

УДК 539.3

© 1994 г. А. Т. ВАСИЛЕНКО, И. Г. ЕМЕЛЬЯНОВ

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛОЕВ В ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ

При построении соотношений моделей оболочек слоистой структуры и решении задач о напряженно-деформированном состоянии необходимо учитывать условия работы смежных слоев. Большое число исследований посвящено вопросам механики оболочек в предположении об идеальном механическом контакте слоев. При этом гипотезы прикладных теорий формулируются как для всего пакета в целом, так и для каждого слоя отдельно [1]. Однако в ряде практически важных случаев имеет место неполное соединение слоев, возникает необходимость учета трения и проскальзывания между ними. Кроме того, в оболочках из композиционных материалов ввиду особенностей технологического характера, происходящих на границах раздела слоев физико-механических процессов формируются неоднородные прослойки, возникают различного рода несовершенства, которые существенно влияют на прочность и жесткость оболочки. Различные подходы к моделированию межфазной границы рассматриваются в монографиях [2, 3]. В публикуемой работе предлагается обобщить ранее разработанные методы решения задач о контактном взаимодействии оболочек вращения с жесткими и упругими телами [4, 5] на задачи о взаимодействии слоев в оболочках слоистой структуры. При этом поверхности разделов слоев моделируются адгезионными прослойками с различными коэффициентами постели, толщинами и характером работы на отрыв.

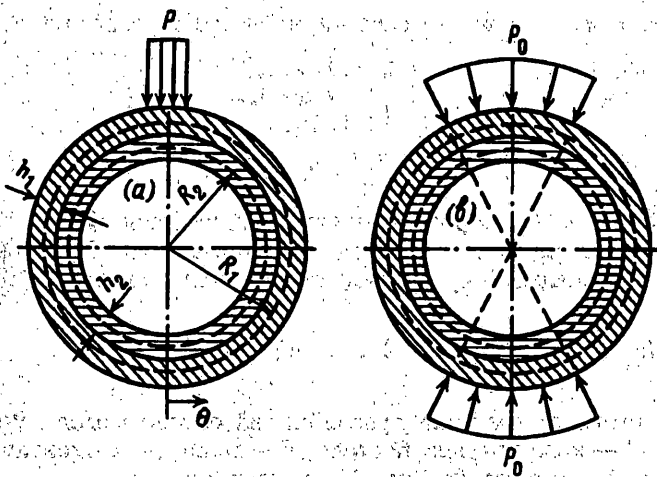
1. Рассмотрим для упрощения изложения двухслойную оболочку вращения. Будем предполагать, что каждый слой описывается классической теорией оболочек. Отметим, что в общем случае каждый слой может быть составлен из элементарных идеально соединенных между собой слоев. Это дает возможность записать для рассматриваемых оболочек разрешающие системы дифференциальных уравнений в частных производных в виде [6]:

$$\frac{\partial y_l}{\partial s} = \sum_{m=0}^4 A_{ml}(s) \frac{\partial^m y_l}{\partial \theta^m} + f_l(s, \theta) \quad (1.1)$$

$$y_e = \{N_r, N_z, S^V, M_s, u_r, u_z, v, \vartheta_s\}_l, \quad s_0 \leq s \leq s_n, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (l = 1, 2)$$

Здесь  $N_r, N_z, S^V$  — усилия,  $M_s$  — изгибающий момент,  $u_r, u_z, v$  — перемещения координатной поверхности,  $\vartheta_s$  — угол поворота нормального элемента,  $s$  — длина дуги образующей,  $\theta$  — центральный угол в параллельном круге. Элементы матрицы  $A_{ml}$  зависят от геометрических и механических характеристик, а компоненты вектора  $f$  определяются поверхностными нагрузками, интегральными характеристиками температурного поля, а также нагрузками, возникающими в результате взаимодействия слоев.

Решение задачи о взаимодействии слоев в составе рассматриваемого пакета состоит в определении области контакта, нагрузок взаимодействия, а также полей напряжений и перемещений при заданных внешних нагрузках. При этом в первом приближении ограничиваемся учетом только нормальной составляющей вектора контактного взаимодействия. Более строгим был бы учет



Фиг. 1.

еще и касательной составляющей. Однако в такой постановке задача существенно усложняется с точки зрения ее реализации с получением конкретных числовых результатов.

