

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. И. Т. СЕЛЕЗОВ

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СТЕРЖНЯХ, ПЛАСТИНАХ И ОБОЛОЧКАХ

Модели теории колебаний пластин и оболочек как математические аппроксимации краевой задачи эластодинамики получили развитие от работ Коши [1] и Пуассона [2], посвященным эластодинамике пластин. Для построения аппроксимаций применялся метод степенных рядов — разложение по малой толщинной координате, не требующий привлечения вспомогательных допущений. Однако, построение моделей на основе уравнений динамической теории упругости посредством указанного метода или посредством обычных асимптотических разложений приводило к параболическим моделям (классическая теория пластин Кирхгофа, классическая теория оболочек Кирхгофа—Лява).

В 1916 г. Тимошенко построил новую корректную феноменологическую модель поперечных колебаний стержней, учитывающую инерцию вращения и деформации поперечного сдвига [3], более общую, чем классическая модель поперечных колебаний Бернулли — Эйлера, и эта модель, как впоследствии было установлено, оказалась гиперболической. На случай поперечных колебаний пластин эта модель была обобщена в [4, 5]. Исследованиям колебаний и устойчивости стержней, пластин и оболочек посвящены работы Э. И. Григолюка, включающие как построение новых моделей, так и анализ и обобщение фундаментальных исследований и наследия С. П. Тимошенко [6, 7]. Дальнейшее продвижение в построении математических моделей связано с развитием эластостатики оболочек [8, 9]. Волновые гиперболические модели эластодинамики пластин на основе метода степенных рядов были развиты в [10], где показано, что, если при усечении получаемых бесконечных систем дифференциальных операторов удерживать все производные до определенного порядка, то это приводит к гиперболическим аппроксимациям. Это дало возможность получить как первое приближение модель Тимошенко и построить более общую гиперболическую модель во втором приближении в случае антисимметричных деформаций относительно срединной поверхности. В случае симметричных деформаций развитый подход дает в первом приближении модель обобщенного плоского напряженного состояния и более общую гиперболическую модель во втором приближении.

В данной статье представлена теория построения вырожденных по поперечной координате моделей, основанная на методе степенных рядов, исходя из краевой задачи для произвольной системы дифференциальных уравнений в частных производных. Приведено построение уточненных теорий пластин для описания планарных и поперечных волн. Приложение теории демонстрируется на задаче о неустановившейся реакции пластины на поверхности жидкости на импульсное возбуждение.

1. Вырождение по малым координатам и параметрам как метод построения упрощенных моделей. Пусть в n -мерном евклидовом пространстве E^n выбрана система координат x^q ($q = \overline{1, n}$). Рассмотрим математическую модель, представленную конечной системой дифференциальных уравнений в частных производных в E^n , для которой ставится краевая задача в области Ω (или начально-краевая задача в области $\Omega \times [0, X^m]$, $X^m > 0$), ограниченной гиперповерхностями $x^s = \pm h^s$, $h^s > 0$ (индекс s — фиксированный): $\Omega = \{x \in E^n \mid -\infty < (x^1, x^2, \dots, x^{s-1}, x^{s+1}, \dots, x^n) < \infty, -h^s \leq x^s \leq h^s\}$. Такое тело будем называть гиперслоем, или просто слоем, или оболочкой. Предполагается, что модель зависит от конечного числа ν параметров ε_r , $r = \overline{1, \nu}$. Формально такая модель

может быть представлена в виде системы k уравнений p -го порядка с k неизвестными u_i , $i = \overline{1, k}$ и n аргументами:

$$F_i(x^1, \dots, x^n; u_1, \dots, u_k; \underbrace{u_{1,1}, \dots, u_{k,n}}_p; \dots, \underbrace{u_{1,1\dots 1}, \dots, u_{k,n\dots n}}_p) \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_v) = P_i(x^1, \dots, x^n) \quad \text{в } \Omega$$

и системы краевых условий на гиперповерхностях $x^s = -h^s$, $x^s = h^s$.

$$f(x^1, \dots, x^n; u_1, \dots, u_k; \underbrace{u_{1,1}, \dots, u_{k,n\dots n}}_{(p-1)}; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_v) \Big|_{x^s = \pm h^s} = Q_j^\pm, j = \overline{1, (k \cdot p)}. \quad (1.2)$$

Здесь индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующей координате, в общем случае $p \neq n$; F_i зависит от всех возможных частных производных до p -го порядка включительно; положение гиперповерхности может зависеть от искомого u_i и их производных. Решение краевой задачи (1.1), (1.2) состоит в отыскании функций u_i , обращающих уравнения (1.1) в тождества, и выборе из множества этих функций таких, которые удовлетворяют условиям (1.2).

Рассмотрим случай, когда дифференциальные уравнения и краевые условия представляются в виде суммы линейной и нелинейной частей, причем линейный оператор имеет порядок p , который выше, чем порядок p_1 нелинейного оператора

$$a_{lq}(x^1, \dots, x^n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_v) \frac{\partial^q u_l}{\partial x^{l(\alpha_1)} \dots \partial x^{n(\alpha_n)}} + F_l(x^1, \dots, x^n, u_1, \dots, u_k; \frac{\partial u_1}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial u_k}{\partial x^n}; \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2}, \dots, \frac{\partial^{p_1} u_1}{\partial x^{1(p_1)}}, \dots, \frac{\partial^{p_1} u_k}{\partial x^{n(p_1)}}; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_v) = P_l, \quad \text{в } \Omega \quad i = \overline{1, k}, \quad l = \overline{1, k}, \quad (1.3)$$

$$q = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad q = \overline{1, p}, \quad p_1 = 1, \overline{p-1}$$

$$\left\{ b_{jq}(x^1, \dots, x^n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_v) \frac{\partial^q u_l}{\partial x^{l(\alpha_1)} \dots \partial x^{n(\alpha_n)}} + f_l(x^1, \dots, u_1, \dots; \frac{\partial^{p_2} u_k}{\partial x^{n(p_2)}}; \varepsilon_1, \dots) \right\}_{x^s = \pm h^s} = Q_j^\pm \quad (1.4)$$

$$j = p \cdot k, \quad q = \overline{1, (p-1)}, \quad p_2 = \overline{1, (p-2)}, \quad l = \overline{1, k}$$

В отличие от модели общего вида (1.1), (1.2) модель (1.3), (1.4) может быть классифицирована по типу уравнений (1.3). Если система уравнений (1.3) гиперболического типа, то такую модель будем называть гиперболической. Если этой модели соответствует некоторая физическая модель, то последнюю также будем называть гиперболической.

