

УДК 539.3 : 534.1

© 1994 г. А. Н. КЛЕПОВ

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЙ НЕПОЛОГИХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ЭКОНОМИЧНЫМИ ИТЕРАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ И МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Публикуемая работа является развитием работ [1—4], а также^{1,2,3}, посвященных применению экономичных итерационных методов на основе метода конечных разностей (а также вариационно-разностного) к решению задач прочности, устойчивости и колебаний оболочек. Аналогичные исследования других авторов представлены в [5—17]. Вышеуказанные исследования показали значительную эффективность и преимущество экономичных итерационных методов по сравнению с традиционными процедурами решения краевых задач, сложившимися в МКЭ [18, 19, 20]; соответствующие оценки вычислительной работы даны в [6, 7, 15, 17, 18, 21].

На основе разработки оригинальной векторно-матричной формулировки краевых задач теории оболочек авторами [1, 3, 4] построены эффективные конечно-разностные алгоритмы решения задачи прочности. Для придания универсальности этим методикам, свойственной методу конечных элементов (МКЭ), а также построения абсолютно устойчивых алгоритмов экономичных итерационных методов в [2] (смотри также сноски) на основе предложенной автором векторно-матричной формулировки вариационной постановки задачи были разработаны алгоритмы автоматизированного вывода и решения разрешающих векторно-матричных уравнений на ЭВМ, объединяющие вариационно-разностные и экономичные итерационные методы. Следующим логическим шагом явилась разработка экономичных итерационных методов на основе МКЭ, необходимость ее обосновывается требованием повышения степени аппроксимации как исходных вариационных соотношений, так и получаемых решений краевых задач теории оболочек, характеризующихся большими показателями изменчивости [3, 22, 23]. Результаты этой разработки представлены ниже.

1. Векторно-матричная формулировка вариационной задачи на собственные значения. В целях общности тангенциальные и нормальные перемещения оболочки ищем в виде следующих разложений:

$$u(\alpha_1, \alpha_2, z) = \sum_{k=0}^n u_k(\alpha_1, \alpha_2) P_k(z) \quad (1.1)$$

$$v(\alpha_1, \alpha_2, z) = \sum_{k=0}^n v_k(\alpha_1, \alpha_2) P_k(z), \quad w(\alpha_1, \alpha_2, z) = \sum_{k=0}^m w_k(\alpha_1, \alpha_2) P_k(z)$$

¹ Григолюк Э. И., Клепов А. Н., Куракин В. И. Вариационно-разностные схемы и алгоритмы решения двумерных задач прочности и устойчивости ортотропных оболочек и пластин // В сб.: I Всесоюз. симпозиум по матем. методам в мех. деформ. тел. Тезисы докладов. М.: Из-во ин-та пробл. мех. АН СССР, 1984. 56 с.

² Григолюк Э. И., Клепов А. Н., Куракин В. И. Итерационные методы решения двумерных задач прочности, устойчивости и колебаний неоднородных оболочек и составных тонкостенных конструкций // В сб.: Гагаринские науч. чтения по косм. и авиации, 1985. М.: Наука, 1986. 182 с.

³ Бирюкова Н. В., Кизер И. Н., Клепов А. Н., Куракин В. И. Вариационно-разностный подход к построению экономичных итерационных схем решения двумерных задач прочности и устойчивости одно- и многосвязных оболочек // В сб.: Актуальные проблемы мех. оболочек. Казань, 1985. 25 с.

где $P_k(z)$ — полиномы из полной системы функций; n и m различны в общем случае.

Формулы для деформации оболочки общеизвестны, поэтому приведем некоторые из них (обозначения как и в [23]):

$$e_{11}(\alpha_1, \alpha_2, z) = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \frac{v}{H_1 H_2} + \frac{\partial H_1}{\partial z} \frac{w}{H_1 H_3} \quad (1.2)$$

$$e_{33}(\alpha_1, \alpha_2, z) = \partial w / \partial z$$

где $H_1 = H_1(\alpha_1, \alpha_2, z)$, $H_2 = H_2(\alpha_1, \alpha_2, z)$ — параметры Ламе.

