 - \lambda_1)a^{-3}(a^8 + \lambda_1)^{-1/2}$$

Для замкнутой круговой цилиндрической оболочки решение (8.1) справедливо на конечном промежутке времени $0 \leq t \leq T$, где $T = \pi/|v_1^\pm|$ — время, через которое встречаются самые быстрые первые волновые пакеты.

Изучим динамику n -го волнового пакета в некруговой оболочке. Пусть $k'(\varphi) > 0$ при $0 \leq \varphi \leq \varphi_2 \leq +\infty$, $K_t = \sup k(\varphi)$ на множестве $0 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $c_0 = a^4 + \lambda_n a^{-4}$, где a — ранее введенный параметр. Анализ системы Гамильтона (6.1) показывает, что поведение волновых пакетов зависит от соотношения входящих в задачу параметров.

Если $\lambda_n < \delta_1 a^8$, где $\delta_1 = [2K_t^2 - 1 + 2K_t(K_t^2 - 1)^{1/2}]^{-1}$, то при любом $0 < t < t_2$ $v_n^+(t) > 0$, $dv_n^+(t)/dt < 0$, $dP_n^+(t)/dt < 0$, т. е. n^+ -ый волновой пакет движется вправо с уменьшением волнового числа P_n^+ и групповой скорости v_n^+ . Здесь t_2 — момент времени, когда $Q_n^+(t_2) = \varphi_2$. В случае $\varphi_2 = +\infty$ (неограниченная в положительном направлении φ цилиндрическая панель) имеем

$$P_{n\infty}^+ = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n^+(t) = 2^{-1/4} [c_0 + (c_0^2 - 4\lambda_n K_t^2)^{1/2}]^{1/4} \quad (8.4)$$

$$v_{n\infty}^+ = \lim_{t \rightarrow \infty} v_n^+(t) = 2^{3/4} c_0^{-1/2} (c_0^2 - 4\lambda_n K_t^2)^{1/2} [c_0 + (c_0^2 - 4\lambda_n K_t^2)^{1/2}]^{1/4}$$

Если $\lambda_n > \delta_2 a^8$, где $\delta_2 = [2K_t^2 - 1 - 2K_t(K_t^2 - 1)^{1/2}]^{-1}$, то для любого $0 < t < t_2$ $v_n^-(t) > 0$, $dv_n^-(t)/dt < 0$, $dP_n^-(t)/dt > 0$. При $\varphi_2 = +\infty$ получаем

$$P_{n\infty}^- = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n^-(t) = 2^{-1/4} [c_0 - (c_0^2 - 4\lambda_n K_t^2)^{1/2}]^{1/4} \quad (8.5)$$

$$v_{n\infty}^- = \lim_{t \rightarrow \infty} v_n^-(t) = 2^{3/4} c_0^{-1/2} (c_0^2 - 4\lambda_n K_t^2)^{1/2} [c_0 - (c_0^2 - 4\lambda_n K_t^2)^{1/2}]^{1/4}$$

В случае $\delta_1 a^8 \leq \lambda_n < a^8$ существует такое t_r ($0 < t_r < t_2$), что $v_n^+(t) > 0$, $dv_n^+(t)/dt < 0$, $dP_n^+(t)/dt < 0$ при $0 < t < t_r$, $v_n^+(t) = 0$ и $v_n^+(t) < 0$, $dv_n^+(t)/dt < 0$, $dP_n^+(t)/dt < 0$ при $t > t_r$, то есть в момент времени t_r происходит отражение n^+ -го волнового пакета от образующей $\varphi_r = Q_n^+(t_r)$, определяемой из уравнения $4\lambda_n k^2(\varphi) = c_0^2$.

При $a^8 < \lambda_n \leq \delta_2 a^8$ также найдется такое t_r , что $v_n^-(t) > 0$, $dv_n^-(t)/dt < 0$, $dP_n^-(t)/dt > 0$ при $0 < t < t_r$, $v_n^-(t) = 0$ и $v_n^-(t) < 0$, $dv_n^-(t)/dt < 0$, $dP_n^-(t)/dt > 0$ при $t > t_r$, что означает отражение n^- -го пакета от образующей $\varphi_r = Q_n^-(t_r)$ в момент времени t_r .

И наконец в случае $\lambda_n = a^8$ движение обоих n^\pm -ых пакетов в положительном направлении координаты φ является невозможным.