Разобьем каждую из оболочек в меридиональном направлении на участки малой длины так, чтобы можно было считать напряжения взаимодействия оболочек постоянными. Полученные кольца разобьем по окружности на конечные площадки (элементы) длиной  $a_0$ . При малых  $a_0$  можно считать, что связь между оболочками осуществляется через неизвестные нормальные усилия  $X_i$ , равномерно распределенные по каждому элементу. Предположение о постоянстве напряжений взаимодействия по элементарной площадке оправдывается ее малым размером. Для очень локализованных (сосредоточенных) нагрузок следует уменьшить размер площадки в окрестности области их приложения. Предлагаемый подход позволяет рассматривать и другие законы распределения контактного давления по элементарной площадке, например, линейный. Однако при этом усложняется реализация условий контакта. В связи с этим представляется целесообразным сохранить предположение о постоянстве контактного давления, увеличивая число элементарных площадок.

Решение задачи о действии на рассматриваемые слои (оболочки) локальных нагрузок, приложенных на указанных площадках, осуществляется с помощью разложения искомым функций и нагрузок в ряды Фурье по окружной координате, разделении переменных в (1.1) и интегрировании полученных таким образом систем обыкновенных дифференциальных уравнений устойчивым численным методом [6]. Для сглаживания колебаний Гиббса, возникающих при решении задач в случае действия локализованных нагрузок, будем заменять функцию перемещений  $w(\theta)$  кусочно-непрерывной в окрестности каждой площадки сплайн-функцией  $S w(\theta)$  [4]. В дальнейшем с целью упрощения изложения будем рассматривать оболочки вращения, нагруженные симметрично относительно сечения  $\theta = 0$  (фиг. 1). Исходя из описанного выше представления области контакта набором конечных элементов длины  $a_0$ , запишем для каждой пары выделенных из оболочки колец каноническую систему, выражающую условия совместной работы слоев [5]:

$$JX = -\Delta_r, \quad X = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}^T \quad (1.2)$$

$$N = \pi R / a_0, \quad R = R_2 + h_2 / 2 = R_1 - h_1 / 2$$

Матрица взаимных смещений слоев  $J$  является симметричной и имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} J_1 + J_2 + K & J_2 + J_3 & J_3 + J_4 \dots J_N + J_{N+1} \\ & J_1 + J_4 + K & J_2 + J_5 \dots J_{N-1} + J_{N+1} \\ & & J_1 + J_6 + K \dots J_{N-2} + J_{N+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ & & J_1 + J_{2N} + K \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Величины  $J_1, J_2, \dots, J_{2N}$  строятся путем интегрирования системы уравнений (1.1) при действии нагрузок в виде ступенчатых функций. С учетом осредненного представления перемещений суммарное перемещение слоев в (1.3) будет равно

$$J_i = \frac{1}{a_0} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} (S w_1 + S w_2) d\theta \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

В (1.3)  $K$  учитывает свойства прослойки на основе модели упругой постели  $K = 1/(CF)$ , где  $C$  — коэффициент постели,  $F$  — площадь элементарной площадки. В общем случае  $K$  является функцией координаты  $\theta$ .

Компоненты вектора  $\Delta_p$  определяются путем решения задачи для рассматриваемых оболочек при действии заданных внешних нагрузок. Имеющиеся зазоры также могут быть учтены компонентами вектора  $\Delta_p$ .

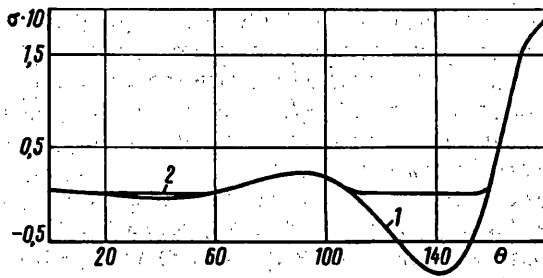
При идеальной безотрывной работе слоев решение задачи достигается решением системы уравнений (1.2) в первом приближении. При несвязанных между собой слоях, т. е., при невозможности работы клеевой прослойки на растяжение, необходимо решать задачу, как задачу с односторонними связями и исключить из системы уравнений (1.2)  $X_i$  на тех участках, где возможен отход слоев. Таким образом, необходимо построить такую систему уравнений, из которой следовала бы положительность контактного давления в зоне совместной работы слоев и равенство его нулю в зонах отхода.

Для определения подлежащих исключению неизвестных будем использовать метод последовательных приближений [4]. Суть метода состоит в том, что  $j$ -е приближение строится с учетом отсутствия связи на тех участках, где в  $(j-1)$ -м приближении  $X_i \leq 0$ . При ограниченной работе клеевого соединения на растяжения задача решается так же, как и для системы с односторонними связями, однако условие выключения неработающих связей имеет вид  $X_i/F < F_p$ , где  $F_p$  — предел прочности клеевого соединения.