Подставляя в (1.2) выражения (1.1) и вводя вектор обобщенных перемещений размерности $(2n + m + 3)$:

$$\omega^T = [u_0, u_1, \dots, u_n; v_0, \dots, v_n; w_0, \dots, w_m] \quad (1.3)$$

получим векторно-матричную запись деформаций

$$e_{11}(\alpha_1, \alpha_2, z) = \{H_{11}^1\}^T \partial_{\alpha_1} \omega + \{H_{11}^0\}^T \omega \quad (1.4)$$

$$e_{33}(\alpha_1, \alpha_2, z) = \{H_{33}^1\}^T \frac{\partial \omega}{\partial z} + \{H_{33}^0\}^T \omega$$

$$\{H_{11}^1\}^T = \left\{ \left\{ \frac{P_k(z)}{H_1} \right\}_{k=0}^{k=n} \{0\}_{k=0}^{k=n} \{0\}_{k=0}^{k=m} \right\} \quad (1.5)$$

$$\{H_{11}^0\}^T = \left\{ \{0\}_{k=0}^{k=n} \left\{ \partial_{\alpha_2} H_1 \frac{P_k(z)}{H_1 H_2} \right\}_{k=0}^{k=n} \left\{ \frac{P_k(z)}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial z} \right\}_{k=0}^{k=m} \right\}$$

$$\{H_{33}^1\}^T = \left\{ \{0\}_{k=0}^{k=n} \{0\}_{k=0}^{k=n} \{0\}_{k=0}^{k=m} \right\}$$

$$\{H_{33}^0\}^T = \left\{ \{0\}_{k=0}^{k=n} \{0\}_{k=0}^{k=n} \left\{ \frac{\partial P_k(z)}{\partial z} \right\}_{k=0}^{k=m} \right\}$$

где $\{ \dots \}_{k=0}^{k=n}$ означает последовательность из $(n + 1)$ членов, символ $\{ \dots \}^T$ означает транспонирование.

Выражение для энергии элемента объема оболочки имеет вид

$$dE(\alpha_1', \alpha_2', z) = 0,5 c_{ijkl}(\alpha_1', \alpha_2', z) e_{ij}(\alpha_1', \alpha_2', z) \times \quad (1.6)$$

$$\times e_{kl}(\alpha_1', \alpha_2', z) \sqrt{g(\alpha_1', \alpha_2', z)} d\alpha_1' d\alpha_2' dz$$

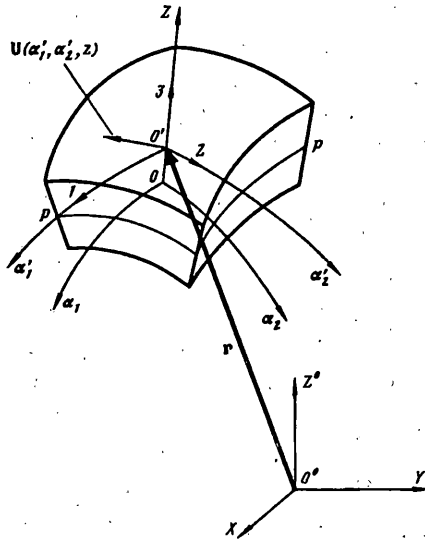
где $(\alpha_1', \alpha_2', z)$ — локальная система координат на поверхности оболочки, эквидистантной поверхности приведения (фиг. 1); $g(\alpha_1', \alpha_2', z)$ — дискриминант фундаментального тензора; $c_{ijkl}(\alpha_1', \alpha_2', z)$ — компоненты тензора упругости материала в точке $(\alpha_1', \alpha_2', z)$

После интегрирования по z выражения (1.6) получим для приращения энергии оболочки формулу

$$dE = \int_{z^{(-)}(\alpha_1', \alpha_2')}^{z^{(+)}(\alpha_1', \alpha_2')} dE = \int_{z^{(-)}(\alpha_1, \alpha_2)}^{z^{(+)}(\alpha_1, \alpha_2)} dE(\alpha_1, \alpha_2, z) = \quad (1.7)$$

$$= \left\{ \sum_{i, k=1}^2 (\partial_{\alpha_i} \omega^T H^{(11)}(i; k) \partial_{\alpha_k} \omega) + \sum_{i=1}^2 (\partial_{\alpha_i} \omega^T H^{(10)}(i; 0) \omega) + \omega^T H^{(00)}(0; 0) \omega \right\} d\alpha_1 d\alpha_2$$

где $H^{(\mu\nu)}(i; k)$ — матрицы размерности $(2n + m + 3) \cdot (2n + m + 3)$, зависящие от $(\alpha_1,$



Фиг. 1

α_2) и имеющие смысл матриц обобщенной жесткости оболочки; $z^{(+)}$, $z^{(-)}$ — координаты внутренней и внешней поверхности оболочки.

