

УДК 539.3

© 1994 г. Э. И. ГРИГОЛЮК, Е. А. КОГАН, В. И. МАМАЙ

## ПРОБЛЕМЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СЛОИСТЫХ КОНСТРУКЦИЙ С РАССЛОЕНИЯМИ

Проанализировано современное состояние исследований в области прочности, устойчивости и динамического поведения многослойных стержней, пластин и оболочек с дефектами поверхностей контакта слоев типа расслоений. Рассмотрены различные классы задач, модели расслоений, методы решения соответствующих задач. Приведены численные оценки влияния расслоений на несущую способность конструкций.

Теория тонкостенных многослойных стержней, пластин и оболочек традиционно развивалась в предположении, что отдельные слои жестко связаны между собой, и компоненты перемещений не претерпевают разрывов при переходе от слоя к слою. Однако на практике из-за разного рода нарушений технологии изготовления, а также в процессе эксплуатации и при нагружении конструкции возможно возникновение различных дефектов на поверхностях контакта слоев.

Одним из наиболее распространенных дефектов, особенно в конструкциях из слоистых композитов, являются расслоения. В реальных конструкциях расслоения технологического происхождения чаще всего появляются на границах контакта слоев, у концевых и подкрепляющих элементов, в местах резкого изменения формы. В процессе эксплуатации расслоения могут возникать в ослабленных зонах, в соединительных прослойках, в местах приложения сосредоточенных сил или резкого изменения геометрии и т. п. Разрушение конструкций из многослойных композитов по типу расслоения определяется их низким сопротивлением поперечному сдвигу и поперечному отрыву. Дефекты поверхностей контакта типа расслоений, расположенные в областях с высокой концентрацией межслойных напряжений, что характерно для слоистых структур [7], являются в большинстве случаев зародышами трещин [76, 114, 173]. Результаты экспериментов показывают, что расслоения являются основным видом докритического разрушения при усталостных нагружениях [193, 155, 158], а при статическом сжатии начало разрушения связано с потерей устойчивости материала вдоль имеющих расслоений [13, 41, 76, 193].

Систематические исследования работы многослойных стержней, пластин и оболочек с различного рода несовершенствами поверхностей контакта между слоями начались примерно со второй половины 70-х годов, хотя имеются отдельные более ранние публикации. Так, в [123] отмечается, что впервые теоретическая оценка влияния дефектности структуры на упругие свойства слоистого композиционного материала была получена В. В. Болотиным [9]. Было показано, что для армированной слоистой среды со случайными начальными неправильностями возможно уменьшение модуля упругости композиционного материала по сравнению с номинальным значением на 20% и более.

В идейном смысле близкими к рассматриваемым можно считать работы по расчету листовых рессор, составных стержней, конструкций с клеявыми соединениями и исследования по теории трещин. Им посвящена обширная литература.

Так, ссылки на ранние исследования по теории рессор, в частности, на основополагающую статью Е. Филлипса 1852 г., можно найти в известной работе С. П. Тимошенко 1929 г. [127].

Составные стержни представляют собой многослойные статически неопределимые системы стержней с упруго-податливыми связями между ними: непрерывно распределенными по длине стержней или сосредоточенными в отдельных сечениях.

Теория составных стержней и пластин развита в работах А. Р. Ржаницына, в монографиях которого [115, 117] приведено большое количество различных задач изгиба и устойчивости применительно к расчету строительных конструкций. Из других публикаций отметим ранние работы по теории составных стержней В. Г. Писчикова и П. Ф. Плешкова [106—108] и монографию А. А. Курдюмова [65], содержащую примеры расчета корабельных конструкций по теории составных стержней.

Обширная литература посвящена различным вопросам прочности клеевых соединений [2, 42, 43, 62, 166, 75, 103] и др. Имеются многочисленные работы прикладного характера, посвященные экспериментальной оценке прочности клеевых соединений и влиянию различных технологических факторов, в частности непрочклев, на несущую способность клееных конструкций. Обзор различных моделей и методов расчета напряженно-деформированного состояния клеевых соединений содержится, например, в [2].

Теория трещин восходит к классическим работам А. Гриффитса 1920—24 гг. [156, 157], Дж. Ирвина 1948 г. [161] и Е. Орована 1950 г. [172]. Разнообразные аспекты механики равновесных и неравновесных трещин, теории и модели хрупкого, квазихрупкого, упруго-пластического разрушения и теории распространяющихся трещин подробно рассмотрены в известных работах Г. И. Баренблатта, Д. Дагдейла, М. Я. Леонова, В. В. Панасюка, В. З. Партонна, Г. П. Черепанова, монографиях по разрушению под ред. Г. Либовица [4, 92, 94, 134] и др.

