МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1994

УДК 539.3:534.1

 Л. И. СЛАБКИЙ

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗАМКНУТОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ

Предложен метод нахождения частот собственных колебаний замкнутой круговой цилиндрической оболочки для краевых условий, соответствующих обращению в нуль на торцах цилиндра внутренних силовых факторов: осевой силы, изгибающего момента в направлении образующей и обобщенных сдвигающей и поперечной сил, определяемых в смысле Кирхгофа. В качестве уравнений движения элемента оболочки принята полная система точных уравнений равновесия В. З. Власова [1], дополненных инерционными членами.

Система уравнений, описывающих собственные колебания упругой изотропной однородной круговой цилиндрической оболочки, принимается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} + \nu\frac{\partial w}{\partial\alpha} - c^2\left(\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3} - \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta^2}\right) - \frac{1-\nu^2}{Eh}R^2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial w}{\partial\beta} - \frac{3-\nu}{2}c^2\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^2\partial\beta} - \frac{1-\nu^2}{Eh}R^2\mu\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

$$\nu\frac{\partial u}{\partial\alpha} - c^2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial\alpha^3} - \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial\alpha\partial\beta^2}\right) + \frac{\partial v}{\partial\beta} - \frac{3-\nu}{2}c^2\frac{\partial^3 v}{\partial\alpha^2\partial\beta} + c^2\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right)w + w + \frac{1-\nu^2}{Eh}R^2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Здесь α, β — координаты срединной поверхности оболочки, соответствующие линиям ее главных кривизн; u, v, w — смещения точки срединной поверхности оболочки в тангенциальных и нормальном к поверхности направлениях, u — вдоль линии $\beta = \mathrm{const}$, v — вдоль линии $\alpha = \mathrm{const}$, w — вдоль внешней нормали; μ — масса элемента единичной площади, вырезанного из стенки оболочки сечениями, нормальными к срединной поверхности по линиям главных кривизн; $c^2 = h^2/12R^2$; R — радиус дуги окружности поперечного круга в сечении срединной поверхности, нормальном к оси цилиндра; h — толщина оболочки; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга; t — время.

Граничные условия в случае свободных краев имеют вид

$$N_\alpha = 0,\ T_\alpha = S_\alpha + M_{\alpha\beta}/R = 0 \qquad (2)$$

$$M_\alpha = 0,\ P_\alpha = Q_\alpha + \dot{M}_{\alpha\beta}/R = 0$$

где N_α и M_α — внутренние осевая сила и изгибающий момент вдоль образующей цилиндра; S_α, Q_α, $M_{\alpha\beta}$ — внутренние сдвигающая, поперечная силы и крутящий момент в сечении, параллельном торцу оболочки ($\alpha = \mathrm{const}$); $S_\alpha + M_{\alpha\beta}/R$, $Q_\alpha + M_{\alpha\beta}/R$ — обобщенные в смысле Кирхгофа сдвигающая и поперечная силы, точка означает производную по β [3].

После подстановки в (2) выражений для внутренних сил и момента через смещения точек срединной поверхности согласно [1] система граничных условий ($\alpha = 0, l/R$) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w\right) - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \beta} + (1 + 2c^2)\frac{\partial v}{\partial \alpha} - 3c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \nu \frac{\partial v}{\partial \beta} - \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right) w = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - (1 - \nu)\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + (3 - 2\nu)\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} - (4 - 3\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta^2} = 0$$

где l — длина оболочки.

Решение системы (1) может быть записано в форме

$$u(\alpha, \beta, t) = u(\alpha, \beta)\cos(\omega t + \varepsilon)$$

$$v(\alpha, \beta, t) = v(\alpha, \beta)\cos(\omega t + \varepsilon) \tag{4}$$

$$w(\alpha, \beta, t) = w(\alpha, \beta)\cos(\omega t + \varepsilon)$$

где ω — круговая частота колебаний, ε — постоянная.