В случае задачи устойчивости аналогичное выражение можно получить для приращения энергии возмущенного состояния оболочки. Предположим, что докритическое состояние оболочки является безмоментным (с усилиями N_{ij}^0 ($i, j = 1, 2$)) и примем выражения для деформаций возмущенного состояния оболочки в виде

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + 0,5\varphi_1^2, \quad \varepsilon_{22} = e_{22} + 0,5\varphi_2^2, \quad \varepsilon_{12} = e_{12} + \varphi_1\varphi_2 \quad (1.8)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{A_1} \partial_{\alpha_1} w_0 + \frac{u_0}{R_1}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{A_2} \partial_{\alpha_2} w_0 + \frac{v_0}{R_2} \quad (1.9)$$

где A_1, A_2 — коэффициенты Ламе, а u_0, v_0, w_0 — перемещения поверхности приведения.

Для приращения энергии имеем выражение

$$dR = (0,5N_{11}^0\varphi_1^2 + 0,5N_{22}^0\varphi_2^2 + N_{12}^0\varphi_1\varphi_2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (1.10)$$

которое после введения матриц вида ($r, s = \overline{1, 2}$):

$$H_{ij}^{(1)R}(r; s) = \begin{cases} 0 & (i, j \neq 2n + 3; i, j \neq 1, 2n + m + 3) \\ A_1 A_2 \frac{N_{11}^0}{A_1^2} & (i = j = 2n + 3; i, j = 1, 2n + m + 3) \end{cases} \quad (1.11)$$

$$H_{ij}^{(10)R}(1; 0) = \begin{cases} 0 & (i \neq 2n + 3 \wedge j \neq 1), (i \neq 2n + 3 \wedge j \neq n + 2) \\ -\frac{2N_{11}^0}{A_1 R_1} A_1 A_2 & (i = 2n + 3, j = 1) \\ -\frac{2N_{12}^0}{A_1 R_2} A_1 A_2 & (i = 2n + 3, j = n + 2), (i, j = 1, 2n + m + 3) \end{cases} \quad (1.12)$$

$$H_{ij}^{(10)R}(2; 0) = \begin{cases} 0 & (i \neq 2n + 3 \wedge j \neq 1), (i \neq 2n + 3 \wedge j \neq n + 2) \\ -\frac{2N_{12}^0}{A_2 R_1} A_1 A_2 & (i = 2n + 3, j = 1) \\ -\frac{2N_{22}^0}{A_2 R_2} A_1 A_2 & (i = 2n + 3, j = n + 2), (i, j = 1, 2n + m + 3) \end{cases} \quad (1.13)$$

$$H_{ij}^{(00)R}(0; 0) = \begin{cases} 0 & (i \neq 1 \wedge j \neq 1; i \neq 1 \wedge j \neq n + 2) \\ 0 & (i \neq n + 2 \wedge j \neq 1; i \neq n + 2 \wedge j \neq n + 2) \\ \frac{N_{11}^0}{R_1^2} A_1 A_2 & (i = 1, j = 1) \\ \frac{N_{12}^0}{R_1 R_2} A_1 A_2 & (i = 1, j = n + 2), (i = n + 2, j = 1) \\ \frac{N_{22}^0}{R_2^2} A_1 A_2 & (i = j = n + 2) \end{cases} \quad (1.14)$$

может быть записано в виде (1.7), где роль матриц $H^{(\mu\nu)}(i; k)$ играют матрицы $H^{(\mu\nu)R}(i; k)$.

Аналогичную форму принимает выражение для приращения энергии (1.7) в случае принятия более общих предположений о докритическом состоянии оболочки, в частности, когда его следует считать моментным. И в этом случае получается билинейное относительно первых производных вектора выражение типа (1.7) с другими матрицами $H^{(\mu\nu)R}(i; k)$.