Математические модели прочности и разрушения слоистых композитных материалов с трещинами с учетом неоднородности их структуры и исследования по механике поверхностных явлений в композитах интенсивно развиваются в работах [6, 63, 64, 135] и др. и подробно освещены в монографиях [76, 154].

Различные постановки задач механики деформирования и разрушения тонких изотропных и анизотропных балок, пластин и оболочек с трещинами и разрезами рассмотрены в работах Л. Т. Бережницкого, А. П. Дачышина, М. В. Деляяского, А. М. Михайлова, Ю. Мураками, В. А. Осадчука, В. К. Опанасевича, В. В. Панасюка, М. П. Саврука, Л. А. Фильштинского, Г. П. Черепанова [5, 71, 89, 90, 93, 120, 188] и др.

Обзор зарубежных работ по разрушению композитных материалов с расслоениями, выполненных в последние годы, содержится в [145].

Переходим теперь к обсуждению интересующей нас проблемы расчета тонкостенных слоистых конструкций с расслоениями.

В предлагаемом обзоре основное внимание будет уделено работам, главным образом, отечественных авторов, посвященным построению различных моделей расслоений, развитию методов решения соответствующих задач о напряженно-деформированном состоянии, устойчивости, динамическом поведении тонких слоистых конструкций типа стержней, пластин и оболочек с расслоениями, и работам, содержащим полезные результаты качественного и количественного характера о влиянии расслоений на несущую способность таких конструкций.

Прежде всего, согласно [26], будем различать два класса задач:

задачи об определении скорости роста расслоений под действием постоянных, а чаще переменных нагрузок и нахождении их критических размеров, при которых может быть исчерпана несущая способность конструкции (они решаются обычно методами механики разрушения) [10—23, 28, 57, 59, 79, 80, 83, 84, 124, 134, 140, 142, 158, 171, 191, 194];

задачи о деформировании (в основном, об устойчивости) конструкций с нераспространяющимися или распространяющимися с очень малой скоростью (равновесными) расслоениями, размеры которых значительно меньше критических, при которых происходит исчерпание несущей способности конструкции.

1. Расчет конструкций с учетом роста дефектов типа расслоений. Достаточно общая постановка задачи о росте расслоений и отслоений (отслоениями принято

называть расслоения, расположенные вблизи поверхности) в конструкциях из однонаправленных волокнистых композитных материалов, развивается в работах В. В. Болотина [10—23, 28].

Она является обобщением на многопараметрические задачи энергетической концепции Гриффитса в механике квазихрупкого разрушения, состоящим в учете влияния рассеянных микроповреждений, накапливаемых на фронте расслоений, на сопротивление их росту.

Предполагается, что произвольное тело с дефектами типа трещин, размеры, формы и расположение которых характеризуются  $m$  — мерным вектором  $l = \{l_1, l_2, \dots, l_m\}^T$ , находится в условиях монотонного нагружения, задаваемого в общем случае  $\mu$  параметрами:  $s_1, s_2, \dots, s_\mu$ . При достижении параметрами нагружения максимальных значений выполняется условие стационарности функционала полной энергии системы тело-нагрузка, характеризующего состояние нагруженного тела в некоторый фиксированный момент времени с учетом повреждений, накопленных на путях движения трещин за предшествующий период нагружения. Тогда условия равновесия по Гриффитсу могут быть представлены в виде

$$G_i [l(\tau), s(\tau)] = \Gamma_i [l(\tau), s(\tau)] \quad (i = 1, \dots, m) \quad (1.1)$$

где  $G_i$  — обобщенные силы, продвигающие трещины,  $\Gamma_i$  — обобщенные силы сопротивления; вектором  $s = \{s_1, \dots, s_\mu\}^T$  характеризуется совокупность параметров нагружения.

Если нагружение циклическое, то аргумент в уравнениях (1.1) будет дискретным и имеет смысл числа циклов или блоков нагружения.

Повреждения, накопленные на фронте трещин, могут быть учтены введением вектора поврежденности  $\psi = \{\psi_1, \dots, \psi_\nu\}^T$ , компоненты которого связаны либо с размерами трещин, либо с типом повреждений и входят в уравнения (1.1). Тогда вместо (1.1) имеем

$$G_i [l(t), s(t), \psi(t)] = \Gamma_i [l(t), s(t), \psi(t)] \quad (i = 1, \dots, m) \quad (1.2)$$

Для получения замкнутой системы уравнений составляется кинетическое уравнение накопления повреждений на продолжении фронтов трещин за время  $(0, t)$ . Принимается при этом, что скорость накопления повреждений в точках, в которые придет фронт трещин в момент времени  $t > \tau$ , зависит от положения фронтов трещин, а также от векторов нагружения и поврежденности в данный момент времени  $\tau$ . Поэтому уравнения накопления повреждений представляются в виде

$$\partial \varphi_k(t, \tau) / \partial \tau = f_k [l(\tau), s(\tau), \varphi(t, \tau)] \quad (k = 1, \dots, \nu) \quad (1.3)$$

где  $\varphi(t, \tau)$  — вектор повреждений на продолжении вектора  $l$ , связанный с  $\psi(t)$  соотношениями

$$\varphi_k(t, t) = \psi_k(t) \quad (k = 1, \dots, \nu) \quad (1.4)$$

Система (1.2)—(1.4) сводится приближенно к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно характерных размеров трещин  $l$ .