Пусть теперь $k'(\varphi) < 0$ при $\varphi > 0$, $K_l = \inf k(\varphi)$ на множестве $0 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Тогда при $0 < t < t_2$ по крайней мере один из n^\pm -ых пакетов движется вправо. Здесь при $\lambda_n \leq a^8$ получаем $dP_n(t)/dt > 0$, $dv_n(t)/dt > 0$, а при $\lambda_n > a^8$ $dP_n(t)/dt < 0$, $dv_n(t)/dt > 0$. Если $\varphi_2 = +\infty$, то в первом случае $P_{n\infty}$ и $v_{n\infty}$ вычисляются по формулам (8.4), а во втором — по формулам (8.5) с заменой K_r на K_l .

Особый интерес представляет случай наличия на поверхности оболочки «наиболее слабой» [8] образующей $\varphi = 0$, для которой $k'(0) = 0$, $k''(0) > 0$. В окрестности этой образующей, как известно [8, 9], могут локализоваться собственные формы низкочастотных колебаний некруговой цилиндрической оболочки с числом волн, пропорциональным параметру $a = \lambda_n^{1/4}$. Из анализа системы (6.1) следует, что если $a^8 = \lambda_n$, то здесь, как и для круговой оболочки, эффект раздвоения начального n -го волнового пакета отсутствует.

Из сказанного выше следует вывод: увеличение кривизны в некруговой цилиндрической оболочке препятствует распространению изгибных волн, что проявляется в эффекте отражения некоторых волновых пакетов от образующих с достаточно большой кривизной; наоборот, уменьшение кривизны способствует распространению волн, а при наличии на поверхности оболочки «наиболее слабой» образующей волновые пакеты либо локализируются в окрестности последней, либо стремятся к ней.

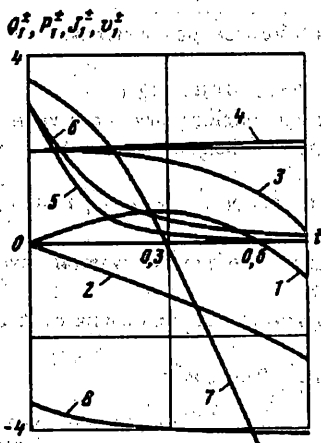
9. Рассмотрим пример. Пусть $k(\varphi) = e^{\beta\varphi}$, $-\infty < \varphi < +\infty$, $S_0(\varphi) = a\varphi + \frac{1}{2}ib\varphi^2$, $w_0 = A_w \sin[\pi n(l-s)/l]$, $v_0 = A_v \sin[\pi n(l-s)/l]$, где n — натуральное число, $\beta \geq 0$, $a \neq 0$, $b > 0$, A_w, A_v — вещественные числа. В случае шарнирного опирания $\lambda_n = n^4 \pi^4 / l^4$, $z_n = \sin[\pi n(l-s)/l]$, $\eta_n = A_w$, $\zeta_n = A_v$. Здесь $K = M = 0$, отсюда

$$N = 0, \quad \eta_n^\pm = \frac{1}{2} A_w \mp \frac{1}{2} A_v \left(a^4 + \frac{n^4 \pi^4 e^{2\beta\varphi}}{l^4 a^4} \right)^{-1/2} + O_{S_{02}}(\varepsilon^{1/2})$$

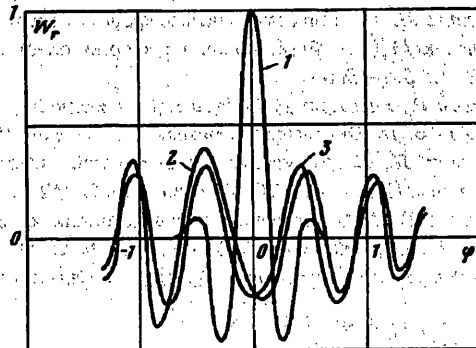
$$W = \sin[\pi n(l-s)/l] [u_n^+ \exp(i\varepsilon^{-1} S_n^+) + u_n^- \exp(i\varepsilon^{-1} S_n^-)] \quad (9.1)$$

Были проведены расчеты при $h/R = 4 \cdot 10^{-3}$, $l = 1,5$, $R = 50$ см, $\nu = 0,3$, $E = 6,24 \cdot 10^7$ МПа, $\rho = 1,18 \cdot 10^{-3}$ кг/см³, $n = 1$, $a = 2$, $b = 3$, $\beta = 1$, $A_w = 1$, $A_v = 0$. Для принятых значений параметров выполняется неравенство $0 = \delta_1 a^8 < \lambda_1 < a^8$.