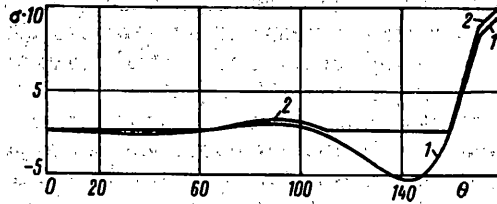
Рассматриваемый случай, по-видимому, связан с вопросом трещиностойкости композиционных материалов, поскольку тела с такими незаживающими трещинами представляют собой механическую систему с односторонними связями [7]. Существуют различные подходы по прогнозированию начала расслоения композиционных материалов. Один из них основан на том, что расслоение можно предвидеть по уровню действующего напряжения [8]. Определив компоненты напряжений и используя соответствующий критерий прочности, основанный на концепции предельных напряжений, можно с достаточной точностью предсказать наступление расслоения. Также необходимо отметить, что межслойное растягивающее напряжение наиболее эффективно инициирует расслоение [8].

2. В качестве примера рассмотрим двухслойную цилиндрическую оболочку длиной  $L = 0,4$  м нагруженную системой внешних сил  $P$  (фиг. 1, а). Внешний слой толщиной  $h_1 = 10^{-3}$  м и срединного радиуса  $R_1 = 0,094$  м принимался изотропным с модулем упругости  $E = 7 \cdot 10^4$  МПа и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,3$ . Внутренний слой с толщиной  $h_2 = 1,2 \cdot 10^{-3}$  м и срединным радиусом  $R_2 = 0,0929$  м моделировался ортотропной оболочкой с модулями упругости  $E_1 = 1,3 \cdot 10^4$  МПа,  $E_2 = 4,4 \cdot 10^4$  МПа,  $G_{12} = 0,37 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu_2 = 0,18$ .

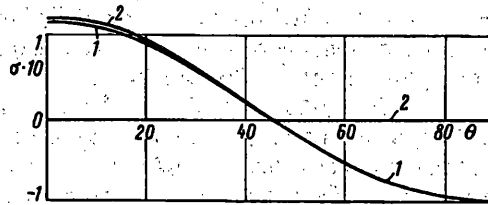
Расчеты проводились для шарнирно опертых оболочек. Конечные элементы стягивались центральными углами  $\Delta\theta = 6^\circ$ . Для каждого слоя удерживалось по 20 гармоник в разложениях в ряды Фурье. Нагружение осуществлялось давлением, приложенным на участке  $\pi - \delta\theta/2 \leq \theta \leq \pi + \delta\theta/2$ , статически эквивалентным



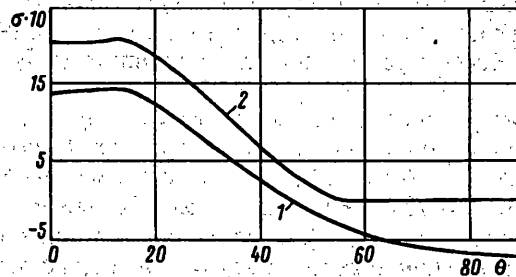
Фиг. 2



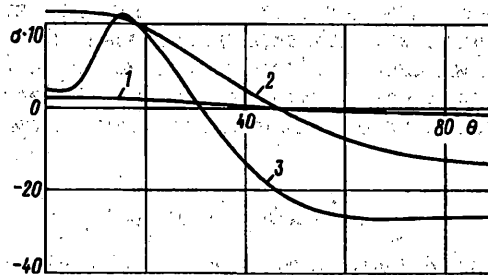
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

силе  $P$ . Результаты решения приведены на фиг. 2, 3 для  $\sigma$  [МПа] в сечении  $s = L/2$ . Кривая 1 соответствует двухстороннему контакту, т. е. случаю, когда клеевая прослойка нулевой толщины работает как на сжатие, так и на растяжение; кривая 2 — одностороннему контакту. Результаты на фиг. 2, 3 соответствуют расчету с упругими характеристиками клеевой прослойки, характеризуемых

коэффициентом постели  $C$ , равным  $0,01 C_p$ ;  $0,1 C_p$ . В данном случае считается, что микронеровности, которые всегда существуют, учитываются промежуточным слоем, свойства которого существенно отличаются от свойств контактирующих тел. Коэффициент постели  $C_p = 10^8 \text{ Н/м}^3$  соответствует упругим свойствам вакуумной резины [9]. Внешнее нагружение принималось равным  $P = 1 \text{ кН}$ . При учете упругих свойств прослойки кривые 1 и 2 хорошо совпадают в зоне возникновения контакта. Проведенные расчеты также показали, что с ростом  $C$  различие давления в области контакта по односторонней и двухсторонней моделям взаимодействия увеличиваются. При этом наблюдается значительная зона растягивающих контактных напряжений, отрывающих слои друг от друга.