На основе этого подхода рассмотрены задачи разрушения пластин, имеющих тонкие отслоения различной формы в плане — прямоугольные, круговые, эллиптические. Получены оценки продолжительности инкубационной стадии отслоения (до наступления страгивания дефекта) и направления преимущественного роста отслоения после страгивания [84]. Экспериментальное и теоретическое исследование кинетики роста тонких отслоений в плоских и оболочечных конструкциях при квазистатическом и циклическом нагружениях выполнено в [28, 79—82, 83, 85, 143]<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> См. также: Несин Д. Н. Разрушение по типу расслоений в конструкциях из композиционных материалов: Автореф. дисс. . . . канд. техн. наук: М., 1984. 16 с.

Влияние дефектов типа отслоений на термостойкость композитных материалов исследовано в [24, 34].

Обобщение этого подхода на случай неодноосного напряженного состояния, на повреждаемые вязкоупругие среды и теория роста усталостных трещин даны в монографиях В. В. Болотина [12, 23] и в статьях [17—19].

Модель роста расслоений, в которой мера повреждений определяется комбинированным действием напряжений межслойного сдвига и отрыва, рассмотрена в [144].

Общая постановка задачи о развитии расслоений вдоль границы различных слоев в многослойных тонких пластинах и оболочках из композитных материалов, в частности, усталостных трещин расслаивания, основанная на свойствах инвариантных  $J$ -интегралов, предложена Г. П. Черепановым [135, 136]. Используется эквивалентное критерию Гриффитса предположение о том, что расслоение будет развиваться при достижении  $J$ -интегралом критического значения, соответствующего удельной энергии разрушения для данного материала. В такой постановке решены некоторые задачи о докритическом росте эллиптической и параболической трещин расслоения в пластинах и осесимметричной трещины расслаивания в двухслойной цилиндрической оболочке.

Отметим также работы, в которых рост зоны расслоения оценивается методом конечных элементов по интенсивности освобождения упругой энергии при различных типах нагружения [124, 160, 170, 171, 176, 191], а также статьи [164, 178, 192, 200]. Оценка конечного времени разрушения при медленном росте выпучивания на основе критерия вязкохрупкого разрушения получена в [56].

Обстоятельный анализ большого количества работ, посвященных этому классу задач, дан в обзорной статье [34].

**2. Расчет конструкций с равновесными расслоениями.** При анализе поведения конструкций с такими расслоениями можно выделить два существенно различных подхода [102].

Первый характеризуется тем, что дефектная зона моделируется поверхностью нулевой толщины, на которой претерпевают разрыв компоненты вектора перемещений (модели «типа скачка»). При этом в зависимости от характера задачи обычно рассматривают два частных случая таких моделей:

нормальные расслоения, у которых в процессе деформирования берега расходятся, то есть имеет место разрыв нормальных перемещений;

сдвиговые расслоения, которые характеризуются разрывом только тангенциальных компонент вектора перемещений при переходе через поверхность раздела слоев (или смежных фаз в композите), они играют существенную роль, например, в теории адгезионной прочности композитов [102].

При втором подходе зона дефекта между слоями (или ослабленная межфазная граница) моделируется дополнительным контактным слоем ненулевой толщины с определенными физико-механическими свойствами (это, так называемые, модели плавного перехода).

**2.1. Устойчивость.** Если расслоение находится вблизи поверхности сжатого элемента конструкции или в сжатой зоне изгибаемого элемента, то необходимо учитывать возможное выпучивание тонкого отслоившегося участка над расслоением. Именно в этом предположении и рассмотрено большинство задач по расчету конструкций с равновесными расслоениями. Они посвящены, в основном, исследованию стержней, пластин и оболочек.

**Устойчивость стержней и пластин.** Обычно предполагается, что невозмущенное напряженно-деформированное состояние элемента с расслоением безмоментно и не отличается от соответствующего состояния в элементе без расслоения. Как правило, принимаются также два существенных предположения, позволяющих свести задачу устойчивости к классической задаче на собственные значения [27]: невозмущенное состояние и состояние нейтрального равновесия и в области с расслоением и в бездефектной области описываются уравнениями технической теории стержней, пластин и оболочек (что, конечно, налагает ограничения на размеры расслоений); не учитывается контактное взаимодействие между противоположными сторонами расслоения.