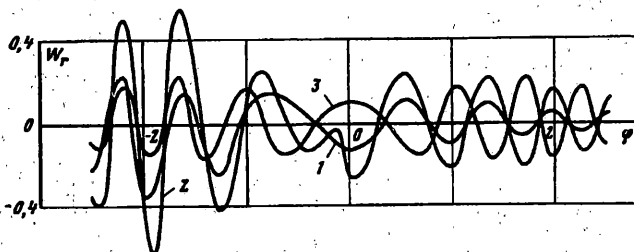
На фиг. 1 кривыми 1—8 представлены зависимости $Q_1^+(t)$, $Q_1^-(t)$, $P_1^+(t)$, $P_1^-(t)$, $J_1^+(t)$, $J_1^-(t)$, $v_1^+(t)$, $v_1^-(t)$ соответственно, указывающие на полное соответствие поведения первых волновых пакетов с ранее проведенным качественным анализом решения в случае $\delta_1 a^8 \leq \lambda_1 < a^8$. В самом деле, первый волновой пакет (1^-) неограниченно движется влево (в сторону убывания кривизны), а другой пакет (1^+) в момент времени $t_r \approx 0,28$ отражается от образующей $\varphi_r \approx 0,67$. Неограниченность групповой скорости $v_1^+(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ на фиг. 1 объясняется бесконечно малыми значениями волнового



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

числа P_1^2 при $t \rightarrow +\infty$, а также особенностью функции $H(p, q)$ при $p = 0$. Сравнение кривых 5, 6 на фиг. 1 говорит о том, что волновой пакет (1^-) расплывается медленнее, чем (1^+).

На фиг. 2 и 3 изображены решения $W_r = \text{Re } W$ для сечения $s = l/2$ в начальный момент времени $t = 0$ (кривая 1 на фиг. 2), при $t = 0,2$, т. е. до отражения первого (1^+) пакета (кривая 2 на фиг. 2) и после отражения при $t = 0,5$ (кривая 1 на фиг. 3). Там же приведены решения W_r для круговой оболочки ($\beta = 0$) в моменты времени $t = 0,2$ (кривая 3 на фиг. 2) и $t = 0,5$ (кривая 3 на фиг. 3). Анализ фигур 2, 3 позволяет сделать вывод: амплитуда волн, бегущих в сторону убывания кривизны $k(\varphi)$ оболочки, затухает медленнее, чем у волн, распространяющихся в противоположном направлении. На фиг. 3 также приведено решение W_r в момент времени $t = 0,5$ при $\beta = 1$, $A_w = 1$, $A_v = -5$ (кривая 2). Значение остальных параметров — прежнее. Как видно, наличие ненулевой амплитуды начальной скорости (2.5) при одинаковой фазовой функции $S_0(\varphi)$ в (2.4) и (2.5) приводит лишь к изменению амплитуды волн в пределах пакетов.

Пусть в уравнении (2.3) $k = 1$, $\lambda_n = 0$. Проинтегрируем его четыре раза по переменной φ . Тогда, принимая условия $U_n \rightarrow 0$, $\partial U_n / \partial \varphi \rightarrow 0$ при $|\varphi| \rightarrow +\infty$, получим классическое уравнение Эйлера для поперечных колебаний балки, точное решение которого с произвольными начальными условиями известно [10]. Расчеты, проведенные в моменты времени $t = 0,1$ и $t = 0,5$ для оболочек с длинами $l = 0,5; 1,2; 3,3$ соответственно и постоянными значениями остальных параметров, показали, что с ростом длины оболочки (при $\lambda_n \rightarrow 0$) решение (9.1) становится мало отличным от классического решения Буссинеска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Подчасов Н. П. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. Киев: Выща школа, 1989. 207 с.
2. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. 384 с.

3. *Михасёв Г. И., Товстик П. Е.* Устойчивость конических оболочек под действием внешнего давления//Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 4. С. 99—104.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1970. 512 с.
5. *Товстик П. Е.* Полубезмоментные формы потери устойчивости цилиндрических и конических оболочек//Тр. 14 Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1987. С. 501—506.
6. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.—Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
7. *Маслов В. П.* Операторные методы. М.: Наука, 1973. 534 с.
8. *Товстик П. Е.* Двумерные задачи устойчивости и колебаний оболочек нулевой гауссовой кривизны//Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 1. С. 69—71.
9. *Михасев Г. И.* О свободных низкочастотных колебаниях вязкоупругих цилиндрических оболочек//Прикл. механика. 1992. Т. 28. № 9. С. 50—55.
10. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр., лит., 1955. 668 с.

Витебск

Поступила в редакцию
1.VII.1991