В случае бесконечной области Ω гиперболическая модель всегда имеет решение в виде распространяющихся слабых разрывов (разрывы высших производных). Соответствующая физическая модель в этом случае описывает распространение возмущений с конечными скоростями, т. е. удовлетворяет принципу конечности скорости распространения возмущений, утверждающему, что в реальных физических средах или системах любое возмущение распространяется с конечной скоростью, определяемой свойствами среды или системы [11]. Математическая формулировка этого принципа утверждает, что решение задачи Коши с финитными

начальными данными финитно по пространственным переменным при каждом фиксированном значении временной координаты [12].

Необходимо отметить, что в некоторых случаях главная часть оператора гиперболического уравнения может не быть ответственной за перенос энергии, а определяющим будет гиперболический оператор более низкого порядка [13]. Известно также, что при некоторых краевых условиях задача гиперболической системы уравнений может не описывать распространение возмущений, т. е. возможно заперение волн [14].

Необходимо отметить, что большинство известных принципов, по-видимому, может быть включено в более общий принцип — принцип причинности, который связывает явления или изменения состояния системы с совокупностью условий, порождающих это явление [15].

Математическую модель, которая следует из начальной (исходной) модели как вырожденная по некоторым параметрам, будем называть упрощенной (вырожденной) математической моделью, или аппроксимацией.

Определение 1. Вырожденной по параметру ε_r (по координате x^s) моделью будем называть такую, которая следует из (1.3), (1.4) при $\varepsilon_r \rightarrow 0$ ($x^s \rightarrow 0$). Аналогично можно ввести вырожденные по нескольким параметрам или координатам модели. Вырожденная модель не зависит от параметра вырождения.

Представляет интерес рассмотрение случаев, когда $\varepsilon_r \rightarrow \varepsilon^0$, $0 < \varepsilon^0 \ll 1$ или $|x_s| \leq h_s$, $0 < h_s \ll 1$. Такие модели близки к вырожденным. При этом в связи с наличием малых параметров ε_r или h_s появляется возможность аналитического построения упрощенной модели (аппроксимации), заменяющей исходную модель в окрестности параметра вырождения или поверхности вырождения. Такие модели в дальнейшем будем называть квазивырожденными.

Определение 2. Если при вырождении по параметру или координате гиперболическая система дифференциальных уравнений (1.3) остается гиперболической, то такое вырождение назовем гиперболическим. В противном случае вырождение будем называть негиперболическим. В соответствии с этим определением будем различать гиперболические модели и соответствующие им гиперболически вырожденные или квазивырожденные модели. Если имеет место гиперболическое вырождение, то будем говорить, что выполняется условие предельности [11].

Смысл введенных здесь понятий состоит в том, что построение вырожденных или квазивырожденных по координате моделей приводит к понижению размерности задачи. В случае вырождения по параметрам задача может существенно упрощаться: снижение порядка системы дифференциальных уравнений, частичная декомпозиция и так далее.

2. Гиперболические аппроксимации распространения волновых мод. Рассмотрим гиперслою $\Omega \in E^n$, образованный гиперповерхностями $x^s = \pm h^s$, $h^s > 0$, $\Omega = \{-\infty < (x^1, x^2, \dots, x^{s-1}, x^{s+1}, \dots, x^n) < \infty, -h^s \leq x^s \leq h^s\}$. Координата x^s предполагается ортогональной остальным координатам, тогда $x^s = 0$ является срединной поверхностью. Рассмотрим в E^n систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающую поведение некоторого физического континуума

$$a_{i\alpha} (x^1, \dots, x^n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \frac{\partial^q u_i}{\partial x^{\alpha_1} \dots \partial x^{\alpha_n}} = P_i \quad (2.1)$$

$$i = \overline{1, k}, \quad l = \overline{1, k}, \quad q = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad q = \overline{1, p}$$

граничные условия вида

$$\left\{ b_{i\alpha} (x^1, \dots, x^n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \frac{\partial^q u_i}{\partial x^{\alpha_1} \dots \partial x^{\alpha_n}} \right\}_{x^s = \pm h^s} = Q_i \quad (2.2)$$

$$(j = pk, q = 1, \overline{(p-1)}, l = \overline{1, k})$$

и начальные условия, которые задаются для каждой искомой функции $f(x_1, x_2, x_3, t)$ и ее производной по времени df/dt :

$$f(x_1, x_2, x_3, t) |_{t=0} = f^0(x_1, x_2, x_3) \quad (2.3)$$

$$df(x_1, x_2, x_3, t)/dt |_{t=0} = f^1(x_1, x_2, x_3) \quad (2.4)$$

Анализ начальных условий не представляет принципиальных трудностей и в дальнейшем не приводится. Для развития рассматриваемой теории достаточно принять только одно допущение

$$(2h/l) \ll 1 \quad (2.5)$$

где l характеризует возмущения полевых функций вдоль всех координат за исключением x^s . В случае гладкости искомого функций они могут быть представлены в виде степенных рядов по x^s в окрестности гиперповерхности $x^s = 0$.

Подстановка разложений приводит к бесконечным системам дифференциальных уравнений в частных производных. Усечение этих систем различными возможными способами приводит к набору аппроксимаций, т. е. к множеству квазивырожденных аппроксимаций различного типа — гиперболического, параболического, эллиптического и смешанного типа. В связи с этим возникает вопрос: при каких условиях квази-вырожденная система сохраняет тот же тип, что и начальная невырожденная система?