При этих предположениях в большинстве работ по стержням и пластинам

используются приближенная инженерная расчетная схема типа жестко зашеченной полосы (так называемое балочное приближение) и энергетический метод, позволяющие получить оценки критических напряжений, при которых будет происходить выпучивание расслоений без последующего их распространения или с одновременным продвижением трещины [27, 32, 33, 36, 46, 109, 111, 122, 126, 146]. Этот подход распространен и на оболочки.

Как отмечается в [111], при сжатии стержня возможны различные виды прощелкивания тонкой полосы над расслоением: прощелкивание по Эйлеру над зоной расслоения; прощелкивание с ростом расслоения на некоторую длину, отслоение на всю длину или до одного края. Реализуется такой вид выпучивания, который соответствует наименьшему критическому напряжению. Над внутренним прямоугольным расслоением в пластине также может быть выпучивание по форме защемленной пластины или с дополнительным расслоением. При этом потенциальная энергия упругого тела, ослабленного расслоением площадью  $S = ab$  и подверженного воздействию внешнего сжимающего напряжения  $p$ , может быть представлена в виде [122]:  $\Pi = \Pi_0 + \Pi_1 - A - U$ , где  $\Pi$  — потенциальная энергия в смежном (искривленном) состоянии;  $\Pi_0$  — потенциальная энергия в равновесном состоянии;  $\Pi_1$  — потенциальная энергия изгиба расслоения;  $A$  — работа, производимая внешними усилиями;  $U(S)$  — работа разрушения по Гриффитсу, равная  $U(S) = 2\gamma S$ , где  $\gamma$  — плотность поверхностной энергии разрушения.

Для распространения трещины при заданном напряжении  $\sigma = \sigma_*$  необходимо, чтобы с ростом  $S$  энергия  $\Pi$  тела не увеличивалась, то есть должно выполняться условие  $\frac{\partial}{\partial S} [\Pi_1 - U(S) - A(S, \sigma_*)] = 0$ , из которого можно получить величину критического напряжения  $\sigma_*$ , определяющего развитие расслоения  $\sigma_* = (2/3 \gamma E / (m^2 h))^2$ ,  $m = f(a/b)$ , где  $E$  — модуль упругости в направлении сжатия,  $h$  — толщина.

Отметим, что выпучивание отслоения происходит, как правило, при закритических деформациях отслоившегося участка. Поэтому задачи об устойчивости и росте поверхностных расслоений обычно рассматриваются в геометрически нелинейной постановке [45, 131, 132, 180, 202] и др. или в «полулинейной» постановке, когда поведение отслоения описывается в рамках геометрически нелинейной теории, а для остальной части конструкции используются линейные уравнения [27, 199].

*Устойчивость оболочек.* Теоретическое и экспериментальное исследование влияния дефектов типа непрочья на устойчивость двухслойных цилиндрических изотропных оболочек при внешнем давлении в отечественной литературе впервые было выполнено в [1] на основе приближенной расчетной схемы, использующей для зоны расслоения эквивалентную жесткость. Были рассмотрены зона непрочья квадратной формы, расположенная симметрично относительно торцов оболочки, и непрочья в кольцевом направлении, расположенный на произвольном расстоянии от края.

Изгибная жесткость в зонах идеального сцепления определялась известным выражением для двухслойной оболочки [58], а на участках непрочья — как сумма изгибных жесткостей изолированно работающих слоев относительно собственных срединных поверхностей. Решение уравнений устойчивости для свободно опертой оболочки строилось методом Бубнова. Полученные расчетные и опытные данные показывают, что наибольшее влияние на снижение несущей способности оболочки оказывает дефектная зона, расположенная в середине оболочки и занимающая примерно 30—70% от длины образующей. Чем ближе непрочья к торцам оболочки, тем меньше снижение критического внешнего давления.

В зависимости от параметров оболочки и характера расслоения потеря устойчивости может сопровождаться либо раскрытием берегов расслоения, либо взаимодействием слоев. При раскрытии берегов расслоения можно рассматривать

локальную потерю устойчивости отдельных слоев на дефектном участке и критическую нагрузку определять из решения задачи устойчивости для отслоившихся частей, рассматриваемых как изолированные жестко заземленные оболочки.

Если же при потере устойчивости берега расслоения не расходятся (или раскрытие очень мало по сравнению с прогибами бездефектной части оболочки), то говорят об общей потере устойчивости. Возможна также реализация смешанных форм потери устойчивости. В общем случае необходимо анализировать соответствующие формы потери устойчивости, и за критическое значение параметра нагрузки принимать наименьшее собственное значение, соответствующее форме потери устойчивости без пересечений берегов расслоения [27].