Функции $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ должны удовлетворять следующей системе:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \nu \frac{\partial w}{\partial \alpha} - c^2\left(\frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} - \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta^2}\right) +$$

$$+ \frac{1-\nu^2}{Eh} R^2 \mu \omega^2 u = 0$$

$$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{3-\nu}{2}c^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + \frac{1-\nu^2}{Eh}R^2 \mu \omega^2 v = 0 \tag{5}$$

$$\nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} - c^2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^3} - \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial \alpha \partial \beta^2}\right) + \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{3-\nu}{2}c^2 \frac{\partial^3 v}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + c^2\left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1\right) w + w - \frac{1-\nu^2}{Eh}R^2 \mu \omega^2 w = 0$$

Решения системы (5) отыскиваются в виде [2]:

$$u(\alpha, \beta) = u(\alpha)\sin m\beta, \quad v(\alpha, \beta) = v(\alpha)\cos m\beta, \quad w(\alpha, \beta) = w(\alpha)\sin m\beta \tag{6}$$

где m — число волн в окружном направлении.

Подстановкой (6) в систему (5) получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} - \frac{1-\nu}{2}m^2 u - \frac{1+\nu}{2}m\frac{dv}{d\alpha} + \nu \frac{dw}{d\alpha} - c^2\left(\frac{d^3 w}{d\alpha^3} + \frac{1-\nu}{2}m^2 \frac{dw}{d\alpha}\right) +$$

$$+ \frac{1-\nu^2}{Eh}R^2 \mu \omega^2 u = 0$$

$$\frac{1+\nu}{2}m\frac{du}{d\alpha} - m^2 v + \frac{1-\nu}{2}\frac{d^2 v}{d\alpha^2} + mw - \frac{3-\nu}{2}c^2 m \frac{d^2 w}{d\alpha^2} + \frac{1-\nu^2}{Eh}R^2 \mu \omega^2 v = 0 \tag{7}$$

$$\nu \frac{du}{d\alpha} - c^2 \left(\frac{d^3u}{d\alpha^3} + \frac{1-\nu}{2} m^2 \frac{du}{d\alpha} \right) - mv + \frac{3-\nu}{2} c^2 m \frac{d^2v}{d\alpha^2} + c^2 \left(\frac{d^4w}{d\alpha^4} - 2m^2 \frac{d^2w}{d\alpha^2} + \right.$$

$$\left. + m^4 w - 2m^2 w + w \right) + w - \frac{1-\nu^2}{Eh} R^2 \mu \omega^2 w = 0$$

Если принять линейно независимые частные решения системы (7) в виде [2]:

$$u = \xi e^{n\alpha}, \quad v = \eta e^{n\alpha}, \quad w = \zeta e^{n\alpha} \tag{8}$$

где n — число полуволн в продольном направлении, то подстановкой (8) в (7) можно получить систему из трех алгебраических уравнений относительно ξ, η и ζ:

$$\begin{gathered}\left(n^2 - \frac{1-\nu}{2} m^2 + \frac{1-\nu^2}{Eh} R^2 \mu \omega^2 \right) \xi - \frac{1+\nu}{2} mn\eta + \\ + \left[\nu n - c^2 \left(n^3 + \frac{1-\nu^2}{2} m^2 n \right) \right] \zeta = 0 \\ \frac{1+\nu}{2} mn\xi + \left[\left(\frac{1-\nu}{2} n^2 - m^2 \right) + \frac{1-\nu^2}{Eh} R^2 \mu \omega^2 \right) \right] \eta + \left(m - \frac{3-\nu}{2} c^2 mn^2 \right) \zeta = 0 \\ \left[\nu n - c^2 \left(n^3 + \frac{1-\nu}{2} m^2 n \right) \right] \xi + \left(\frac{3-\nu}{2} c^2 mn^2 - m \right) \eta + \\ + \left[c^2 (n^4 - 2m^2 n^2 + m^4 - 2m^2 + 1) + 1 - \frac{1-\nu^2}{Eh} R^2 \mu \omega^2 \right] \zeta = 0\end{gathered} \tag{9}$$