В неограниченных и полуограниченных областях волновые задачи характеризуются распространением конечного числа волновых мод. Например, в классической линейной теории упругости имеются две несвязанные волновые моды — дилатационные волны (P -волны) и сдвиговые волны (S -волны). В случае более сложной модели с учетом нелинейностей, неоднородностей реологических свойств и т. д., эти волновые моды являются слабо или сильно связанными. В задачах волноводного распространения обычно существует бесконечный дискретный спектр собственных значений и соответствующих собственных функций, описывающих распространение бесконечного набора волновых мод вдоль волновода. Эти моды являются несвязанными только в простейшем случае. В случае связанных взаимодействующих мод, как правило необходимо упрощать бесконечную систему посредством уменьшения количества учитываемых мод. Ниже продемонстрируем на основе описанного алгоритма построение упрощенных моделей для упругого слоя, т. е. построение уточненных теорий пластин.

Приведем физическую постановку задачи. Введем прямоугольную декартову систему координат x_1, x_2, x_3 такую, что ось Ox_3 направлена вертикально вверх. В такой системе координат рассматривается бесконечный упругий слой толщиной $2h$, который в недеформированном состоянии характеризуется срединной плоскостью $x_3 = 0$. Тогда планарные координаты x_1, x_2 отсчитываются в этой плоскости. Область, занимаемую слоем, обозначим $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid -\infty < x_n < \infty, n = 1, 2, -h \leq x_3 \leq h\}$. На лицевых плоскостях $x_3 = -h$ и $x_3 = +h$ в общем случае задаются нормальные и касательные нагрузки как функции x_1, x_2 и t . В деформированном состоянии срединная плоскость переходит в срединную поверхность, а лицевые плоскости — в лицевые поверхности. Как это предполагается в линейной теории малых перемещений, граничные условия в возмущенном состоянии с точностью до малых более высокого порядка не отличаются от невозмущенных, поэтому могут быть снесены на невозмущенную плоскость. Рассмотрим как наиболее характерную вторую краевую задачу теории упругости, когда на лицевых поверхностях задаются нормальные и касательные нагрузки. Другие случаи граничных условий могут быть рассмотрены аналогично.

Математическая постановка соответствующей начально-краевой задачи в перемещениях $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ представляется следующим образом. Найти вектор-функцию $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ как решение уравнений в $\Omega \times [0, T]$, $T > 0$:

$$\nabla^2 u_1 + (1 + \lambda/G) \partial_1 (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \partial_{tt} u_1$$

$$\nabla^2 u_2 + (1 + \lambda/G) \partial_2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \partial_{tt} u_2$$

$$\nabla^2 u_3 + (1 + \lambda/G) \partial_3 (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \partial_{tt} u_3 \quad (2.6)$$

при граничных

$$\sigma_{33} \Big|_{x_3=\xi/2} = q^+(x_1, x_2, t), \quad \sigma_{33} \Big|_{x_3=-\xi/2} = q^-(x_1, x_2, t) \quad (2.7)$$

$$\sigma_{3i} \Big|_{x_3=\xi/2} = p_i^+(x_1, x_2, t), \quad \sigma_{3i} \Big|_{x_3=-\xi/2} = p_i^-(x_1, x_2, t) \quad (i = 1, 2) \quad (2.8)$$

и начальных условиях

$$u_k \Big|_{t=0} = 0, \quad \partial_t u_k \Big|_{t=0} = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2.9)$$

$$\sigma_{kk} = (\lambda/G) (\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2u_{k,k} \quad (\text{по } k \text{ не суммировать})$$

$$\sigma_{kp} = u_{k,p} + u_{p,k} \quad (k, p = 1, 2, 3; k \neq p)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = u_{k,k} = e + u_{3,3} \quad (2.10)$$

$$u_3 = w, \quad \square_s = c_s^2 \nabla^2 - \partial_{tt}, \quad \square_e = c_e^2 \nabla^2 - \partial_{tt}$$

$$c_s = \sqrt{G/\rho}, \quad c_e = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho}$$

Все величины в (2.6)–(2.10) безразмерны. Они введены в соответствии с формулами (звездочки опускаются)

$$(x_i^*, u_i^*) = \frac{1}{l} (x_i, u_i), \quad t^* = \frac{c_s}{l} t, \quad c^* = \frac{c}{c_s}$$

$$(\sigma_{kl}^*, q^*, p_i^*) = \frac{1}{G} (\sigma_{kl}, q, p), \quad \frac{2h}{l} = \xi$$

Следующий существенный шаг связан с введением предположения о малости величины ξ , и, следовательно, о малости поперечной координаты, т. е.

$$(2h/l) = \xi \ll 1 \Rightarrow |x_3|/l \sim O(\xi) \quad (2.11)$$

Из (2.11) следует, что рассматриваются достаточно плавные возмущения по планарным координатам x_1, x_2 и по времени t .

Компоненты вектора перемещений представляются в виде степенных рядов по x_3 :

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{v=0}^{\infty} u_{iv}(x_1, x_2, t) \cdot x_3^v \quad (2.12)$$

Предполагается, что функции u_{iv} дифференцируемы столько раз, сколько потребуется, и все производные от u_{iv} непрерывны, а ряды (2.12) равномерно сходятся. Сходимость этих рядов существенно зависит от величины ξ ;

характеризующей изменение полей по координатам x_1, x_2, t . Чем более плавным будет это изменение, тем больше будет l и меньше ξ и тем быстрее будут сходиться ряды (2.12).