Приближенный расчет критической нагрузки оболочки при взаимодействии между противоположными берегами расслоения возможен по модели «суммарных жесткостей» [3]. В соответствии с этой моделью принимается, что нескрепленные слои при потере устойчивости не разделяются, а потому их деформации растяжения — сжатия и сдвига слоев равны. Поэтому в области расслоения приведенные жесткости на растяжение и сдвиг такие же, как у монолитной оболочки, а изгибная жесткость и жесткость на кручение определяются суммой соответствующих жесткостей нескрепленных слоев относительно собственных срединных поверхностей. В такой постановке в [3] исследовано влияние длины и зоны расположения расслоения в ортотропной цилиндрической оболочке на величину критической нагрузки при осевом сжатии и внешнем давлении.

В [55] энергетическим методом рассмотрено скачкообразное отщепление внутреннего слоя стеклопластиковой трубы при действии на нее внешнего давления. Во внутренних точках трубы будут наибольшие окружные сжимающие напряжения, которые определяются по формуле Ламе. При значительных сжимающих напряжениях и относительно малой прочности материала трубы в радиальном направлении может произойти скачкообразное отслоение внутреннего слоя. Критическое напряжение, при котором происходит отслаивание, определяется сравнением энергетических уровней форм равновесия до и после прощелкивания.

Условие расслоения принято в виде

$$U + \Pi_1 \leq \Pi_2, \quad U = 2\varphi a \gamma, \quad \Pi_2 = \frac{\sigma^2}{2E_*} a \varphi h_0 \quad (2.1)$$

где  $U$  — работа разрушения по Гриффитсу,  $\gamma$  — плотность поверхностной энергии, характеризующая прочность связующего на разрыв,  $\Pi_1$  — потенциальная энергия изгиба отслоившегося участка трубы, равная

$$\Pi_1 = \frac{E_* h^3}{24} \int_0^{\varphi} \left( \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{a} \right)^2 ds, \quad E_* = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

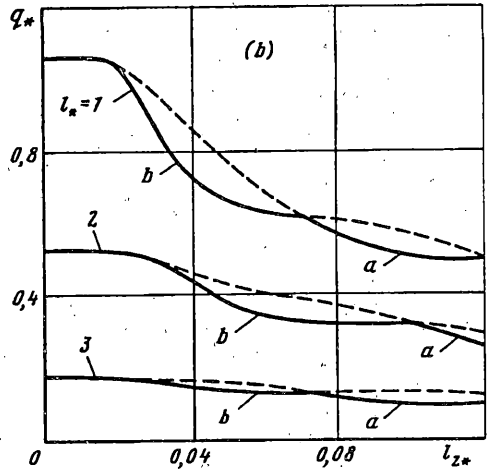
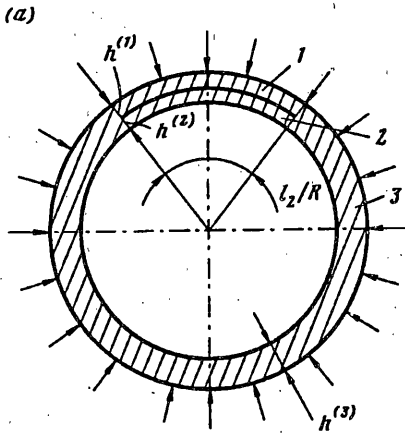
Здесь  $d\theta/ds = 1/\rho$  — кривизна отслоившегося участка,  $\theta$  — угол между касательной к упругой линии и осью  $Ox$ ,  $s$  — длина дуги,  $a$  — радиус внутреннего слоя трубы толщиной  $h$ ,  $2\varphi$  — угол, характеризующий ширину отслоившегося участка,  $E_*$  — эффективный модуль упругости в окружном направлении,  $\Pi_2$  — потенциальная энергия сжатого слоя трубы,  $h_0$  — толщина отслоения ( $h_0 \ll a$ ).

Из условия расслоения (2.1) определяется критическое напряжение  $\sigma_*$  по формуле

$$\sigma_*/E_* = 0,916 [(h_0/a)^2 + \kappa (a/h_0)]^{1/2}, \quad \kappa = 12\gamma/(E_* a) \quad (2.2)$$

Зависимость (2.2) имеет один минимум

$$(\sigma_*/E_*)_{\min} = 1,26 \sqrt[3]{\kappa} \quad \text{при} \quad (h/a)_0 = \sqrt[3]{\kappa/2} \quad (2.3)$$



Фиг. 1

Следовательно, имеется слой с наибольшей склонностью к прощелкиванию. Поэтому соответствующее напряжение, определяемое по формуле (2.3), рассматривается как нижняя оценка критического напряжения, при котором происходит отслоение.

