МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1994

УДК 539.3:537.2

© 1994 г. М. В. БЕЛУБЕКЯН, П. В. ГАЛПЧЯН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСОБЕННОСТИ СВЯЗАННОГО ЭЛЕКТРОУПРУГОГО ПОЛЯ В УГЛОВОЙ ТОЧКЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТЕЛА В ВИДЕ ДВУГРАННОГО УГЛА ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СДВИГЕ

Вопросам определения особенности электромеханических полей в пьезоэлектрических средах посвящены работы [1—4]. В [1, 4] исследованы электроупругие поля вблизи трещин, содержащихся в пьезоэлектрических средах. В [2, 3] рассмотрено электроупругое равновесие пьезоэлектрических призматических тел, поперечные сечения которых имеют форму кругового сектора[1]. Исследованы возникающие при продольном сдвиге электроупругие поля, которые содержат особенности в полюсе центрального угла.

В публикуемой работе изучается сопряженное электроупругое поле вблизи ребра (вершины) пьезоэлектрического клина, возникающее продольным сдвигом по направлению ребра. Клин имеет форму двугранного угла, на гранях которого задаются некоторые механические и электрические граничные условия. Ясно, что предполагаются пьезоэлектрические материалы, для которых возможно такое электроупругое состояние (пьезоэлектрические материалы с симметрией $6mm$, $4mm$ и так далее) [2, 3]. Для отмеченных пьезоэлектриков в статическом состоянии имеются несвязанные уравнения электроупругости относительно упругих и электрических полей. Главная ось симметрии пьезоэлектрика совпадает с ребром двугранного угла.

Если на каждой грани двугранного угла задавать только один из видов механических (напряжения или перемещения) и электрических (напряженность или электрическое смещение) граничных условий, то будем иметь всего 10 вариантов электромеханического нагружения.

Присоединив к граничным условиям основную систему уравнений, описывающую электроупругое равновесие, можно различать четыре типа граничных задач.

Задачи первого типа полностью распадаются на две независимые, относительно электрических и механических полей. Ко второму типу относятся граничные задачи, которые распадаются на две, причем для электростатического потенциала получается независимая задача, а для механического смещения — краевая задача, в граничные условия которой входит производная электростатического потенциала как известное слагаемое. К третьему типу относятся задачи, в которых присутствует обратная картина. Выделяется задача определения механического смещения, производные решения которой входят в граничные условия электростатического потенциала. И наконец, имеется задача четвертого типа, из которой не выделяется хоть одна из определяемых величин.

Из вышеуказанных десяти вариантов граничных задач к первым трем типам относятся по три, а к четвертому — одна задача. В данной работе исследуется именно этот последний случай связанной задачи.

В работах [2, 3], которые относились ко второму типу задач, было показано, что в зависимости от угла раствора и вида нагружения искомые величины в вершине плоского угла могут обладать логарифмической особенностью, особенностью вида $r^{\nu-1}$ (r — радиус-вектор в полярной системе координат, $\nu = \pi/2\alpha$, 2α — мера центрального угла) и корневой особенностью, не зависящими от материальных констант пьезоэлектрика. В настоящей работе обнаружено, что в рассматриваемом случае граничных условий, искомые физические величины в угловой точке двугранного угла обладают

[1] См. также *Галпчян П. В.* Связанное электроупругое поле в пьезокристаллической призме//Всесоюз. совещание-семинар Инженерно-физические проблемы новой техники: Тез. докл. Звенигород. 1990. С. 65—66.

особенностями вида $r^{\lambda_k - 1}$, тоже не зависящими от материальных констант пьезоэлектрической среды. Здесь $\lambda_k = (2k+1)\pi/4\alpha$ $(k = 0, 1, \dots)$. Этот результат совпадает с результатом, получаемым в случае обычного изотропного линейно-упругого материала.

1. Рассмотрим статическое состояние продольного сдвига пьезоэлектрического тела в виде двугранного угла, главная ось симметрии которого совпадает с его ребром (среда с симметрией $6mm$, $4mm$ и так далее).

Примем цилиндрическую систему координат r, θ, z, совместив ось z с ребром двугранного угла ($-\alpha \leq \theta \leq \alpha$, 2α — мера двугранного угла, $\alpha \in (0; \pi]$).