Переходя к задаче колебаний, запишем выражение для приращения кинетической энергии элемента объема оболочки с плотностью $\rho(\alpha_1', \alpha_2', z)$

$$dK^v = 0,5 \{ \dot{u}^2(\alpha_1', \alpha_2', z) + \dot{v}^2(\alpha_1', \alpha_2', z) + \dot{w}^2(\alpha_1', \alpha_2', z) \} \times \\ \times \rho(\alpha_1', \alpha_2', z) \sqrt{g(\alpha_1', \alpha_2', z)} dz d\alpha_1' d\alpha_2' \quad (1.15)$$

В системе координат (α_1, α_2, z) для скоростей перемещений можем записать следующие выражения

$$\dot{u}(\alpha_1, \alpha_2, z) = \{K_1\}^T \dot{\omega}, \quad \dot{v}(\alpha_1, \alpha_2, z) = \{K_2\}^T \dot{\omega}, \quad \dot{w}(\alpha_1, \alpha_2, z) = \{K_3\}^T \dot{\omega} \quad (1.16)$$

где, например

$$\{K_1\}^T = \{ \{P_k(z)\}_{k=0}^{k=n} \{0\}_{k=0}^{k=n} \{0\}_{k=0}^{k=m} \} \quad (1.17)$$

и так далее. Тогда после подстановки выражений (1.16) в (1.15) и интегрирования его по z получим

$$dK = \int_{z^{(-)}(\alpha_1, \alpha_2)}^{z^{(+)}(\alpha_1, \alpha_2)} dK^v = 0,5 \dot{\omega}^T K^{(00)}(0; 0) \dot{\omega} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (1.18)$$

где $K^{(00)}(0; 0)$ — матрица размерности $(2n + m + 3) \cdot (2n + m + 3)$ имеет смысл матрицы инерции для вектора $\dot{\omega}$.

Примем $\omega(r, t) = \omega(r) \cdot \exp(i\omega t)$, $r = (\alpha_1, \alpha_2)$, тогда

$$K = \int_{\Omega} dK = -\omega^2 K(\omega, \omega) \quad (1.19)$$

$$K(\omega, \omega) = \int_{\Omega} \{0,5 \omega^T K^{(00)}(0; 0) \omega\} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (1.20)$$

где Ω — область интегрирования по поверхности приведения, $K(\omega, \omega)$ — билинейная форма, отвечающая кинетической энергии оболочки.

Далее аналогично [2] представим задачи на собственные значения: задача устойчивости

$$E(\omega, \delta\omega) = \lambda R(\omega, \delta\omega), \quad \forall \delta\omega \in H \quad (1.21)$$

задача на определение собственной частоты

$$E(\omega, \delta\omega) = \omega^2 K(\omega, \delta\omega), \quad \forall \delta\omega \in H \quad (1.22)$$

$$E(\omega, \delta\omega) = \int_{\Omega} dE(\omega, \delta\omega), \quad R(\omega, \delta\omega) = \int_{\Omega} dR(\omega, \delta\omega) \quad (1.23)$$

где $E(\omega, \delta\omega)$, $R(\omega, \delta\omega)$ — билинейные формы, отвечающие упругой энергии и энергии возмущенного состояния оболочки соответственно: H — функциональное пространство векторов состояния оболочки — аналог пространства H в [2], $\delta\omega$ — любая кинематически допустимая вариация вектора состояния.

При наличии достаточной гладкости параметров геометрии и жесткости оболочки [2, 24] возможно от интегральных тождеств (1.21), (1.22) перейти к дифференциальным уравнениям

$$A_L \omega = \lambda R_L \omega \quad (1.24)$$

$$A_L \omega = \omega^2 K_L \omega \quad (1.25)$$

соответственно устойчивости и колебаний; A_L — оператор краевой задачи теории оболочек, он имеет вид

$$A_L \omega = \partial_{\alpha_1} \{H^{(11)}(1; 1) \partial_{\alpha_1} \omega + H^{(11)}(1; 2) \partial_{\alpha_2} \omega + H^{(10)}(1; 0) \omega\} + \\ + \partial_{\alpha_2} \{H^{(11)}(2; 1) \partial_{\alpha_1} \omega + H^{(11)}(2; 2) \partial_{\alpha_2} \omega + H^{(10)}(2; 0) \omega\} + H^{(00)}(0; 0) \omega \quad (1.26)$$

а R_L — дифференциальный оператор, по форме совпадающий с выражением (1.26), если заменить в нем матрицы $H^{(ij)}(i, k)$ на $H^{(ij)R}(i, k)$; $K_L = K^{(00)}(0; 0)$.

