МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1994

УДК 539.3

© 1994 г. В. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ, Л. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

ИМПУЛЬСНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННЫМ СОСТОЯНИЕМ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Изучены условия существования граничного управления вида $\Sigma\rho_\nu\delta(x - x_\nu)$ ($\delta(\cdot)$ — дельта функция, $\rho_\nu > 0$), реализующего возможность достижения заданного упругого режима в полуплоскости $y > 0$. Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи в терминах неотрицательности квадратичных форм. Решение основано на некоторых интегральных представлениях специальных классов аналитических функций. Рассмотрены примеры.

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругую анизотропную полуплоскость $y > 0$, в точках множества F которой заданы значения напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy}. Ставится задача о таком выборе нормальных и касательных усилий $N(x)$, $T(x)$ ($x \in E \subset \mathbb{R}$) на границе $y = 0$, чтобы в точках множества F значения (σ_x, σ_y, τ_{xy}) совпадали с заданными. Точнее, нужно указать необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи.

2. Функциональные классы Р. Неванлинны [1—3]. Функцию $f(z)$ относят к классу R, если: 1) $f(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости; 2) $\operatorname{Im} f(z) \geq 0$ при $\operatorname{Im} z \geq 0$. Следующая теорема дает интегральное представление функций класса R.

Теорема А (Р. Неванлинна). Для того, чтобы фукнция $f(z)$ принадлежала классу R, необходимо и достаточно, чтобы она допускала следующее аддитивное представление

$$f(z) = \mu z + \nu + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{1 + t^2}\right) d\tau(t) \tag{2.1}$$

где μ, ν — вещественные числа, $\mu \geq 0$, $\tau(t)$ — неубывающая функция со сходящимся интегралом $\int_{-\infty}^{\infty}(1 + t^2)^{-1}\, d\tau(t)$ или, чтобы $f(z)$ допускала представление (с такими же μ, ν):

$$f(z) = \mu z + \nu + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1 + tz}{t - z}\, d\sigma(t) \tag{2.2}$$

где $\sigma(t)$ — неубывающая функция ограниченной вариации на $(-\infty, \infty)$.

Если функцию $\tau(t)$ из (2.1) нормировать условиями $\tau(t) = ½[\tau(t + 0) + \tau(t - 0)]$, $\tau(0) = 0$, то она однозначно определяется R — функцией $f(z)$ и имеет место формула обращения (Перрона — Стилтьеса):

$$\tau(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^t \operatorname{Im} f(\tau + i\varepsilon)\, d\tau \tag{2.3}$$

Кроме того, известно, что функция $y \operatorname{Im} f(iy)$ не убывает на $(0, +\infty)$, а если в (2.1) $\mu = 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau(t) = \lim_{y\uparrow+\infty} [y \operatorname{Im} f(iy)]$$

Обе части этого равенства могут быть бесконечными.

Функцию $f(z)$ отнесем к классу $R[a, b]$ [1, 3], если: *1.* $f(z) \in R$, *2.* $f(z)$ голоморфна и положительна в $(-\infty, a)$, голоморфна и отрицательна в $(b, +\infty)$.

Теорема B. Для того, чтобы функция $f(z)$ принадлежала классу $R[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление $f(z) = \int_a^b d\sigma(t)/(t-z)$, где $\sigma(t)$ — ограниченная неубывающая функция.

Прежде, чем дать понятие об интерполяционной задаче в классе R, условимся о терминологии. Квадратичная форма

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}\xi_\alpha\bar{\xi}_\beta \quad (c_{\alpha\beta} \in \mathrm{C},\ c_{-\alpha} = \bar{c}_\alpha)$$

называется позитивной, если при $|\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2 \neq 0$ форма принимает только положительные значения. Если же можно найти одновременно не равные нулю ξ_α так, что квадратичная форма в общем случае сохраняя знак, тем не менее обращается в нуль, то она называется сингулярной. Термины позитивная форма, сингулярная форма объединяются общим названием ненегативная форма.