В данном случае деформации пьезоэлектрика его электроупругое состояние не зависит от координаты z и описывается системой уравнений [5]:

$$\tau_{zr} = c_{44}\gamma_{zr} - e_{15}E_r, \quad \tau_{\theta z} = c_{44}\gamma_{\theta z} - e_{15}E_\theta \tag{1.1}$$

$$D_r = e_{15}\gamma_{zr} + \varepsilon_1 E_r, \quad D_\theta = e_{15}\gamma_{\theta z} + \varepsilon_1 E_\theta$$

$$\gamma_{zr} = \partial u_z/\partial r, \quad \gamma_{\theta z} = (1/r)(\partial u_z/\partial\theta)$$

где τ_{zr}, $\tau_{\theta z}$ — компоненты тензора механических напряжений; γ_{zz}, $\gamma_{\theta z}$ — компоненты деформаций; E_r, E_θ — компоненты напряженности электрического поля; D_r, D_θ — компоненты электрического смещения; c_{44}, e_{15}, ε_1 — соответственно, модуль упругости, пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость, u_z — упругое смещение.

Вводя потенциал электростатического поля Ф $E_r = -\partial\Phi/\partial r$, $E_\theta = -(1/r) \times$ $\times (\partial\Phi/\partial\theta)$ тождественно удовлетворим уравнению Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, где $\mathbf{E}(E_r, E_\theta)$.

Полная система уравнений для линейной пьезоэлектрической среды, описывающая электроупругое равновесие, получается в результате подстановки уравнений состояния (1.1) в уравнение равновесия $\sigma_{ij,i} = 0$ (σ_{ij} — компоненты тензора механических напряжений, $i, j = 1, 2, 3$) и уравнение электростатики $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{D}(D_r, D_\theta)$ (Δ — оператор Лапласа):

$$\Delta u_z = 0, \quad \Delta\Phi = 0 \tag{1.2}$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

Зададим следующие однородные электромеханические граничные условия на гранях пьезоэлектрика:

$$u_z(r, -\alpha) = 0, \quad D_\theta(r, -\alpha) = 0 \tag{1.3}$$

$$\tau_{\theta z}(r, \alpha) = 0, \quad \Phi(r, \alpha) = 0$$

Уравнения (1.2) с граничными условиями (1.3) принадлежат к четвертому типу вышеуказанных задач. Таким образом, задача сведена к определению u_z и Ф, удовлетворяющие уравнениям (1.2) и граничным условиям (1.3) в области линейного угла двугранного угла, ограниченными двумя лучами $\theta = \pm\alpha$ в полярной системе координат r, θ.

2. Следуя методу Фурье, будем сначала искать частные решения уравнений (1.2) в виде

$$u_z = r^\lambda u(\theta), \quad \Phi = r^\lambda \varphi(\theta) \tag{2.1}$$

удовлетворяющие граничным условиям (1.3). Здесь $u(\theta)$ и $\varphi(\theta)$ искомые функции, а λ — некоторый параметр, подлежащий определению.

Подставив (2.1) в уравнения (1.2), приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно $u(\theta)$ и $\varphi(\theta)$, общие решения которых имеют вид:

$$u(\theta) = B_{11} \cos \lambda\theta + B_{12} \sin \lambda\theta, \quad \varphi(\theta) = B_{21} \cos \lambda\theta + B_{22} \sin \lambda\theta \tag{2.2}$$

Здесь B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} — постоянные, подлежащие определению.

Подставив (2.1) в граничные условия (1.3), приходим к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно $B_{11}, \ldots, B_{22}$.

Нетривиальные решения задачи (1.2), (1.3) возможны лишь при существовании ненулевых решений алгебраической системы уравнений. Имея в виду это условие, приходим к следующим трансцендентным уравнениям относительно λ:

$$\cos 2\lambda\alpha = \pm i\sqrt{\varkappa} \tag{2.3}$$

где $\varkappa = e_{15}^2/(c_{44}\varepsilon_1)$ — безразмерная электромеханическая постоянная.