Подставляя (2.12) в (2.6)—(2.10), после ряда преобразований получаем

$$\sum_{v=0}^{\infty} [(\nu+1) u_{1(\nu+1)} + w_{(\nu), 1}] x_3^{\nu} \Big|_{x_3=\pm l/2\xi} = p_1^{\pm} \quad (2.13)$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} [(\nu+1) u_{2(\nu+1)} + w_{(\nu), 2}] x_3^{\nu} \Big|_{x_3=\pm l/2\xi} = p_2^{\pm} \quad (2.14)$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda}{G} u_{1(\nu), 1} + \frac{\lambda}{G} u_{2(\nu), 2} + (\nu+1) \left(2 + \frac{\lambda}{G} \right) w_{(\nu+1)} \right] x_3^{\nu} \Big|_{x_3=\pm l/2\xi} = q^{\pm} \quad (2.15)$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} \{ \square_s u_{1(\nu)} + (1 + \lambda/G) u_{1(\nu), 11} + (\nu+2)(\nu+1) u_{1(\nu+2)} + \\ + (1 + \lambda/G) u_{2(\nu), 12} + (\nu+1)(1 + \lambda/G) w_{(\nu+1), 1} \} x_3^{\nu} = 0 \quad (2.16)$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} \{ (1 + \lambda/G) u_{1(\nu), 12} + \square_s u_{2(\nu)} + (1 + \lambda/G) u_{2(\nu), 22} + \\ + (\nu+2)(\nu+1) u_{2(\nu+2)} + (\nu+1)(1 + \lambda/G) w_{(\nu+1), 2} \} x_3^{\nu} = 0 \quad (2.17)$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} \{ (\nu+1)(1 + \lambda/G) u_{1(\nu+1), 1} + (\nu+1)(1 + \lambda/G) u_{2(\nu+1), 2} + \\ + \square_s w_{(\nu)} + (\nu+2)(\nu+1)(2 + \lambda/G) w_{(\nu+2)} \} x_3^{\nu} = 0 \quad (2.18)$$

Уравнениям (2.16)—(2.18) можно удовлетворить, приравнявая нулю коэффициент при каждой степени x_3 . Отметим, что можно дифференцировать эти соотношения по x_3 и полагать $x_3 = 0$. Эти два подхода приводят к одинаковому результату.

Уравнения (2.13)—(2.15) удобно попарно сложить и вычесть. С учетом этого получаем из (2.13)—(2.15) две независимые бесконечные системы дифференциальных уравнений, описывающих симметричные и несимметричные колебания упругого слоя. Для симметричных колебаний имеем

$$\sum_{s=0}^{\infty} [(2s+2) u_{1(2s+2)} + w_{(2s+1), 1}] 2^{-(2s+1)} \xi^{2s+1} = \frac{1}{2} (p_1^+ - p_1^-)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} [(2s+2) u_{2(2s+2)} + w_{(2s+1), 2}] 2^{-(2s+1)} \xi^{2s+1} = \frac{1}{2} (p_2^+ - p_2^-)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda}{G} u_{1(2s), 1} + \frac{\lambda}{G} u_{2(2s), 2} + (2s+1)(2 + \lambda/G) w_{(2s+1)} \right] 2^{-2s} \xi^{2s} = \frac{1}{2} (q^+ + q^-)$$

$$\square_s u_{1(2s)} + (1 + \lambda/G) u_{1(2s), 11} + (2s+2)(2s+1) u_{1(2s+2)} + \\ + (1 + \lambda/G) u_{2(2s), 12} + (2s+1)(1 + \lambda/G) w_{(2s+1), 1} = 0$$

$$(1 + \lambda/G) u_{1(2s), 12} + \square_s u_{2(2s)} + (1 + \lambda/G) u_{2(2s), 22} + (2s+2) \times \\ \times (2s+1) u_{2(2s+2)} + (2s+1)(1 + \lambda/G) w_{(2s+1), 2} = 0 \quad (2.19)$$

$$(2s+2)(1+\lambda/G)u_{1(2s+2),1} + (2s+2)(1+\lambda/G)u_{2(2s+2),2} + \square_s w_{(2s+1)} + (2s+3)(2s+2)(2+\lambda/G)w_{(2s+3)} = 0$$

Для несимметричных колебаний

$$\sum_{s=0}^{\infty} [(2s+1)u_{1(2s+1)} + w_{(2s),1}] 2^{-2s}\xi^{2s} = \frac{1}{2}(p_1^+ + p_1^-)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} [(2s+1)u_{2(2s+1)} + w_{(2s),2}] 2^{-2s}\xi^{2s} = \frac{1}{2}(p_2^+ + p_2^-)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left[\lambda G u_{1(2s+1),1} + \lambda G u_{2(2s+1),2} + (2s+2)(2+\lambda/G)w_{(2s+2)} \right] \times$$

$$\times 2^{-(2s+1)}\xi^{2s+1} = \frac{1}{2}(q^+ - q^-) \quad (2.20)$$

$$\square_s u_{1(2s+1)} + (1+\lambda/G)u_{1(2s+1),11} + (2s+3)(2s+2)u_{1(2s+3)} +$$

$$+ (1+\lambda/G)u_{1(2s+1),12} + (2s+2)(1+\lambda/G)w_{(2s+2),1} = 0$$

$$(1+\lambda/G)u_{2(2s+1),12} + \square_s u_{2(2s+1)} + (1+\lambda/G)u_{2(2s+1),22} + (2s+3) \times$$

$$\times (2s+2)u_{2(2s+3)} + (2s+2)(1+\lambda/G)w_{(2s+2),2} = 0$$

$$(2s+1)(1+\lambda/G)u_{1(2s+1),1} + (2s+1)(1+\lambda/G)u_{2(2s+1),2} +$$

$$+ \square_s w_{(2s)} + (2s+2)(2s+1)(2+\lambda/G)w_{(2s+2)} = 0$$

Начальные условия после разложения функций в правых частях в ряды формулируются на основе (2.9), они имеют такой же вид для каждой искомой функции, как и (2.9), и здесь не приводятся.