Распространение формулы (2.3) на слоистые неоднородные по толщине структуры дано в работе [30].

Энергетический критерий был использован также в [110] для объяснения механизма разрушения композитных цилиндрических труб по форме «китайского фонарика» (в результате расщепления вдоль волокон и выпучивания образовавшихся полосок).

Подробный параметрический анализ влияния величины и места расположения расслоения по толщине ортотропной цилиндрической оболочки, а также длины, относительной толщины и кривизны оболочки на значение критического внешнего давления выполнен в [131, 132]. В [132] рассмотрено продольное расслоение, идущее на всю длину ортотропной цилиндрической оболочки. Предполагается, что при докритических нагрузках границы зоны расслоения остаются неизменными, и что расслоение разделяет оболочку на отдельные сопряженные друг с другом цилиндрические панели (фиг. 1а). В местах сопряжения панелей выполняются условия равенства усилий, моментов, перемещений и углов поворота:

$$T_{22}^{(1)} + T_{22}^{(2)} - T_{22}^{(3)} = 0, \quad T_{21}^{(1)} + T_{21}^{(2)} + T_{21}^{(3)} = 0$$

$$\bar{N}_2^{(1)} + T_{21,1}^{(1)} \frac{h^{(2)}}{2} + \bar{N}_2^{(2)} - T_{21,1}^{(2)} \frac{h^{(1)}}{2} + \bar{N}_2^{(3)} = 0$$

$$M_{22}^{(1)} + T_{22}^{(1)} \frac{h^{(2)}}{2} + M_{22}^{(2)} - T_{22}^{(2)} \frac{h^{(1)}}{2} - M_{22}^{(3)} = 0$$

$$u_2^{(1,2)} + u_2^{(3)} \pm \theta_2^{(3)} \frac{h^{(2,1)}}{2} = 0, \quad u_1^{(1,2)} - u_1^{(3)} \mp \theta_1^{(3)} \frac{h^{(2,1)}}{2} = 0$$

$$w^{(1,2)} - w^{(3)} = 0, \quad \theta_2^{(1,2)} + \theta_2^{(3)} = 0$$

$$\bar{N}_2 = N_2 + M_{21,1}, \quad \theta_i = -w_{,i} + u_i R_i^{-1}$$

где  $h^{(3)} = h^{(1)} + h^{(2)}$  — толщина основной оболочки;  $h^{(1)}, h^{(2)}$  — толщины панелей, образованных расслоением;  $T_{ij}, N_i, M_{ij}, u_i, w$  — усилия, моменты и перемещения, связь между которыми задается согласно известным соотношениям теории тонких оболочек.

Используется геометрически нелинейная постановка. Уравнения устойчивости для каждой из трех цилиндрических панелей после разделения переменных сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно усилий и моментов  $T_{22}$ ,  $T_{21}$ ,  $M_{22}$ ,  $(N_2 + M_{21,1})$  и перемещений  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $\theta_2$ ,  $w$ . Интегрирование этих уравнений совместно с граничными условиями и условиями сопряжения проводится методом Кутты — Мерсона с промежуточным ортонормированием векторов решения. Сравнение с решением линейной задачи устойчивости [131] (предполагается при этом, что докритическая сжимающая нагрузка распределяется между цилиндрическими панелями в зоне расслоения пропорционально их жесткостям на растяжение — сжатие) показывает, что решение линейной задачи отражает лишь малое начальное возмущение тонкого слоя.

Зависимость критического параметра нагрузки от размеров расслоения, расположенного на нейтральной поверхности для оболочек различной длины, показана на фиг. 1, *b*. Сплошными линиями здесь указаны кривые зависимости критического параметра  $q^* = q/q_0$  от параметра ширины расслоения  $l_2^* = l_2/(2\pi R)$  при различных значениях параметра  $l_* = l/R$ , определяющего длину оболочки (кривые 1—3 соответствуют  $l_* = 1, 2, 3$ );  $q_0$  — величина критического давления оболочки длиной  $l_* = 1$ ;  $l_2$  — ширина расслоения. Штриховыми линиями обозначены критические нагрузки нереализующихся форм потери устойчивости. Изменение длины оболочки существенно влияет на величину критического внешнего давления. Но общий характер зависимостей  $q^* = q^*(l_2^*)$  при изменении длины  $l_*$  остается неизменным. Все кривые при изменении  $l_2^*$  от нуля до  $l_2^* = 0,015—0,02$  имеют горизонтальный участок, на котором  $q^* \approx \text{const}$ . Этот участок и определяет предельно допустимую ширину расслоения, так как при увеличении ее происходит уменьшение критического внешнего давления и локализация общей формы потери устойчивости.