При тех же (достаточно общих) предположениях на параметры оболочки, что и в [2, 25], а также специальном выборе базиса $\{P_k(z)\}$ (что не принципиально; при доказательстве с целью упрощения в качестве $\{P_k(z)\}$ выбраны специальные комбинации полиномов Лежандра) были установлены следующие факты:

а) положительная определенность оператора A_L в форме (эллиптичность в пространстве H [24]):

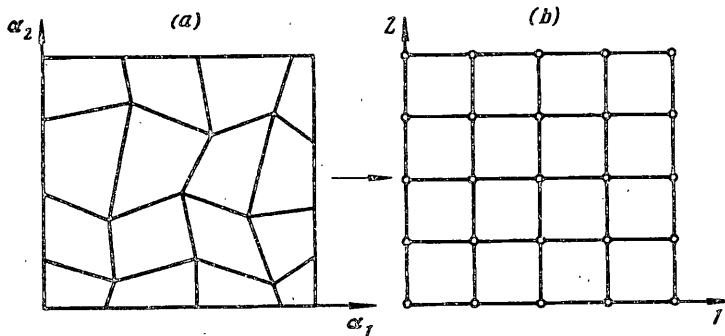
$$M \|\omega\|_H^2 \leq E(\omega, \omega), \quad M > 0 \quad (1.27)$$

б) разрешимость обобщенных спектральных задач (1.21), (1.22) и наличие дискретного спектра как в задаче устойчивости, так и в задаче колебаний, причем, при отсутствии знакоопределенности формы $R(\omega, \omega)$ спектр задачи (1.21) содержит отрицательную ветвь. Именно этим фактом, а также тем, что в ряде случаев пространство действия оператора $R_L - H^R$ может быть значительно уже (или шире) пространства H , объясняется использование в [2] нормирования вектора ω по H в отличие от [6], где ω нормируется в H^R . Таким образом расширяются возможности процедуры [6].

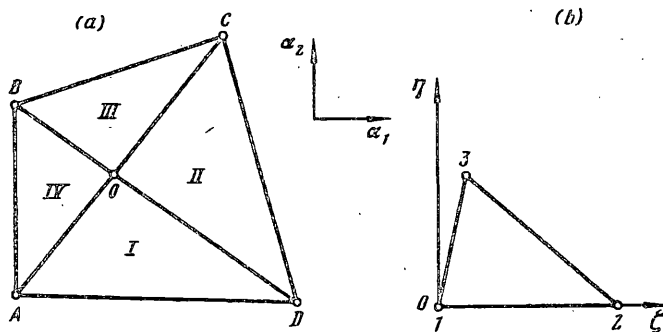
Полученные результаты имеют существенное значение при обосновании МКЭ для представленной модели оболочек.

Естественные краевые условия для оболочки выводятся обычным образом из интегральных тождеств (1.21), (1.22); кинематические условия ставятся на компоненты вектора ω , например, при защемлении края имеем условие

$$\omega|_{\Gamma_0} = 0 \quad (1.28)$$



Фиг. 2.



Фиг. 3

где Γ_0 — часть общей границы Γ области Ω .

2. Аппроксимация. Область интегрирования аппроксимируется набором четырехугольников — Ω_h . Порядок приближения области определяется требованиями к разбиению, приведенными в [26], причем необходимы условия его регулярности, типичные для разностных сеток [7, 16]. Это выражается в том, что поле узлов сеточного шаблона образуется вырезанием множества узлов, отвечающего Ω_h (если граница области нерегулярна), из прямоугольной сетки типа фиг. 2, образуемой регулярным сеточным разбиением прямоугольника в двух направлениях.

Аппроксимацию вектор-функций $\omega(\alpha_1, \alpha_2)$ осуществляем следующим образом. Четырехугольный КЭ (фиг. 3) разбивается на треугольники ABC и ACD , на которых строятся обычные линейные аппроксимации (такие же аппроксимации строятся для разбиения на треугольники ABD и BDC), результат усредняется, что запишем символически

$$\omega(\alpha_1, \alpha_2) \approx \omega_h(\alpha_1, \alpha_2) = 0,5 (\omega_h^{(ABC; ACD)} + \omega_h^{(ABD; BDC)}) \quad (2.1)$$

В локальной системе координат $(0, \xi, \eta)$, относящейся к треугольникам типа I, II, III, IV (фиг. 3), аппроксимированная функция имеет вид

$$\omega_h(\xi, \eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta \quad (2.2)$$

где a_i — интерполяционные коэффициенты, зависящие от значений функции $\omega^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2)$ в вершинах A, B, C, D ($k = \overline{1, 4}$).