Пусть заданы некоторые числовые множества F_z и F_w из верхних полуплоскостей $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} w > 0$ и некоторое отображение $F_z \ni z_\alpha \to w_\alpha \in F_w$. Интерполяционная проблема Неванлинна — Пика в классе R состоит в нахождении условий существования функции $f \in R$ такой, что

$$f(z_\alpha) = w_\alpha \qquad \forall z_\alpha \in F_\alpha \tag{2.4}$$

Теорема C. 1. Для существования фукнции $f(z) \in R$, удовлетворяющей (2.4) необходимо и достаточно, чтобы все квадратичные формы

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} \frac{w_{k\alpha} - \bar{w}_{k\beta}}{z_{k\alpha} - \bar{z}_{k\beta}} \xi_\alpha\bar{\xi}_\beta \tag{2.5}$$

были ненегативны для любых конечных наборов $\{z_{k\alpha}\} \subset F_z$.

2. Если $F_z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n,\ n < +\infty\}$, то можно ограничиться лишь одной квадратичной формой

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{n} \frac{w_\alpha - \bar{w}_\beta}{z_\alpha - \bar{z}_\beta} \xi_\alpha\bar{\xi}_\beta \tag{2.6}$$

3. Для существования функции $f(z) \in R[a, b]$, удовлетворяющей (2.4) необходимо и достаточно, чтобы в R были разрешимы две интерполяционные проблемы: $f_1(z_\alpha) = (z_\alpha - a) w_\alpha$; $f_2(z_\alpha) = (b - z_\alpha) w_\alpha$, $f_1, f_2 \in R$.

4. Если какая-либо из форм (2.5) сингулярна, то функция $f(z)$ определяется единственным образом и отвечающая ей фукнция $\sigma(t)$ является функцией скачков с конечным числом скачков.

3. Управление упругим состоянием. Рассмотрим упругую анизотропную полуплоскость (пластину толщиной h) $y \geq 0$ и множество $F = \{z^{(\alpha)}\}_{\alpha\in A}$ точек открытой полуплоскости $y > 0$ (A — множество индексов). Пусть в точках множества F заданы значения напряжений $\{\sigma_x^{(\alpha)}, \sigma_y^{(\alpha)}, \tau_{xy}^{(\alpha)}\}$. Задача состоит в отыскании условий, при выполнении которых существуют нормальная $N(x)$ и касательная $T(x)$ нагрузки на границе полуплоскости, приводящие в точках множества F к заранее заданным значениям напряжений $\{\sigma_x^{(\alpha)}, \sigma_y^{(\alpha)}, \tau_{xy}^{(\alpha)}\}$. Будем разыскивать $N(x)$, $T(x)$ в классе обобщенных функций вида

$$N(x) = \sum \rho_\nu \delta (x - x_\nu), \quad \rho_\nu > 0, \quad -\infty < x_\nu < \infty \tag{3.1}$$

Согласно [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\,\mathrm{Re}\,[\mu_1^2 \Phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2'(z_2)], \qquad \Phi_j'(z) = d\Phi_j/d_z \\ \sigma_y &= 2\,\mathrm{Re}\,[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2\,\mathrm{Re}\,[\mu_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \Phi_2'(z_2)] \\ z_j &= x + \mu_j y \quad (z = x + iy) \end{aligned} \tag{3.2}$$

где μ_j ($\mathrm{Im}\,\mu_j > 0$) — соответствующие характеристические числа, $\Phi_j(z_j)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного z_j ($j = 1, 2$).

Положим $z_j^{(\alpha)} = x^{(\alpha)} + \mu_j y^{(\alpha)}$, $\Phi_j'(z_j^{(\alpha)}) = a_j^{(\alpha)} + ib_j^{(\alpha)}$, $(a_j^{(\alpha)}, b_j^{(\alpha)} \in \mathbb{R})$. Будем (для упрощения вычислений) считать, что $\mu_j = i\nu_j$ ($\nu_j \in \mathbb{R}$). Из (3.2) следует, что $a_j^{(\alpha)}$ определены однозначно

$$a_j^{(\alpha)} = (-1)^{j+1} \frac{\sigma_x^{(\alpha)} + \nu_{j*}^2 \sigma_y^{(\alpha)}}{2(\nu_2^2 - \nu_1^2)}, \qquad j* = \begin{cases} 2 & (j = 1) \\ 1 & (j = 2) \end{cases} \tag{3.3}$$

а $b_j^{(\alpha)}$ связана зависимостью

$$\nu_1 b_1^{(\alpha)} + \nu_2 b_2^{(\alpha)} = 1/2\, \tau_{xy}^{(\alpha)} \tag{3.4}$$