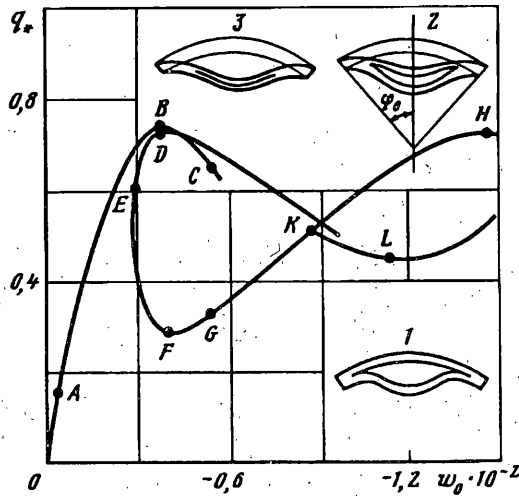
При несимметричном расположении расслоения по толщине оболочки (вблизи наружной или внутренней поверхности) может происходить локальное выпучивание одного тонкого слоя. Если же толщина слоев в зоне расслоения относительно велика, то оболочка будет терять устойчивость по смешанным формам. При этом расслоение, расположенное вблизи внутренней поверхности оболочки, в большей мере снижает критическое внешнее давление, чем расслоение, расположенное возле наружной поверхности. При больших размерах расслоения может возникнуть контактное взаимодействие берегов расслоения (это обнаруживается по пересечению линий прогибов расслоившихся частей оболочки при построении форм потери устойчивости).

Устойчивость в линейной постановке подкрепленных цилиндрических оболочек из композиционных материалов с расслоениями при одновременном воздействии осевого сжатия и внешнего давления исследована в [128, 129]. Для понижения порядка уравнений нейтрального равновесия реальная оболочка с расслоениями моделируется квазимонолитной оболочкой с переменной изгибной жесткостью, претерпевающей разрывы первого рода на границах областей расслоений, описываемые импульсными функциями. Проанализировано влияние площади расслоений, места их расположения по длине и по толщине оболочки, величины раскрытия на критические нагрузки.

Устойчивость упругой сферической оболочки с расслоением в виде сферического сегмента, эквидистантного срединной поверхности, рассмотрена в [26, 27]. Предполагается, что в исходном невозмущенном состоянии между слоями дефектного участка сохраняется равномерный контакт по всей поверхности. В возмущенном состоянии слои либо не контактируют между собой, кроме границы расслоения, либо имеется контакт отдельных участков внутри зоны расслоения (соответственно разными будут граничные условия). В [26] рассмотрены как осесимметричные, так и неосесимметричные формы потери устойчивости. Показано, что отличительной особенностью задачи устойчивости оболочки с расслоениями является последовательная смена форм потери устойчивости, соответствующих минимальному значению критической нагрузки. Возможны и локальные и общие формы потери устойчивости.

Разрушение тонкой трансверсально-изотропной упругой замкнутой сферической оболочки с расслоением эллипсоидальной формы рассмотрено в работе, указанной в сноске на стр. 8. Размеры





Фиг. 2

отслоения считаются малыми по сравнению с радиусом, тангенциальными перемещениями срединной поверхности отслоения пренебрегается по сравнению с нормальными. Предполагается также, что потеря устойчивости происходит при конечных перемещениях отслоившегося участка. Поэтому отслоение после выпучивания рассматривается как тонкая защемленная по контуру панель с заданными смещениями на контуре. Определены верхняя и нижняя критические нагрузки для отслоений, расположенных на наружной и внутренней поверхностях, и равновесные размеры отслоений.

В общем случае оценка несущей способности оболочек и пластин с расслоениями требует построения моделей, описывающих взаимосвязанные процессы деформирования конструкции и роста расслоения. Из-за сложности такого подхода обычно предполагается, что развитию расслоения (и решению соответствующей задачи разрушения) предшествует потеря устойчивости сжатого слоя в дефектной зоне [13, 111, 149, 189].

Нелинейная модель осесимметричного деформирования и разрушения пологой сферической оболочки с расслоением, характеризуемым углом полураствора  $\varphi_0$ , развита в [45]. Принимается, что на участке расслоения имеются чередующиеся зоны раздельного деформирования слоев и зоны нормального контакта между слоями. Трение между слоями не учитывается. На границах зон контакта и зон раздельного деформирования, а также внутри зон контакта должны выполняться дополнительные условия равенства прогибов внутреннего и внешнего слоев.

Вариационная задача строится с помощью неопределенных множителей Лагранжа. Из условия стационарности функционала с переменными границами получены системы нелинейных уравнений для каждого из слоев на каждом из участков, граничные условия, условия совместности и трансверсальности на границах зон контакта и зон раздельного деформирования.