Матрицы $H^{(\mu\nu)}(i; k)$, $H^{(\mu\nu)R}(i; k)$, $K^{(\infty)}(0; 0)$ аппроксимируются на КЭ таким

же образом. В результате после интегрирования билинейной формы типа (1.23) по поверхности КЭ (обозначим ее $E_h(\Delta)$) получим выражение типа

$$E_h^A(\omega_h^{(\mu)}; \omega_h^{(\nu)}) = E_h(\Delta), \quad E_h(\Delta) = 0,5 \sum_{\mu, \nu=1}^4 \omega_h^{(\mu)} H^*(\mu; \nu) \omega_h^{(\nu)} \quad (2.3)$$

где матрице $H^*(\mu; \nu)$ размерности $(2n + m + 3)$ можно придать смысл матрицы жесткости КЭ, $E_h^{(\Delta)}(\dots)$ — обозначение для аппроксимированной энергетической формы; аналогично для формы $R(\omega, \omega)$ имеем аппроксимацию

$$R_h^{(\Delta)}(\omega_h^{(\mu)}; \omega_h^{(\nu)}) = 0,5 \sum_{\mu, \nu=1}^4 \omega_h^{(\mu)} H^{R^*}(\mu; \nu) \omega_h^{(\nu)} \quad (2.4)$$

Процедура вывода разрешающих уравнений в конечномерном пространстве сложностей не вызывает и здесь на ней не останавливаемся.

В качестве результата выпишем дискретный аналог задачи (1.25):

$$A_h \omega_h = \omega_h^2 K_h \omega_h \quad (2.5)$$

а для задачи устойчивости (1.24) он представлен уравнением (1.21), где операторы A_L, R_L, K_L заменяются на их конечномерные аналоги A_h, R_h, K_h .

Из структуры аппроксимаций интегральных форм типа (2.3) нетрудно усмотреть, что уравнения типа (2.5) имеют «классическую» разностную структуру [21], например, действие оператора A_h (или R_h , или K_h) в узле (i, j) (фиг. 2) аналогично действию матричного разностного оператора вида

$$A_{i-1, j+1}^{(i, j)} \omega_{h; i-1, j+1} + A_{i, j+1}^{(i, j)} \omega_{h; i, j+1} + A_{i+1, j+1}^{(i, j)} \omega_{h; i+1, j+1} + A_{i-1, j}^{(i, j)} \omega_{h; i-1, j} + \\ + A_{i, j}^{(i, j)} \omega_{h; i, j} + A_{i+1, j}^{(i, j)} \omega_{h; i+1, j} + A_{i-1, j-1}^{(i, j)} \omega_{h; i-1, j-1} + A_{i, j-1}^{(i, j)} \omega_{h; i, j-1} + A_{i+1, j-1}^{(i, j)} \omega_{h; i+1, j-1} \quad (2.6)$$

($A_{i, j}^{(i, j)}$ — матричные коэффициенты); отвечающего девятиточечному разностному шаблону, построенного для внутреннего узла области (i, j) ($1 < i < M_j$) ($1 < j < N_i$), где M_j, N_i — число узлов на линиях j и i соответственно (фиг. 2), и шеститочечному (в котором $A_{i-1, k}^{(i, j)} = 0, k = j-1, j+1$) шаблону на границе Γ_h области Ω_h .

Анализируя структуру уравнений (2.6), нетрудно понять, вследствие чего здесь достигается значительная экономия памяти ЭВМ. Так, в данном подходе подвергается хранению и обрабатывается только массив матриц коэффициентов $A_{i, j}^{(i, j)}$ (общий объем порядка N_c^2 , где N_c — число разбиений по одной координате), в то время как в пакетах МКЭ требуется хранить кусок матрицы жесткости ленточной (N_c — ширина ленты) слабозаполненной структуры объемом N_c^3/σ , $\sigma \ll N_c$.

На основании свойств оператора A_h , наследующего свойства оператора A_L , аналогично [2, 25] устанавливается разрешимость задач (2.5), (2.6), то есть существование дискретного спектра в аппроксимированных задачах устойчивости и колебаний, причем в общем случае для задачи устойчивости имеем

$$-\infty < \lambda_{h; \min} \leq \dots \leq \lambda_{h; p} \leq \dots \leq \lambda_{h; \max} < \infty \quad (2.7)$$

где p — номер собственного числа в упорядоченном ряду конечного числа собственных значений.