В [5] установлены соотношения

$$\begin{aligned} \Phi_1'(z_1) &= \frac{1}{2\pi i h (\mu_1 - \mu_2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_2 N(\xi) + T(\xi)}{\xi - z_1} d\xi \\ \Phi_2'(z_2) &= \frac{1}{2\pi i h (\mu_2 - \mu_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_1 N(\xi) + T(\xi)}{\xi - z_2} d\xi \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $N(x)$, $T(x)$ — нормальная и касательная нагрузки на границе $y = 0$. Для заданного множества F пусть F_1, F_2 — соответствующие множества точек $\{z_j = x + \mu_j y: x + iy \in F\}$. Предположим для простоты, что $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ и рассмотрим случай отсутствия касательной нагрузки ($T(x) \equiv 0$). Пусть, далее, $G = F_1 \cup F_2$, $G_w = \{w_j^{(\alpha)}\}_{\alpha \in A}$, где

$$w_j^{(\alpha)} = (-1)^j 2\pi i h \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_{j*}} (a_j^{(\alpha)} + ib_j^{(\alpha)}) \tag{3.6}$$

Поставленную выше задачу управления можно сформулировать как проблему моментов [1, 3, 6]: найти условия существования неубывающей функции $\sigma(x)$ ($d\sigma(x) = N(x)\,dx$) ограниченной вариации (меры) такой, что

$$w_j^{(\alpha)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - z_j^{(\alpha)}}, \qquad z_j^{(\alpha)} \in G \tag{3.7}$$

Условия разрешимости задачи управления относительно конечного множества F указаны в теореме 1.

Теорема 1. Положим $z_{2\alpha-1} := z_1^{(\alpha)}$, $z_{2\alpha} := z_2^{(\alpha)}$, $w_{2\alpha-1} := w_1^{(\alpha)}$, $w_{2\alpha} := w_2^{(\alpha)}$. Для разрешимости задачи управления граничной обобщенной нагрузкой $N(x)$ вида (3.1) необходимо и достаточно, чтобы существовали такие значения $b_j^{(\alpha)}$, для которых квадратичная форма (2.6) была бы ненегативной, где $n = 2\,\mathrm{card}\,F$.

Доказательство. 1. Если задача разрешима, то существует нормальная нагрузка $N(x)$ из класса продифференцированных мер такая, что в каждой точке $z_\alpha \in F$ напряжения принимают заданные значения $\{\sigma_x^{(\alpha)}, \sigma_y^{(\alpha)}, \tau_{xy}^{(\alpha)}\}$. Следовательно, значения $\Phi_j'(z_j)$, найденные из (3.5), связаны с $\{\sigma_x^{(\alpha)}, \sigma_y^{(\alpha)}, \tau_{xy}^{(\alpha)}\}$ формулами (3.2). Тем самым, для существующей функции $\sigma(x)$ имеют место соотношения (3.7).

2. Пусть форма (2.6) ненегативна. По теореме *C* существует функция $\Phi(z) \in R$:

$$\Phi(z) = \mu z + \nu + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + tz}{t - z}\, d\tau(t), \qquad d\tau(t) \geq 0$$

которая дает решение интерполяционной проблемы $\Phi(z_\alpha) = w_\alpha$. Так как функцию $\tau(t)$ можно выбрать сосредоточенной на ограниченном множестве действительной оси, то $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + t^2)\, d\tau(t) < \infty$. Следуя замечанию [1, стр. 118], положим

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} (1 + \nu^2)\, d\tau(\nu), \qquad \mu = 0, \qquad \nu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1 + t^2}\, d\sigma(t)$$

откуда

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(u)}{u - z}, \qquad d\sigma(u) \geq 0, \qquad \operatorname{var} \sigma < \infty$$

$$w_j^{(\alpha)} = \Phi(z_j^{(\alpha)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - z_j^{(\alpha)}}$$

и интерполяционная проблема (3.7) разрешима, а вместе с ней разрешима и поставленная задача.