Если пренебречь пьезоэлектрическим эффектом ($e_{15}=0$, $\varkappa=0$), то из (2.3) получим уравнение, определяющее собственные числа λ_k, соответствующие обычному изотропному диэлектрику

$$\lambda_k = (2k+1)\pi/(4\alpha) \quad (k=0, 1, \ldots) \tag{2.4}$$

Для двугранных углов из таких обычных материалов решения линейной упругости и электростатики соответственно представляются в виде

$$u_z(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k r^{\lambda_k} \sin \lambda_k (\alpha+\theta), \quad \Phi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k r^{\lambda_k} \sin \lambda_k (\alpha-\theta) \tag{2.5}$$

где постоянные C_k (D_k) определяются из граничных условий на части границы, замыкающей область в плоскости r, θ. Из (2.5) ясно, что напряжения τ_{zr}, $\tau_{\theta z}$ имеют особенность на вершине угла ($r=0$). Причем особенностью обладают первые два члена рядов в выражениях τ_{zr} и $\tau_{\theta z}$, которая не зависит от модуля сдвига c_{44}. В первом члене особенность появляется при $2\alpha > 90°$, а во втором при $2\alpha > 270°$. Эти результаты получены и в работах [6, 7].

3. Уравнения (2.3) имеют только комплексные корни, которые дают соответственно два набора собственных чисел задачи (1.2), (1.3):

$$\lambda_k = \lambda_{1k} - i(-1)^k \lambda_2, \quad \nu_k = \lambda_{1k} + i(-1)^k \lambda_2 \quad (k=0, 1, \ldots) \tag{3.1}$$

$$\lambda_{1k} = (2k+1)\pi/(4\alpha) \tag{3.2}$$

где i — мнимая единица, λ_2 — определяется из уравнения $\operatorname{sh} 2\alpha\lambda_2 = \sqrt{\varkappa}$.

Обозначим собственные функции, соответствующие собственному значению λ_k, через $u_k(\theta)$ и $\varphi_k(\theta)$. Аналогично, собственные функции, соответствующие собственному значению ν_k, обозначим через $v_k(\theta)$ и $\psi_k(\theta)$.

Таким образом, будем иметь два набора собственных функций

$$u_k(\theta) = B_{11}^{(k)} \cos \lambda_k\theta + B_{12}^{(k)} \sin \lambda_k\theta \tag{3.3}$$

$$\varphi_k(\theta) = B_{21}^{(k)} \cos \lambda_k\theta + B_{22}^{(k)} \sin \lambda_k\theta$$

$$v_k(\theta) = C_{11}^{(k)} \cos \nu_k\theta + C_{12}^{(k)} \sin \nu_k\theta \tag{3.4}$$

$$\psi_k(\theta) = C_{21}^{(k)} \cos \nu_k\theta + C_{22}^{(k)} \sin \nu_k\theta$$

где постоянные $B_{11}^{(k)}, \ldots, B_{22}^{(k)}$ и $C_{11}^{(k)}, \ldots, C_{22}^{(k)}$ подлежат определению из указанной в п. 2 системы алгебраических уравнений.

Когда параметр λ принимает значения (3.1), то ранг таблицы коэффициентов, соответствующей определителю вышеуказанной системы алгебраических уравнений, равен трем и значение одной неизвестной $B_{12}^{(k)}$ ($C_{12}^{(k)}$), соответствующей собственному числу λ_k (ν_k), остается произвольным. Остальные три постоянные выражаются через $B_{12}^{(k)}$ ($C_{12}^{(k)}$):

$$B_{11}^{(k)} = B_{12}^{(k)} \operatorname{tg} \lambda_k\alpha, \quad B_{21}^{(k)} = iB_{12}^{(k)} \frac{c_{44}}{e_{15}} \sqrt{\varkappa} \operatorname{tg} \lambda_k\alpha, \quad B_{22}^{(k)} = -iB_{12}^{(k)} \frac{c_{44}}{e_{15}} \sqrt{\varkappa} \tag{3.5}$$

$$C_{11}^{(k)} = C_{12}^{(k)} \operatorname{tg} \nu_k\alpha, \quad C_{21}^{(k)} = -iC_{12}^{(k)} \frac{c_{44}}{e_{15}} \sqrt{\varkappa} \operatorname{tg} \nu_k\alpha, \quad C_{22}^{(k)} = iC_{12}^{(k)} \frac{c_{44}}{e_{15}} \sqrt{\varkappa} \tag{3.6}$$