Поскольку в данных исследованиях использовались стандартные процедуры и требования аппроксимации МКЭ [7, 26, 20], то, опираясь на эти работы, нетрудно установить факт самой общей сходимости (в смысле точности по h) аппроксимации собственных значений и вектора $\omega_{h; p}$:

$$|\lambda_p - \lambda_{h; p}| \leq 1(h), \quad \|\omega_p - \omega_{h; p}\|_{II} \leq 1(h) \quad (2.8)$$

при условии, что $\Omega_h \subset \Omega$, а на пересечении областей Ω_h, Ω дискретное решение ω_h продолжено в соответствии с правилами [26].

3. Метод решения. Итерационный процесс решения задачи на минимальное собственное значение (для $\lambda_h > 0$) представим следующими формулами:

$$B_h(\omega_h^{v(k+1)} - \omega_h^{(k)}) = \tau_k(A_h \omega_h^{(k)} - \lambda_h^{(k)} R_h \omega_h^{(k)}) \quad (3.1)$$

$$\omega_h^{(k+1)} = \omega_h^{v(k+1)} / \|\omega_h^{v(k+1)}\|_H, \quad B_h = B_2 B_1 \quad (3.2)$$

где B_1, B_2 — одномерные матричные разностные операторы, получаемые процедурой варьирования конечно-элементной аппроксимации одномерных (то есть зависящих от α_1 или α_2) компонент функционалов типа $E_h(\Delta)$. Как указывалось выше, обращение операторов B_1, B_2 осуществляется векторно-матричной прогонкой [4, 22, 15], в случае замкнутых по одной координате оболочек — циклической прогонкой [4, 15]. Сходимость процесса (3.1), (3.2) доказывается аналогично [7].

Расчет τ_k в (3.1) производится методом наискорейшего спуска.

4. Реализация метода. Представленный метод реализован в виде программного обеспечения для класса непологих анизотропных слоистых оболочек; оно состоит из общих модулей, реализующих алгоритм МКЭ — аппроксимации и интегрирования по схеме (3.1), (3.2), и сменных модулей, в которых отдельно может подготавливаться конкретная информация по оболочке: геометрические параметры, докритические нагрузки, способ закрепления, структура армирования.

В качестве испытательного объекта решалась задача устойчивости при равномерном сжатии непологой цилиндрической шарнирно опертой ортотропной оболочки по модели Тимошенко (то есть $n=1, m=0$, формула (1.1)).

Исходные данные взяты из [23] (обозначения общеприняты): $E_x = 19,6$ ГПа, $E_s = 30,5$ ГПа, $G_{xs} = 4,75$ ГПа, $\mu_{xs} = 0,14$, $G_{xz} = G_{zx} = 0,206$ ГПа, $l/R = 2,37$, $h/R = 0,03156$ (s — дуговая координата).

Результаты решения представлены в таблице, где k — число итераций; V_1 — объем загрузочного модуля (неоптимизированного) в оперативной памяти (здесь и далее в килобайтах); V_2 — объем памяти на жестком диске, отводимый для матриц жесткости (операторов A_h, R_h, B_h); t_s^1 — время счета матриц жесткости в минутах на одной из РС ($i=1$ с 286 и $i=2$ с 386 процессором); t_{st} — время итерирования в минутах; $N \times M$ — число разбиений на КЭ по направлениям Ox и Oz соответственно (число узлов $(N+1) \times (M+1)$).

k	λ_h	$N \times M$	V_1	V_2	t_s^1	t_s^2	t_{st}	t_{st}^2
5—6	11,147	2 × 2	180	30				
5—6	3,465	4 × 4	180	369	2			
3—4	0,414	9 × 9	180	1440	10	3	7	2
3—4	0,367	19 × 19	180	5550	40	12		7

В [23] приведено значение $\lambda = 0,427$ ГПа, отвечающее гипотезе Кирхгофа — Лява. На основе разложения Фурье здесь получено для гипотезы Тимошенко точное аналитическое решение этой задачи $\lambda = 0,206$ ГПа.