4. Примеры. *1.* Пусть множество F состоит из одной точки $z = x + iy$, $y > 0$. Тогда $z_1 = x + i\nu_1 y$, $z_2 = x + i\nu_2 y$. Пусть $\nu_2 > \nu_1$, а тензор напряжений в точке z такой: σ_x, $\sigma_y = s\sigma_x$, $\tau_{xy} = 0$ ($s \in \mathbf{R}$). По формулам (3.3), (3.7):

$$a_1 = \sigma_x \beta_2, \qquad a_2 = -\sigma_x \beta_1, \qquad b_2 = -\varkappa b_1$$

$$w_1 = A(b_1 - i\sigma_x \beta_2), \qquad w_2 = A(b_1 - iA\sigma_x \beta_1 \varkappa^{-1})$$

$$\beta_j = \frac{1 + s\nu_j^2}{2(\nu_2^2 - \nu_1^2)}, \qquad \varkappa = \nu_1/\nu_2, \qquad A = 2\pi h(1 - \varkappa)$$

Квадратичная форма (2.6) имеет вид

$$\frac{w_1 - \overline{w}_1}{z_1 - \overline{z}_1} |\xi_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{w_1 - \overline{w}_2}{z_1 - \overline{z}_2} \xi_1 \overline{\xi}_2\right] + \frac{w_2 - \overline{w}_2}{z_2 - \overline{z}_2} |\xi_a|^2 =$$

$$= -\frac{A\sigma_x}{\nu_1 y} \left[|\xi_1 + \xi_2|^2 + s\,|\nu_2 \xi_1 + \nu_1 \xi_2|^2\right]$$

Если $s < 0$, то квадратичная форма не может сохранять постоянный знак. Если $s \geq 0$, $\sigma_x < 0$, то условия теоремы 1 выполнены и управление $N(x)$ из класса (3.1) возможно. Однако, простейшее управление $N(u) = \rho\delta(u - x_1)$, $x_1 \in \mathbf{R}$, $\rho > 0$ невозможно. Действительно, в этом случае

$$\frac{\rho}{x_1 - x - i\nu_1 y} = Ab_1 - iA\sigma_x \beta_2, \qquad \frac{\rho}{x_1 - x - i\nu_2 y} = Ab_1 - iA\sigma_x \beta_1 \varkappa^{-1}$$

и тогда

$$\frac{\rho(x_1 - x)}{(x_1 - x)^2 + \nu_1^2 y^2} = \frac{\rho(x_1 - x)}{(x_1 - x)^2 + \nu_2^2 y^2} = b_1$$

что возможно лишь при $x_1 = x$, $b_1 = 0$. Но в этом случае $\rho = -A\sigma_x\beta_2\nu_1 y = -A\sigma_x\beta_1\nu_2 y\varkappa^{-1}$, откуда следует, что $\nu_1 = \nu_2$.

Рассмотрим теперь функцию $N(x) = \rho_1\delta(x - x_1) + \rho_2\delta(x - x_2)$, $x_1 < x_2$, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$. Моментные равенства (3.7) имеют вид

$$\frac{\rho_1}{x - x_1 - i\nu_1 y} + \frac{\rho_2}{x_2 - x - i\nu_1 y} = Ab_1 - iA\sigma_x\beta_2$$

$$\frac{\rho_1}{x_1 - x - i\nu_2 y} + \frac{\rho_2}{x_2 - x - i\nu_2 y} = Ab_1 - iA\sigma_x\beta_1\varkappa^{-1} \qquad (4.1)$$

Положим $x_2 - x = -(x_1 - x)$, отделим действительные и мнимые части в (4.1). Простой анализ показывает, что в условиях $\nu_2 > \nu_1$:

$$x_1 = x - y/\sqrt{5}, \quad x_2 = x + y/\sqrt{5}$$

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{A\sigma_x y(1 + s\nu_1^2)(1 + s\nu_2^2)}{4s\nu_1(\nu_2^2 - \nu_1^2)} > 0$$

Замечание. Если в предыдущем примере $\sigma_y = 0$, то непосредственные вычисления показывают, что задача управления разрешима тогда и только тогда, когда $\sigma_x \leq 0$.

2. Рассмотрим M точек $z_j = x_j + iy$, лежащих на горизонтальной прямой. Тогда $z_1^{(j)} = x_j + i\nu_1 y$, $z_2^{(j)} = x_j + i\nu_2 y$. Пусть $\sigma_x = \mathrm{const}$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$ — желательные значения напряжений во всех M точках. Из (3.3), (3.4) следует

$$a_1^{(j)} = A\sigma_x, \quad a_2^{(j)} = -a_1^{(j)}, \quad b_2^{(j)} = -\varkappa b_1^{(j)}, \quad A = [2(\nu_2^2 - \nu_1^2)]^{-1}$$

Положим $\lambda := 2\pi h(1 - \varkappa)$, $b_j := b_1^{(j)}$. Тогда $w_1^{(j)} = \lambda(b_1^{(j)} - iA\sigma_x)$, $w_2^{(j)} = \lambda(b_1^{(j)} - iA\sigma_x\varkappa^{-1})$.