Подставив (3.5) и (3.6) соответственно в (3.3) и (3.4), получим окончательный вид собственных функций

$$u_k(\theta) = A_k^* \sin \lambda_k (\alpha + \theta), \quad \varphi_k(\theta) = A_k^* i \sqrt{c_{44}/\varepsilon_1} \sin \lambda_k (\alpha - \theta)$$

$$v_k(\theta) = B_k^* \sin \nu_k (\alpha + \theta), \quad \psi_k(\theta) = -B_k^* i \sqrt{c_{44}/\varepsilon_1} \sin \nu_k (\alpha - \theta)$$

$$A_k^* = B_{12}^{(k)}/\cos \lambda_k\alpha, \quad B_k^* = C_{12}^{(k)}/\cos \nu_k\alpha$$

Сумма соответствующих (2.1) частных решений дает решение задачи (1.2), (1.3):

$$u_z(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} [A_k^* r^{\lambda_k} \sin \lambda_k (\alpha + \theta) + B_k^* r^{\nu_k} \sin \nu_k (\alpha + \theta)] \tag{3.7}$$

$$\Phi(r, \theta) = i \sqrt{\frac{c_{44}}{\varepsilon_1}} \sum_{k=0}^{\infty} [A_k^* r^{\lambda_k} \sin \lambda_k (\alpha - \theta) - B_k^* r^{\nu_k} \sin \nu_k (\alpha - \theta)]$$

Если пренебречь пьезоэлектрическим эффектом ($e_{15} = 0$), то из (3.7) получим (2.5).

Представив в (3.7) степенные и тригонометрические функции в виде суммы действительных и мнимых частей, после некоторых преобразований, выражения u_z и Φ можно представить в виде

$$u_z(r, \theta) = \operatorname{ch} \lambda_2 (\alpha + \theta) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(r) r^{\lambda_{1k}} \sin \lambda_{1k} (\alpha + \theta) -$$

$$- \operatorname{sh} \lambda_2 (\alpha + \theta) \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(r) r^{\lambda_{1k}} \cos \lambda_{1k} (\alpha + \theta) \tag{3.8}$$

$$\Phi(r, \theta) = \sqrt{\frac{c_{44}}{\varepsilon_1}} \left[\operatorname{ch} \lambda_2 (\alpha - \theta) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \psi_k(r) r^{\lambda_{1k}} \sin \lambda_{1k} (\alpha - \theta) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sh} \lambda_2 (\alpha - \theta) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi_k(r) r^{\lambda_{1k}} \cos \lambda_{1k} (\alpha - \theta) \right]$$

$$\varphi_k(r) = A_k \cos(\lambda_2 \ln r) + iB_k (-1)^k \sin(\lambda_2 \ln r) \tag{3.9}$$

$$\psi_k(r) = A_k \sin(\lambda_2 \ln r) - iB_k (-1)^k \cos(\lambda_2 \ln r)$$

$$A_k = B_k^* + A_k^*, \quad B_k = B_k^* - A_k^*$$

Из (3.8) следует, что компоненты деформаций γ_{zr}, $\gamma_{\theta z}$, напряженности электрического поля E_r, E_θ, следовательно и механических напряжений τ_{zr}, $\tau_{\theta z}$, выражаемые производными u_z в Φ, в полюсе $r = 0$ имеют особенность вида

$r^{\lambda_{1k}-1}$ при $r \to 0$. Этот результат совпадает с результатом, приведенным в п. 2 для изотропного линейно-упругого материала и изотропного диэлектрика.

4. В качестве примера граничной задачи рассмотрим призматическое тело, поперечным сечением которого в плоскости r, θ является ограниченная область в виде кругового сектора. Замыкая плоский угол 2α в плоскости r, θ координатной линией $r = a$, примем на нем следующие граничные условия:

$$\tau_{zr}(a, \theta) = \tau_0 f_1(\theta), \quad \Phi(a, \theta) = \varphi_0 f_2(\theta) \tag{4.1}$$

где τ_0, φ_0 — постоянные, имеющие размерность механического напряжения и потенциала электростатического поля соответственно, $f_1^{(\theta)}$, $f_2^{(\theta)}$ — произвольные функции.