Имеющееся расхождение с численным результатом вполне объяснимо: решения краевых задач теории оболочек по гипотезе Тимошенко даже в случае простых нагружений имеют характер решения с погранслоем, то есть характеризуются сильной изменчивостью. Чтобы «уловить» особенности подобного решения на линейных КЭ, требуется число разбиений довести до $N \sim 100, M \sim 20$ (при указанных входных параметрах оболочки).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акоюн А. Б., Куракин В. И., Осауленко В. Н. Алгоритм расчета ортотропных вязкоупругих оболочек в двумерной постановке//В сб.: Мех. констр. из композ. матер. Новосибирск: Наука, 1982. С. 153—154.
2. Клепов А. Н., Куракин В. И. Алгоритмы вариационно-разностного метода решения двумерных задач прочности, устойчивости и колебаний конструктивно-анизотропных оболочек//Прочн. констр. лет. аппаратов: Межвуз. сб. Казань: Из-во КАИ, 1986. С. 49—52.
3. Куракин В. И., Осауленко В. Н. Конечно-разностное решение двумерных уравнений общей теории ортотропных оболочек//В сб.: Прочность конструкций летательных аппаратов. Казань: КАИ, 1985. С. 60—65.
4. Липовцев Ю. В., Куракин В. И. Вариант записи уравнений теории пологих ортотропных оболочек и метод их решения для слоистых областей//В сб.: Диффер. ур-ния. Тула: Из-во Тульск. политех. ин-та, 1984. С. 84—90.
5. Гаращук И. Н., Замула Г. Н., Приказчиков В. Г. Об одном численном методе решения задач устойчивости пластин//Прикл. мех. 1978. Т. 14. N 5. С. 86—91.
6. Дьяконов Е. Г. Модифицированные итерационные методы в задачах на собственные значения//В сб.: Вычисл. мет. лнн. алгебры. 1978. Вып. 3. С. 39—61.
7. Дьяконов Е. Г. Минимизация вычислительной работы. М.: Наука, 1989. 272 с.
8. Дьяконов Е. Г., Николаев И. К. О численном решении некоторых нелинейных задач теории сетчатых оболочек//Тр. III Всесоюз. конференции по числ. методам решения задач теории упругости и пластичности. Новосибирск: СО АН СССР, 1974. С. 85—101.
9. Дьяконов Е. Г., Столярёв Н. Н. О решении нелинейных статических задач теории пластин и оболочек//Числ. методы мех. сплош. среды. Т. 10. N 5. Новосибирск: СО АН СССР, 1979. С. 39—62.
10. Замула Г. Н., Иванов С. Н. Применение метода конечных разностей в задачах устойчивости нестационарно нагреваемых подкрепленных пластин//Уч. зап. ЦАГИ. Т. VIII. N 5. 1977. С. 74—79.
11. Карчевский М. М. Нелинейные задачи теории пластин и оболочек и их сеточные аппроксимации//Изв. высш. учеб. заведений. Математика. 1985. N 10. С. 17—30.
12. Коханенко Ю. В. Решение трехмерной задачи устойчивости при неоднородном докритическом состоянии//Прикл. мех. 1976. Т. 12. N 2. С. 117—119.
13. Нестационарная аэроупругость тонкостенных конструкций./Кармишин А. В., Скурлатов Э. Д., Старцев В. Г. и др. Под ред. А. В. Кармишина. М.: Машиностроение, 1982. 240 с.
14. Преображенский И. Н., Голда Ю. Л., Дмитриев В. Г. Численный метод исследования напряженно-деформированного состояния гибких композитных оболочек вращения, ослабленных вырезами различной формы//Механика композитных материалов. 1985. N 6. С. 1030—1035.
15. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 602 с.
16. Коновалов А. Н. Численное решение задач теории упругости. Новосибирск: Из-во Новосиб. ун-та, 1968. 128 с.
17. Молчанов И. Н. Численные методы решения некоторых задач теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 316 с.
18. Батэ К., Вилсон Э. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
19. Зенкевич О. Применение метода конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
20. Корнеев В. Г. Схемы метода конечных элементов высокого порядка точности. Л.: ЛГУ, 1977. 210 с.
21. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1973. 415 с.
22. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360 с.
23. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
24. Литвинов В. Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями в механике. М.: Наука, 1987. 368 с.
25. Медведев Н. Г., Емельяненко В. В. К обоснованию разрешимости задач теории ортотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью//Прикл. механика. Т. 17. N 12. С. 122—123.
26. Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ч. II//В сб.: Дифф. ур-ния и их применение. Вильнюс: Вып. 8. 1974. С. 4—317.