Данная задача решалась также для различных значений силы  $P = 0,1 \text{ кН}$ ;  $2 \text{ кН}$ ;  $3 \text{ кН}$  при  $C = 10^4 C_p$ . Характер распределения напряжений одинаков для всех  $P$ , причем зона расслоения оболочки стягивается углом  $0 \leq \theta \leq 40^\circ$ , а зона возрастания контактного давления —  $175^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ .

Рассмотрим далее задачу о действии на двухслойную шарнирно опертую цилиндрическую оболочку давления, приложенного на двух участках внешней поверхности (фиг. 1, б):  $-\pi/16 \leq \theta \leq \pi/16$ ,  $\pi - \pi/16 \leq \theta \leq \pi + \pi/16$ .

Оболочка имеет длину  $L = 2 \text{ м}$ . Слои имеют толщины и радиусы срединной поверхности равные  $h_1 = h_2 = 0,02 \text{ м}$ ,  $R_1 = 0,27 \text{ м}$ ,  $R_2 = 0,25 \text{ м}$ . Оба слоя изготовлены из одного материала  $E_1 = E_2 = E = 10^4 \text{ МПа}$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ . Расчет проводится при разбивке длины окружности поперечного сечения площадками, стягиваемые углами  $10^\circ$ . В рядах Фурье удерживалось 30 членов. Результаты решения задачи приведены на фиг. 4 ( $C = 0,1 C_p$ ) и фиг. 5 ( $C = 10 C_p$ ) для сечения  $s = L/2$ , причем кривая 1 соответствует двухстороннему, а кривая 2 — одностороннему контакту. При решении задачи полагалось  $C_p = 10^8 \text{ Н/м}^3$ ,  $P = 10 \text{ кН}$ . Односторонний характер контакта слоев приводит к увеличению контактного давления в области приложения внешней нагрузки. Следовательно, при исчерпании предела прочности клевого слоя на отрыв контактное давление будет локализовано в зоне приложения внешнего воздействия. Из приведенных данных также следует, что увеличение упругости клеевой прослойки нелинейно снижает величину контактных напряжений.

На фиг. 6 показано распределение контактного напряжения при уменьшении модуля упругости одного из слоев в предположении безотрывной их работы. Кривая 1 соответствует  $E_2 = 10^{-1} E$ ,  $C = C_p$ , кривая 2 —  $E_1 = 10^{-1} E$ ,  $C = C_p$ , кривая 3 —  $E_1 = 10^{-1} E$ ,  $C = 10 C_p$ . Расчеты выполнены для  $P = 10 \text{ кН}$ . Уменьшение жесткости внешнего слоя, к которому приложена внешняя нагрузка, приводит к увеличению контактного напряжения. Увеличение жесткости клеевой прослойки при ослабленном внешнем слое значительно перераспределяет контактные напряжения. Межслойные растягивающие напряжения при этом увеличиваются.

Таким образом, предложенный подход, основанный на методах решения контактных задач теории оболочек, позволяет определять межслойные напряжения в оболочках слоистой структуры, учитывать неоднородные адгезионные прослойки, односторонний характер взаимодействия слоев, анизотропию материала.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикл. механика. 1972. Т. 8. № 6. С. 3—17.
2. Пелех Б. Л., Максимчук А. В., Коровайчук И. М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. Киев: Наук. думка, 1988. 279 с.
3. Кантор Б. Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения. Киев: Наук. думка, 1990. 135 с.
4. Василенко А. Т., Емельянов И. Г. Контактная задача для тонкой цилиндрической оболочки, лежащей на круговом основании // Пробл. прочности. 1990. № 6. С. 81—86.

5. Емельянов И. Г., Михайлов А. А. К исследованию напряженного состояния контактирующих между собой оболочечных конструкций//Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 2. С. 116—119.
6. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев: Наук. думка, 1981. 544 с. (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.: Т. 4).
7. Болотин В. В., Нефедов С. В., Шугорев В. Н. Сопротивление композиционных материалов межслойному разрушению//Расчеты на прочность. М.: Машиностроение. 1989. Вып. 30. С. 47—66.
8. Рейфснейдер К. Повреждение конструкций из композитов в процессе эксплуатации//Прикл. механика композитов. М.: Мир, 1989. С. 108—142.
9. Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М. Контактное взаимодействие элементов оболочечных конструкций. Киев: Наук. думка, 1988. 288 с.

Киев, Екатеринбург

Поступил в редакцию  
13.XI.1991