Системы уравнений (2.19) и (2.20) можно привести к более простому виду, если вместо u_1 и u_2 ввести e по (2.10) и сделать ряд преобразований. Поставленная задача сводится таким образом к двум бесконечным системам, но размерность задачи уменьшена на единицу. Окончательно имеем для указанных двух случаев: симметричные колебания

$$e(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{s=0}^{\infty} e_{(2s)}(x_1, x_2, t) x_3^{2s} \quad (2.21)$$

$$w(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{s=0}^{\infty} w_{(2s+1)}(x_1, x_2, t) x_3^{2s+1} \quad (2.22)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{2s+1} \square_s e_{(2s)} - \frac{\lambda}{G} \nabla^2 w_{(2s+1)} \right] 2^{-(2s+1)}\xi^{2s+1} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{2}(p_1^+ - p_1^-) + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{2}(p_2^+ - p_2^-) \quad (2.23)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} [(\lambda/G)e_{(2s)} + (2s+1)(2+\lambda/G)w_{(2s+1)}] 2^{-2s}\xi^{2s} = \frac{1}{2}(q^+ + q^-)$$

$$e_{(2s+2)} = \frac{-1}{(2s+1)(2s+2)} \square_s e_{(2s)} - \frac{1}{2s+2} (1+\lambda/G) \nabla^2 w_{(2s+1)}$$

$$w_{2s+3} = \frac{1}{(2s+1)(2s+2)(2s+3)} \frac{1+\lambda/G}{2+\lambda/G} \square_e e_{2s} +$$

$$+ \frac{1}{(2s+2)(2s+3)(2+\lambda/G)} \times [(1+\lambda/G)^2 \nabla^2 + \square_s] w_{(2s+1)} \quad (2.24)$$

несимметричные колебания

$$e(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{s=0}^{\infty} e_{(2s+1)}(x_1, x_2, t) x_3^{2s+1} \quad (2.25)$$

$$w(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{s=0}^{\infty} w_{(2s)}(x_1, x_2, t) x_3^{2s} \quad (2.26)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} [(2s+1) e_{(2s+1)} + \nabla^2 w_{(2s)}] 2^{-2s} \xi^{2s} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{2} (p_1^+ + p_1^-) + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{2} (p_2^+ + p_2^-)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left[-e_{(2s+1)} - \frac{-1}{2s+1} \square_s w_{(2s)} \right] 2^{-(2s+1)} \xi^{2s+1} = \frac{1}{2} (q^+ - q^-) \quad (2.27)$$

$$w_{(2s+2)} = -\frac{1}{2s+2} \frac{1+\lambda/G}{2+\lambda/G} e_{2s+1} - \frac{1}{(2s+1)(2s+2)(2+\lambda/G)} \square_s w_{(2s)}$$

$$e_{(2s+3)} = \frac{1}{(2s+2)(2s+3)} \left[-\square_e + \frac{(1+\lambda/G)}{(2+\lambda/G)} \nabla^2 \right] e_{2s+1} +$$

$$+ \frac{1}{(2s+1)(2s+2)(2s+3)} \frac{1+\lambda/G}{2+\lambda/G} \nabla^2 \square_s w_{(2s)} \quad (2.28)$$

Бесконечные ряды (2.12), коэффициенты которых определяются из замкнутых систем уравнений (2.21)—(2.24) и (2.25)—(2.28), дают точное решение задачи. Но вместо трехмерной задачи (2.6)—(2.9) теперь решаются две двухмерные задачи (2.21)—(2.24) и (2.25)—(2.28). Если ограничиться конечным числом членов в рядах (2.21), (2.22) и (2.25), (2.26), то системы (2.23), (2.24) и (2.27), (2.28) будут конечными и замкнутыми, а получаемые при этом аппроксимации — квазивырожденными моделями. Ясно, что из соотношений (2.21)—(2.24) и (2.25)—(2.28) можно получить бесконечное число различных аппроксимаций. Нашей задачей здесь является построение квазивырожденных по координате гиперболических моделей. Справедливо следующее утверждение: в случае второй краевой задачи эластодинамики для построения гиперболических аппроксимаций k -го порядка достаточно при усечении систем (2.21)—(2.24) и (2.25)—(2.28) сохранить все члены до ξ^{2k+1} включительно. В случае осесимметричных движений полого кругового цилиндра аналогичный результат установлен в [16].

Из уравнений (2.21)—(2.24) в первом приближении следует одномодовая аппроксимация — обобщенное плоское напряженное состояние

$$\left(-\xi a_1' \nabla^2 + \xi a_2' \partial^2 / \partial t^2 \right) e_0 = 0 \quad (2.29)$$

во втором приближении — более точная двухмодовая аппроксимация — новая модель

$$\left(-\xi a_1' \nabla^2 + \xi a_2' \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \xi^3 b_1' \nabla^2 \nabla^2 - \xi^3 b_2' \nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \xi^3 b_3' \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right) e_0 = 0 \quad (2.30)$$

Коэффициенты в (2.29) и (2.30) имеют вид

$$a_1' = \frac{4}{1+2\nu}, \quad a_2' = 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu}, \quad b_1' = \frac{8}{1-2\nu} \frac{1}{3!}$$

$$b_2' = \left(\frac{6}{1-2\nu} + 2 \frac{2-\nu}{1-\nu} + 4 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{1}{3!}, \quad b_3' = \frac{5-8\nu}{1-2\nu} \frac{1}{3!} \quad (2.31)$$

Из системы (2.25)–(2.28) в первом приближении следует двухмодовая аппроксимация, соответствующая модели Тимошенко, полученной на основе физических допущений:

$$\left\{ \xi \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \xi^2 a_1 \nabla^2 \nabla^2 - \xi^3 a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + \xi^3 a_3 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right\} w_0 =$$

$$= \left\{ 1 - \xi^2 d_1 \nabla^2 + \xi^2 d_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} (q_1 - q_2) \quad (2.32)$$

во втором приближении — более точная трехмодовая аппроксимация — новая модель

$$\left\{ \xi \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \xi^2 a_1 \nabla^2 \nabla^2 - \xi^3 a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + \xi^3 a_3 \frac{\partial^4}{\partial t^4} - \xi^5 b_1 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 + \right.$$

$$\left. + \xi^5 b_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \nabla^2 - \xi^5 b_3 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \nabla^2 + \xi^5 b_4 \frac{\partial^6}{\partial t^6} \right\} w_0 = \left\{ 1 - \xi^2 d_1 \nabla^2 + \xi^2 d_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \right.$$

$$\left. + \xi^4 d_3 \nabla^2 \nabla^2 - \xi^4 d_4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + \xi^4 d_5 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right\} (q_1 - q_2) \quad (2.33)$$