С введением обозначений

$$a_1 = -\frac{1-\nu}{2} m^2 + \frac{1-\nu^2}{Eh} R^2 \mu \omega^2, \; a_2 = -\frac{1+\nu}{2} m, \; a_3 = \nu - c^2 \frac{1-\nu}{2} m^2, \; a_4 = -c^2$$

$$a_5 = \frac{1-\nu^2}{Eh} R^2 \mu \omega^2 - m^2, \quad a_6 = \frac{1-\nu}{2}, \quad a_7 = -\frac{3-\nu}{2} c^2 m, \quad a_8 = a_3, \quad a_9 = -a_7$$

$$a_{10} = c^2 m^4 - 2c^2 m^2 + c^2 + 1 - \frac{1-\nu^2}{Eh} R^2 \mu \omega^2, \quad a_{11} = -2m^2 c^2$$

определитель системы (9) можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} n^2 + a_1 & a_2 n & a_3 n + a_4 n^3 \\ -a_2 n & a_5 + a_6 n^2 & m + a_7 n^2 \\ a_4 n^3 + a_8 n & a_9 n^2 - m & -a_4 n^4 + a_{10} + a_{11} n^2 \end{vmatrix} \tag{10}$$

Из условия существования нетривиальных решений системы этот определитель должен быть приравнен нулю

$$\begin{gathered}-a_4 (1 + a_4) a_6 n^8 + [a_6 a_{11} - a_4 (a_1 a_6 + a_5) + a_2 a_4 a_7 - a_2 a_4 a_9 - \\ - a_4 (a_5 a_4 + a_3 a_6) - a_4 a_6 a_8 - a_2^2 a_4 - a_7 a_9] n^6 + [(a_1 a_6 + a_5) a_{11} + \\ + a_6 a_{10} - a_1 a_4 a_5 + 2 a_2 a_4 m + a_2 a_7 a_8 - a_2 a_3 a_9 - a_3 a_4 a_5 - \\ - (a_4 a_5 + a_3 a_6) a_8 + a_{11} a_2^2 - a_9 m + a_7 m - a_1 a_7 a_9] n^4 + [a_{10} (a_1 a_6 + a_5) +\end{gathered} \tag{11}$$

$$+ a_1a_5a_{11} + a_2a_8m + a_2a_3m - a_3a_5a_8 + a_{10}a_2^2 - a_1a_9m + a_1a_7m +$$

$$+ m^2]\, n^2 + a_1a_5a_{10} + a_1m^2 = 0$$

Если обозначить $k_i = n^2$, то полином (11) будет иметь вид

$$d_4k^4 + d_3k^3 + d_2k^2 + d_1k + d_5 = 0 \tag{12}$$

Уравнения $n_j^2 = k_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ можно решить для каждого k_i и получить восемь различных величин n_j $(j = 1, \ldots, 8)$. Если каждое из этих n_j подставить в систему (9), то для каждого j $(j = 1, \ldots, 8)$ можно получить систему вида

$$\left(n_j^2 - \frac{1-\nu}{2} m^2 + \frac{1-\nu^2}{Eh} R^2\mu\omega^2 \right) \xi_j - \frac{1+\nu}{2} n_j\eta_j +$$

$$+ \left[\nu n_j - c^2 \left(n_j^3 + \frac{1-\nu}{2} m^2 n_j \right) \right] \zeta_j = 0$$

$$\frac{1+\nu}{2} mn_j\xi_j + \left(\frac{1-\nu}{2} n_j^2 - m^2 + \frac{1-\nu^2}{Eh} R^2\mu\omega^2 \right) \eta_j +$$

$$+ \left(m - \frac{3-\nu}{2} c^2 mn_j \right) \zeta_j = 0 \tag{13}$$

$$\left[\nu n_j - c^2 \left(n_j^3 + \frac{1-\nu}{2} m^2 n_j \right) \right] \xi_j + \left(\frac{3-\nu}{2} c^2 mn_j^2 - m \right) \eta_j + \left[c^2 (n_j^4 - 2m^2n_j^2 + \right.$$

$$\left. + m^4 - 2m^2 + 1) + 1 - \frac{1-\nu^2}{Eh} R^2\mu\omega^2 \right] \zeta_j = 0$$