Удобно представить квадратичную форму (2.6) суммой четырех выражений, содержащих разности $w_1^{(j)} - \overline{w}_1^{(k)}$, $w_2^{(j)} - \overline{w}_2^{(k)}$, $w_1^{(j)} - \overline{w}_2^{(k)}$, $w_2^{(j)} - \overline{w}_1^{(k)}$. Тогда

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2M} \frac{w_\alpha - \overline{w}_\beta}{z_\alpha - \overline{z}_\beta} = \lambda\Bigg\{\sum_{j,k=1}^{M} \frac{b_j - b_k - 2iA\sigma_x}{x_j - x_k + 2i\nu_1 y}\xi_j^{(1)}\overline{\xi}_k^{(1)} + \sum_{j,k=1}^{M} \frac{b_j - b_k - 2iA\sigma_x\varkappa^{-1}}{x_j - x_k + 2i\nu_2 y}\xi_j^{(2)}\overline{\xi}_k^{(2)} +$$

$$+ \sum_{j,k=1}^{M} \frac{b_j - b_k - iA(1 + \varkappa^{-1})\sigma_x}{x_j - x_k + i(\nu_1 + \nu_2)y}\xi_j^{(1)}\overline{\xi}_k^{(2)} + \sum_{j,k=1}^{M} \frac{b_j - b_k - iA(1 + \varkappa^{-1})\sigma_x}{x_j - x_k + i(\nu_1 + \nu_2)y}\xi_j^{(2)}\overline{\xi}_k^{(1)}\Bigg\}$$

Напомним, что значения $b_1, \ldots, b_M$ можно выбирать произвольно. Потребуем, чтобы при всех $1 \leq j, k \leq M$ $(b_j - b_k))/A\sigma_x = -(x_j - x_k)/\nu_1 y$. Несложно проверить, что эта система уравнений непротиворечива. При таком выборе $b_1, \ldots, b_M$ квадратичная форма совпадает со значением

$$-\frac{\lambda A\sigma_x}{\nu_1 y}\left|\sum_{j=1}^{M}(\xi_j^{(1)} + \xi_j^{(2)}\right|^2$$

и является ненегативной при $\sigma_x < 0$.

Далее кратко рассмотрим случай, локализованной в $[a, b] \subset \mathbf{R}$ нагрузки.

Теорема 2. Для того, чтобы существовала обобщенная граничная нагрузка $N(x)$ $(N(x)\,dx = d\sigma(x))$, приложенная к участку $-\infty < a \leq x \leq b < +\infty$ и такая, что $1)$ $d\sigma(x) \geq 0$; $2)$ выполнены соотношения $w_j^{(\alpha)} = \int_a^b d\sigma(t)/(t - t_j^{\alpha})$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, M)$ с заданными $\sigma_x^{(\alpha)}$, $\sigma_y^{(\alpha)}$, $\tau_{xy}^{(\alpha)}$, необходимо и достаточно, чтобы при каком-нибудь выборе $b_1^{(\alpha)}$ из (3.4) были ненегативны квадратичные формы

$$\sum_{j,k=1}^{2M} \frac{(z_j - a) w_j - (\bar{z}_k - a) \bar{w}_k}{z_j - \bar{z}_k} \xi_j \bar{\xi}_k$$

$$\sum_{j,k=1}^{2M} \frac{(b - z_j) w_j - (b - \bar{z}_k) \bar{w}_k}{z_j - \bar{z}_k} \xi_j \bar{\xi}_k$$

Способ обозначения z_j, z_k введен выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. М.: ГИФМЛ, 1961. 310 с.
2. *Кац И. С., Крейн М. Г.* *R* — функции — аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя//В кн.: Ф. Аткинсон. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир. 1968. С. 629—648.
3. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. 552 с.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1. М.: ИЛ, 1962. 896 с.
5. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
6. *Shohat J. A., Tamarkin J. D.* The problem of moments. New York: Am. Math. Sci., 1943. 140 p.

Сумы

Поступила в редакцию
15.I.1994