Коэффициенты в (2.32) и (2.33) определяются по формулам

$$a_1 = \frac{1}{3} \frac{\lambda + G}{\lambda + 2G}, \quad a_2 = \frac{1}{3!} \frac{3\lambda + 4G}{\lambda + 2G}, \quad a_3 = \frac{1}{4!} \frac{3\lambda + 7G}{\lambda + 2G}$$

$$b_1 = \frac{1}{10 \cdot 3!} \frac{\lambda + G}{\lambda + 2G}, \quad b_2 = \frac{1}{5!} \frac{4\lambda^2 + 14G\lambda + 11G^2}{(\lambda + 2G)^2}$$

$$b_3 = \frac{1}{4 \cdot 5!} \frac{9\lambda^2 + 39G\lambda + 3G^2}{(\lambda + 2G)^2}, \quad b_4 = \frac{1}{2^4 \cdot 5!} \frac{5\lambda^2 + 30G\lambda + 41G^2}{(\lambda + 2G)^2} \quad (2.34)$$

$$d_1 = \frac{1}{8} \frac{3\lambda + 4G}{\lambda + 2G}, \quad d_2 = \frac{1}{8}, \quad d_3 = \frac{1}{2^4 \cdot 4!} \frac{5\lambda^2 + 16G\lambda + 12G^2}{(\lambda + 2G)^2}$$

$$d_4 = \frac{1}{8 \cdot 4!} \frac{2\lambda^2 + 8G\lambda + 7G^2}{(\lambda + 2G)^2}$$

Увеличение числа удерживаемых членов при применении метода степенных рядов приводит к обогащению спектра в сторону более высоких частот. Как видно, Коши в 1828 г. имел возможность построить гиперболические аппроксимации, которые интуитивно получены С. П. Тимошенко в 1916 г.

3. Некоторые приложения уточненных теорий. В качестве примера рассмотрим задачу о неустановившейся реакции упругой пластины на поверхности жидкости конечной глубины $z = -d$ на действие нормально приложенного локализованного импульса $p = p_0 p_1(x) p_2(t)$ в момент времени $t = 0$. Изгибные движения пластины

описываются уточненной теорией [7], жидкость предполагается невязкой сжимаемой, состояние — изэнтропическим. Соответствующая начально-краевая задача формулируется следующим образом: найти решения системы

$$D\psi_{xx} - k^2 Gh (\psi + w_x) = \rho_1 I \psi_{tt} \quad (3.1)$$

$$k^2 Gh (w_{xx} + \psi_x) - \rho_2 w - \rho_2 \varphi_t |_{z=0} + p = \rho_1 h w_{tt} \quad (3.2)$$

$$\varphi_{xx} + \varphi_{zz} - c_0^{-2} \varphi_{tt} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad z \in [-d, 0], \quad t \in [0, \infty) \quad (3.3)$$

при граничных условиях

$$w_t = \varphi_z |_{z=0}, \quad \varphi_z |_{z=-d} = 0 \quad (3.4)$$

и начальных условиях при $t = 0$:

$$\psi = 0, \quad \psi_t = 0, \quad w = 0, \quad w_t = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi_t = 0 \quad (3.5)$$

Граничные условия (3.4) выражают равенство вертикальных компонент скорости пластины и жидкости на поверхности раздела и условие непроницаемости на дне.

Здесь $\psi(x, t)$ — угол поворота пластины, φ — потенциал скоростей жидкости, ρ_1 и ρ_2 — соответственно плотность пластины и жидкости, $k^2 = 2/(2 - \nu + \sqrt{0,5 - \nu})$ — коэффициент сдвига [7], $I = h^3/12$ — момент инерции поперечного сечения, c_0 — скорость звука в жидкости. В (3.1)—(3.5) и далее введены безразмерные величины по формулам (звездочки опускаются):

$$(x^*, z^*, w^*, h^*, d^*) = \frac{1}{h} (x, z, w, h, d), \quad t^* = \frac{\sqrt{gh}}{h} t$$

$$c_0^* = \frac{c_0}{\sqrt{gh}}, \quad \varphi^* = \frac{\varphi}{h \sqrt{gh}}, \quad p_0^* = \frac{p_0}{gh\rho_1}, \quad I^* = \frac{I}{h^3}$$

$$D^* = \frac{D}{gh^4\rho_1}, \quad G^* = \frac{G}{gh\rho_1}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{gh\rho_1}, \quad \rho_i^* = \frac{\rho_i}{\rho_1} \quad (i = 1, 2)$$

Приведенная постановка (3.1)—(3.5) включает и частные случаи. Так, для несжимаемой жидкости ($c_0 \rightarrow \infty$) вместо волнового уравнения (3.3) решается уравнение Лапласа $\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0$; движение пластины описывается классической теорией Кирхгофа

$$Dw_{xxxx} + \rho_1 w_{tt} + \rho_2 w + \rho_2 \varphi_t |_{z=0} = p \quad (3.6)$$

движение пластины описывается уравнением с учетом только инерции вращения

$$Dw_{xxxx} - \rho_1 I w_{ttxx} + \rho_1 h w_{tt} + \rho_2 w + \rho_2 \varphi_t |_{z=0} = p$$

$$\psi + w_x = 0. \quad (3.7)$$

движение пластины описывается уравнением с учетом только деформации поперечного сдвига

$$Dw_{xxxx} - \frac{\rho_1 D}{k^2 G} w_{ttxx} + \rho_1 h w_{tt} + \left(1 - \frac{D}{k^2 Gh} \partial_{xx}\right) (\rho_2 w + \rho_2 \varphi_t |_{z=0} - p) = 0$$

$$D\psi_{xx} - k^2 Gh (\psi + w_x) = 0 \quad (3.8)$$

Для решения задачи применяются интегральные преобразования Фурье по координате x и Лапласа по времени t :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-hx} dx, \quad \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Переход из пространства лапласовых изображений в пространство оригиналов в одних случаях осуществляется с помощью таблиц [17]. В других случаях оригинал находится приведением интеграла типа Римана—Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{f}(s) e^{st} ds$$