Согласно (4.1) и (3.8), будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_{1k} x_k - \lambda_2 y_k) \operatorname{ch} \lambda_2 (\alpha - \theta) \cos \lambda_{1k} (\alpha - \theta) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_{1k} y_k + \lambda_2 x_k) \operatorname{sh} \lambda_2 (\alpha - \theta) \sin \lambda_{1k} (\alpha - \theta) = \frac{\tau_0}{c_{44}\sqrt{1+\varkappa}} f_1(\theta) \tag{4.2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k \operatorname{ch} \lambda_2 (\alpha - \theta) \sin \lambda_{1k} (\alpha - \theta) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} x_k \operatorname{sh} \lambda_2 (\alpha - \theta) \cos \lambda_{1k} (\alpha - \theta) = \frac{\varphi_0}{a} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{c_{44}}}\, f_2(\theta)$$

$$x_k = (-1)^k a^{\lambda_{1k}-1} \varphi_k(a), \quad y_k = (-1)^k a^{\lambda_{1k}-1} \psi_k(a) \tag{4.3}$$

Умножив обе части первого из равенств (4.2) на $\cos \lambda_{1l}(\alpha - \theta)$, а второго на $\sin \lambda_{1l}(\alpha - \theta)$ $(l = 0, 1, \ldots)$ и проинтегрировав их почленно в промежутке $[-\alpha, \alpha]$, получаем систему двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных x_k и y_k:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_{lk} x_k + b_{lk} y_k) = g_l, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (c_{lk} x_k + d_{lk} y_k) = q_l \quad (l = 0, 1, \ldots) \tag{4.4}$$

$$g_l = \frac{\tau_0}{c_{44}\sqrt{1+\varkappa}} \int_{-\alpha}^{\alpha} f_1(\theta) \cos \lambda_{1l} (\alpha - \theta)\, d\theta$$

$$a_{lk} = \frac{\lambda_2 \alpha \sqrt{\varkappa}\, (-1)^{k+l} [2\lambda_{1k}\alpha - \pi(k-l)]}{(2\alpha\lambda_2)^2 + \pi^2 (k-l)^2} -$$
$$- \frac{\lambda_2 \alpha \sqrt{\varkappa}\, (-1)^{k+l} [2\lambda_{1k}\alpha - \pi(k+l+1)]}{(2\alpha\lambda_2)^2 + \pi^2 (k+l+1)^2} \quad (k \neq l)$$

$$a_{ll} = \frac{2\lambda_{1l}^3 \operatorname{sh} 2\lambda_2\alpha}{\lambda_2 (\lambda_2^2 + 4\lambda_{1l}^2)} + \frac{\pi\alpha\sqrt{\varkappa}\,\lambda_2 (2l+1)}{(2\alpha\lambda_2)^2 + \pi^2 (2l+1)^2}$$

Рассмотрим случай, когда электроупругое поле возникает только вследствие механической нагрузки (4.1) $(f_2(\theta) \equiv 0)$, заданной на поверхности $r = a$.

Согласно (1.1) и (3.8), для компонента напряжения τ_{zr} будем иметь выражение

$$\tau_{zr}(r, \theta) = c_{44}\sqrt{1+\varkappa}\left\{\operatorname{ch}\lambda_2(\alpha-\theta)\sum_{k=0}^{\infty}[\lambda_{1k}\varphi_k(r) - \right. \tag{4.5}$$

$$\left. - \lambda_2\psi_k(r)](-1)^k r^{\lambda_{1k}-1}\cos\lambda_{1k}(\alpha-\theta) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sh}\lambda_2(\alpha-\theta)\sum_{k=0}^{\infty}[\lambda_{1k}\psi_k(r) + \lambda_2\varphi_k(r)](-1)^k r^{\lambda_{1k}-1}\sin\lambda_{1k}(\alpha-\theta)\right\} \tag{4.5}$$

Ограничиваясь в разложениях (4.4) и (4.5) только первыми членами, сначала из (4.4) определим x_0 и y_0:

$$x_0 = \frac{g_0\lambda_2}{\omega}(\lambda_2^2 + 2\lambda_{10}^2)(\lambda_2^2 + 4\lambda_{10}^2)(4\alpha^2\lambda_2^2 + \pi^2)^2\operatorname{sh}2\lambda_2\alpha$$

$$y_0 = -\frac{\pi g_0\alpha\lambda_2^2\sqrt{\varkappa}}{\omega}(4\alpha^2\lambda_2^2 + \pi^2)(\lambda_2^2 + 4\lambda_{10}^2)^2$$

$$\omega = 2(\lambda_2^2 + 2\lambda_{10}^2)(4\alpha^2\lambda_2^2 + \pi^2)^2\lambda_{10}^3\operatorname{sh}^2 2\lambda_2\alpha + \pi\alpha\lambda_2^2\sqrt{\varkappa}\times$$

$$\times(4\alpha^2\lambda_2^2 + \pi^2)(\lambda_2^2 + 4\lambda_{10}^2)^2\operatorname{sh}2\lambda_2\alpha - \pi^2\alpha^2\lambda_2^2\varkappa\lambda_{10}(\lambda_2^2 + 4\lambda_{10}^2)^2$$

Подставив эти значения x_0 и y_0 в (4.3), определим сначала $\varphi_0(a)$ и $\psi_0(a)$, а затем из (3.9) при $r = a - A_0$ и B_0.