Таким образом для каждого j определяются три числа ξ_j, η_j, ζ_j. Следовательно, можно получить восемь частных решений

$$u_j(\alpha) = \xi_j e^{n_j\alpha}, \quad v_j(\alpha) = \eta_j e^{n_j\alpha}, \quad w_j(\alpha) = \zeta_j e^{n_j\alpha} \tag{14}$$

Если принять $\mathbf{K}_s = \mathrm{H}(u_j, v_j, w_j)$ $(s = 1,\ 2,\ 3)$, тогда общее решение системы (3) будет

$$\mathbf{K}_1 = \sum_{j=1}^{8} C_j u_j, \quad \mathbf{K}_2 = \sum_{j=1}^{8} C_j v_j, \quad \mathbf{K}_3 = \sum_{j=1}^{8} C_j w_j \tag{15}$$

Для удобства целесообразно записать $\mathbf{K}_1 = u$, $\mathbf{K}_2 = v$, $\mathbf{K}_3 = w$. Коэффициенты при векторах $\mathbf{K}_s$ подбираются так, чтобы $u(\alpha)$, $v(\alpha)$, $w(\alpha)$ удовлетворяли граничным условиям. Таким образом

$$u(\alpha) = \sum_{j=1}^{8} C_j u_j = \sum_{j=1}^{8} C_j \xi_j e^{n_j\alpha} \tag{16}$$

$$v(\alpha) = \sum_{j=1}^{8} C_j v_j = \sum_{j=1}^{8} C_j \eta_j e^{n_j\alpha}, \quad w(\alpha) = \sum_{j=1}^{8} C_j w_j = \sum_{j=1}^{8} C_j \zeta_j e^{n_j\alpha}$$

После подстановки (6), (16) в (3) граничные условия представляются в виде

$$\sum_{j=1}^{8} (m_{\xi_j} + m_j\eta_j + c^2 mn_j\zeta_j)\, C_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{8} (m\xi_j + m_j\eta_j + c^2 mn_j\zeta_j)\, e^{n_j l} C_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{8} \left\{ n_j^2\xi_j + \frac{1-\nu}{2} m^2\xi_j - \frac{3-\nu}{2} mn_j\eta_j - [n_j^3 + (\nu - 2)\, m^2 n_j]\, \zeta_j \right\} C_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{8} \left\{ n_j^2\xi_j + \frac{1-\nu}{2} m^2\xi_j - \frac{3-\nu}{2} mn_j\eta_j - [n_j^3 + (\nu-2)\, m^2 n_j]\, \zeta_j \right\} e^{n_j l} C_j = 0 \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{8} [m_j\xi_j - \nu m\eta_j - (n_j^2 - \nu m^2)\, \zeta_j]\, C_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{8} [m_j\xi_j - \nu m\eta_j - (n_j^2 - \nu m^2)\, \zeta_j]\, e^{n_j l} C_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{8} [n_j\xi_j - \nu m\eta_j + (\nu - c^2 n_j^2)\, \zeta_j]\, C_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{8} [n_j\xi_j - \nu m\eta_j + (\nu - c^2 n_j^2)\, \zeta_j]\, e^{n_j l} C_j = 0$$

Приравнивание нулю определителя системы (17) дает искомое уравнение для определения собственных частот оболочки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов В. З.* Избранные труды. Т. 1. М.: АН СССР, 1962. 528 с.
2. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек М.: Физматгиз, 1978. 359 с.
3. *Flügge W.* Statik und Dynamik der Schalen. 2 Aufl. Berlin: Springer — Verlag, 1957. 286 s.

Москва

Поступила в редакцию
15.X.1993