к преобразованию Фурье [18]:

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re}(\bar{f}(s)) + \operatorname{Im}(\bar{f}(s))] e^{it} dt, \quad s = c + it$$

В общем случае решение рассматриваемой задачи (3.1)—(3.8) имеет вид

$$w = \frac{p_0}{4\pi^2 i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_1(x) \bar{p}_2(s) \eta_0 \kappa_1 e^{-hx+st}}{\kappa_2 (C_1 s^4 + 2C_2 s^2 + C_3^2)} dx ds \quad (3.9)$$

Здесь $\eta_0 = (\kappa^2 + s^2/c_0^2)$, а выбор остальных параметров определяется моделью. Так, для модели Кирхгофа (3.6) имеем

$$\kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = \rho_1 h \eta_0 + \rho_2 \operatorname{cth} \eta_0 d, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 1/2, \quad C_3^2 = \eta_0 (D\kappa^4 + \rho_2)/\kappa_2.$$

В случае пластины Тимошенко (3.1), (3.2):

$$\kappa_1 = 1 + \kappa^2 D/(k^2 Gh) + s^2 \rho_1 I/(k^2 Gh)$$

$$\kappa_2 = \frac{\rho_2 I}{k^2 G} \left(\eta_0 + \frac{\rho_1}{h} \operatorname{cth} \eta_0 d \right), \quad C_1 = 1$$

$$C_2 = \left\{ \left[\rho_1 h \left(1 + \frac{\kappa^2 D}{k^2 Gh} \right) + \rho_1 I \left(\frac{\rho_2}{k^2 Gh} + \kappa^2 \right) \right] \eta_0 + \right.$$

$$\left. + \rho_2 \left(1 + \kappa^2 D/(k^2 Gh) \right) \operatorname{cth} \eta_0 d \right\} / (2\kappa_2)$$

$$C_3^2 = \eta_0 [D\kappa^4 + \rho_2 (1 + D\kappa^2/(k^2 Gh))] / \kappa_2$$

Для модели с учетом инерции вращения (3.7):

$$\kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = (\rho_1 I \kappa^2 + \rho_1 h) \eta_0 + \rho_2 \operatorname{cth} \eta_0 d$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1/2, \quad C_3^2 = \eta_0 (D\kappa^4 + \rho_2)/\kappa_2$$

Для модели с учетом деформаций поперечного сдвига (3.8):

$$\kappa_1 = 1 + \frac{D\kappa^2}{k^2 Gh}, \quad \kappa_2 = \left(1 + \frac{D\kappa^2}{k^2 Gh} \right) (\rho_1 h \eta_0 + \rho_2 \operatorname{cth} \eta_0 d)$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1/2, \quad C_3^2 = \eta_0 [D\kappa^4 + \rho_2 (1 + D\kappa^2/(k^2 Gh))] / \kappa_2$$

Нормальная компонента тензора

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2G) \partial u / \partial x + \lambda w / \partial z \quad (3.10)$$

где компонента u вектора перемещения имеет вид [7]: для модели Кирхгофа $u = -z\partial w/\partial x$, а в остальных случаях $u = z\psi$. Тогда выражение (3.10) с учетом (3.3) приводится к виду

$$\sigma_{xx} = \frac{z\rho_0(\lambda + 2G)}{4\pi^2 i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_1(x) \bar{p}_2(s) \eta_0 \kappa^2 e^{bx+st}}{\kappa_2 (C_1 s^4 + 2C_2 s^2 + C_3^2)} dx ds \quad (3.11)$$

Для несжимаемой жидкости ($\eta_0 = |\kappa|$) переход из пространства лапласовых изображений в пространство оригиналов осуществляется по таблицам [17] на основе теоремы свертки $\bar{f}_1(s) \bar{f}_2(s) \rightarrow f_1(t) * f_2(t)$. В этом случае имеем следующие выражения:

$$\frac{\bar{p}_2(s)}{s^2 + C_3^2} \rightarrow \frac{1}{C_3} \int_0^t p_2(t - \tau) \sin C_3 \tau d\tau \quad (3.12)$$

$$\frac{\bar{p}_2(s)}{s^4 + 2C_2 s^2 + C_3^2} \rightarrow \begin{cases} 0,5C_2^{-3/2} \int_0^t p_2(t - \tau) (\sin C_2^{1/2} \tau - \\ - C_2^{1/2} \tau \cos C_2^{1/2} \tau) d\tau, & C_2^2 - C_3^2 = 0 \\ 0,25C_2^{-3/2} (C_2^2 - C_3^2)^{-1/2} \int_0^t p_2(t - \tau) (s_1 \sin s_2 \tau - \\ - s_2 \sin s_1 \tau) d\tau, & C_2^2 - C_3^2 > 0 \end{cases}$$

$$s_{1,2}^2 = C_2 \pm \sqrt{C_2^2 - C_3^2}$$

Рассмотрим случай, когда нагрузка по пространственной и временной координатам изменяется по законам

$$p_1(x) = x_0^2/(x_0^2 + x^2), \quad p_2(t) = \{t/a, 0 \leq t \leq a; e^{-b(t-a)}, t > a\}$$

Тогда для несжимаемой жидкости из (3.11) с учетом (3.12) получаем выражение нормальной компоненты тензора напряжения в частных случаях (3.6)—(3.8):

$$\sigma_{xx} = \frac{z\rho_0(\lambda + 2G)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa^3 P_1(x) f(t)}{\kappa^2} \cos \kappa x dx, \quad P_1(x) = \kappa_0 e^{-\kappa_0 x}$$