Таким образом, в первом приближении, будем иметь следующее выражение для τ_{zr}, в котором фигурирует и коэффициент при особенности $(r/a)^{\lambda_{10}-1}$:

$$\tau_{zr}(r, \theta) = c_{44}\sqrt{1+\varkappa}\,\{[(\lambda_{10}x_0 - \lambda_2 y_0)\cos(\lambda_2\ln(r/a)) -$$

$$-(\lambda_{10}y_0 + \lambda_2 x_0)\sin(\lambda_2\ln(r/a))]\operatorname{ch}\lambda_2(\alpha-\theta)\cos\lambda_{10}(\alpha-\theta) +$$

$$+[(\lambda_{10}x_0 - \lambda_2 y_0)\sin(\lambda_2\ln(r/a)) + (\lambda_{10}y_0 +$$

$$+\lambda_2 x_0)\cos(\lambda_2\ln(r/a))]\operatorname{sh}\lambda_2(\alpha-\theta)\sin\lambda_{10}(\alpha-\theta)\}\,(r/a)^{\lambda_{10}-1} \tag{4.6}$$

Аналогично, в первом приближении можно получить выражение и для компонента напряжения $\tau_{\theta z}$.

Из (4.6), предельным переходом $e_{15}\to 0$, получаем выражение τ_{zr} и, следовательно, выражение коэффициента особенности, рассмотренное в п. 2 (2.5) задачи для изотропного линейно-упругого тела, когда на замыкании $r = a$ задано граничное условие $\tau_{zz}(a, \theta) = \tau_0 f_1(\theta)$:

$$\tau_{zr}(r, \theta) = \frac{\tau_0 U_0\sin\lambda_{10}(\alpha+\theta)}{\alpha}\left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_{10}-1}, \quad U_0 = \int_{-\alpha}^{\alpha} f_1(\theta)\sin\lambda_{10}(\alpha+\theta)\,d\theta$$

В частности, когда $f_1(\theta)\equiv 1$:

$$g_l = 4\tau_0\alpha(-1)^l/(\pi c_{44}\sqrt{1+\varkappa}\,(2l+1))$$

Если в разложениях (4.4) и (4.5) ограничиваться первыми двумя членами, то совершенно аналогично, как и выше, можно получить второе приближение коэффициентов особенностей. Но при этом объем выкладок будет сравнительно большим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Половинкина И. Б., Улитко А. Ф.* К теории равновесия пьезокерамических тел с трещинами//Тепловые напряжения в элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1978. Вып. 18. С. 10—17.

2. *Галпчян П. В.* Определение особенности вблизи вершины сектора из пьезокристалла//Изв. АН АрмССР. Механика. 1987. Т. 40. № 5. С. 35—39.
3. *Галпчян П. В.* Определение связанных электромеханических полей в цилиндрическом секторе из пьезокристалла//Изв. АН АрмССР. Механика. 1990. Т. 43. № 5. С. 21—25.
4. *Shindo Y., Ozawa E. and Nowacki J. P.* Singular stress and electric fiields of a cracked piezoelectric strip//Intern. J. Appl. Electromagnetics in Materials. 1990. Vol. 1. No. 1. P. 77—87.
5. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. Москва: Наука, 1988. 472 с.
6. *Саркисян В. С., Белубекян В. М.* Об одной антиплоской задаче для клина//Ученые записки ЕрГУ. Ереван: 1986. № 3. С. 36—40.
7. *Саргсян А. М., Хачикян А. С.* Поведение некоторых физических полей в окрестности края поверхности контакта кусочно-однородного тела//Докл. АН АрмССР. 1988. Т. 86. № 4. С. 161—165.

Ереван

Поступила в редакцию
13.XI.1991