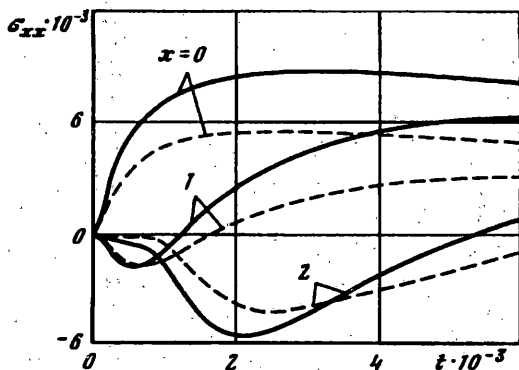
$$f(t) = \frac{1}{C_3 a} \left(t - \frac{\sin C_3 t}{C_3} \right) + f_1(t), \quad f_1(t) = 0, \quad t \leq a$$

$$f_1(t) = -\frac{1}{C_3 a} \left(t_1 - \frac{\sin C_3 t_1}{C_3} \right) + \frac{1}{C_3^2 (b^2 + C_3^2)} (b \sin C_3 t_1 - C_3 \cos C_3 t_1) +$$

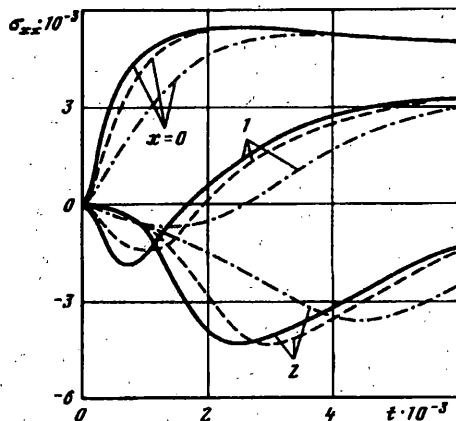
$$+ \frac{e^{-bt_1}}{C_3 (b^2 + C_3^2)} - \frac{1 - \cos C_3 t_1}{C_3^2}, \quad t_1 = t - a > 0$$

Численные расчеты нормального напряжения σ_{xx} проводились при следующих значениях параметров: $\rho_1 = 910 \text{ кг/м}^3$; $\rho_2 = 1000 \text{ кг/м}^3$; $c_0 = 1400 \text{ м/с}$; $\nu = 0,33$; $E = 5,88 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$; $d = 20 \text{ м}$; $h = 1 \text{ м}$; $\kappa_0 = 1$; $a = 10^{-4}$; $b = 10^4$; $z = h/2$.

Результаты расчетов представлены на фиг. 1, 2. На фиг. 1 приведено сравнение расчетов σ_{xx} в случае, когда пластина описывается моделью Кирхгофа с учетом (штриховая линия) и без учета жидкости (сплошная линия). Как видим, учет жидкости приводит к значительному уменьшению нормального напряжения в пластине. Из анализа графиков, приведенных на фиг. 2, следует, что в начальный момент времени учет инерции вращения (штриховая линия) несколько уменьшает



Фиг. 1



Фиг. 2

σ_{xx} в пластине на поверхности жидкости по сравнению с расчетами, когда пластина описывается классической теорией Кирхгофа (сплошная линия). Учет деформации сдвига (штрихпунктирная линия) существенно уменьшает величину σ_{xx} , и кроме того, приводит к сдвигу максимальных значений. Отсюда следует, что модель, удовлетворяющая принципу конечности скорости распространения возмущений, т. е. в данном линейном случае — принципу гиперболичности [11], описывает существенно отличные качественные эффекты распространения волн в начальной стадии переходной временной реакции.

В заключение отметим, что проблема построения волновых гиперболических моделей как обобщений известных параболических моделей, предсказывающих бесконечную скорость распространения возмущений в реальных средах, рассматривалась в [11, 19]. С этой точки зрения построение гиперболической модели Тимошенко [3] можно рассматривать как обобщение классической параболической модели изгибных колебаний стержней Бернулли — Эйлера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cauchy A. L. Sur l'équilibre et le mouvement d'une lame solide // Exercices Math. 1828. V. 3. P. 245—326.
2. Poisson S. D. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques // Mém. Acad. Roy. Sci. 1829. V. 8. P. 357—570.
3. Timoshenko S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bar // Phil. Mag. 1921. Ser. 6. V. 41. N 245. P. 744—746.
4. Уфлянд Я. С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 3. С. 287—300.
5. Mindlin R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // J. Appl. Mech. 1951. V. 18. N 1. P. 31—58.
6. Григолюк Э. И. Степан Прокофьевич Тимошенко (1878—1972) // М.: Изд-во Моск. ун-та. НИИ Механики МГУ. Науч. труды. № 47. 1977. 60 с.
7. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М.: АН СССР, 1973. 272 с. (Итоги науки и техники / ВИНТИ Механика деформируемых тел, т. 5).
8. Krauss F. Über die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie schwach deformierter Schalen // Math. Annalen. 1929. V. 101. N 1. P. 61—92.
9. Кильчевский Н. А. Обобщение современной теории оболочек. ПММ. 1939. Т. 2. № 4. С. 427—438.
10. Селезов И. Т. Дослідження поперечних коливань пластинки // Прикл. механіка. 1960. Т. 6. № 3. С. 319—327.

11. *Селезов И. Т.* Концепция гиперболичности в теории управляемых динамических систем // Кибернетика и вычислит. техника. 1969. Вып. 1. С. 131—137.
 12. *Калашников А. С.* О понятии конечной скорости распространения возмущений // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34. № 2. С. 199—200.
 13. *Whitham G. B.* Some comments of wave propagation and shock wave structures with application to magnetohydrodynamics // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1959. V. 12. N 1. P. 113—158.
 14. *Hersh R.* Boundary conditions for equations of evolution // Arch. Ration. Mech. Anal. 1964. V. 16. No. 4. P. 234—264.
 15. *Бунге М.* Причинность. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 512 с.
 16. *Селезов И. Т.* О волнах в цилиндрической оболочке // Теория пластин и оболочек. Киев: Изд-во АН УССР. 1962. С. 240—253.
 17. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. М.: Наука, 1972. 288 с.
 18. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974. 224 с.
 19. *Fusco D., Manganaro N.* Nonlinear wave features of a hyperbolic model describing dissipative magnetofluid dynamics // J. Theor. and Applied Mechanics, 1987. V. 6. N 6. P. 761—770.
- Киев Поступила в редакцию
15.XII.1993