Анализ форм изгиба оболочки позволил проследить переход от локальной формы потери устойчивости к общей потере устойчивости по мере роста расслоения в процессе деформирования. Характерная диаграмма «нагрузка-прогиб» и формы изгиба оболочки показаны на фиг. 2, где  $q_c$  — критическое давление для замкнутой сферической оболочки без расслоения таких же радиуса и толщины, что и рассматриваемый сферический сегмент;  $w_0 = w/R$  — относительный прогиб нижнего слоя в полюсе оболочки.

Кривая ABC описывает совместное деформирование слоев оболочки на всем участке расслоения. Кривая DEFGH характеризует равновесные состояния с проселкнутым в зоне расслоения внутренним слоем.

Зона раздельного деформирования слоев характеризуется при этом углом полураствора  $\varphi_0$ . Точке F нижней границы области существования изолированного

решения соответствует форма изгиба 1. Это локальная форма потери устойчивости, при которой прогибы верхнего слоя над расслоением и сплошной оболочки значительно меньше прогибов нижнего слоя в зоне расслоения.

При движении вдоль кривой FGH растут зазор между слоями и угол  $\varphi_0$ . Полное раскрытие расслоения соответствует точке G (при этом  $\varphi_0 = \varphi_\alpha$ ), а предельная точка H соответствует общей потере устойчивости оболочки с полностью прощелкнутым нижним слоем (форма изгиба 2).

На участке FE зазор между слоями и угол  $\varphi_0$  уменьшаются с ростом нагрузки, а на участке ED происходит совместное деформирование слоев с малым углом  $\varphi_0$ . Предельная точка D соответствует форме изгиба 3.

Один из возможных способов учета неполного контакта слоев в двухслойных ортотропных цилиндрических оболочках предложен в [120, 121], в которых рассмотрены дискретные связи между слоями типа сварных швов или клеевых полос. Для описания работы таких связей используется модель легкого заполнителя, принятого в теории трехслойных оболочек Э. И. Григолюка [37]. Согласно этой модели сопротивление связующего слоя (толщина которого  $h_3$  считается значительно меньшей толщины слоев оболочки  $h_1, h_2$ ) определяется только деформациями поперечного сдвига, и соответствующие усилия в нем равны  $T_{i3} = G_{i3} h_3 \varepsilon_{i3}$  ( $i = 1, 2$ ), где  $G_{i3}$  — модули поперечного сдвига;  $\varepsilon_{i3}$  — деформации поперечного сдвига прослойки.

Принимается далее, что  $G_{i3} = G_{i3f_1}^0(x, y)$ ,  $G_{23} = G_{23f_2}^0(x, y)$ , где функциями  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$  описывается характер связи между слоями. В случае осесимметричного деформирования, если связь слоев осуществляется по кольцевым полосам шириной  $\Delta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), то функцию распределения сдвиговой жесткости можно задать в виде

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [x_j - 1/2\Delta_j; x_j + 1/2\Delta_j] \\ 0 & \text{при } x \notin [x_j - 1/2\Delta_j; x_j + 1/2\Delta_j] \end{cases}$$

При малой ширине  $\Delta_j$  можно считать, что контакт слоев осуществляется по линиям, и аппроксимировать действительные функции распределения  $\delta$ -функциями:

$$f_j(x) = \sum_{j=1}^N \Delta_j \delta(x - x_j) \quad (2.4)$$

Дифференциальные уравнения равновесия и устойчивости оболочек с дискретными связями между слоями получены на основе принципа возможных перемещений. При осевом сжатии силами  $T_{11}^0$  уравнения устойчивости оболочки имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial M_{22}}{\partial y} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + \frac{T_{22}}{R} - T_{11}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial m_{11}}{\partial x} + \frac{\partial m_{12}}{\partial y} - \sum_{i=1}^k G_{i3}^{(0)} \Delta_i \left( \theta + h_3 \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta(y - y_i) = 0$$

$$\frac{\partial m_{12}}{\partial x} + \frac{\partial m_{22}}{\partial y} - \sum_{i=1}^k G_{23}^{(0)} \Delta_i \left[ \psi + h_3 \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R} \right) \right] \delta(y - y_i) = 0$$

где  $M_{ij} = M_{ij}^{(1)} + M_{ij}^{(2)} + h_i t_{ij}$ ;  $T_{ij} = T_{ij}^{(1)} + T_{ij}^{(2)}$  — приведенные усилия и моменты, выражающиеся через соответствующие величины отдельных слоев,  $t_{ij} = T_{ij}^{(1)} - T_{ij}^{(2)}$ ,  $m_{ij} = 0,5 h_3 t_{ij}$ .

При этом деформирование неоднородной оболочки характеризуется пятью кинематическими переменными

$$w = w_1 = w_2, \quad u = 1/2 (u_1 + u_2), \quad v = 1/2 (v_1 + v_2) \quad (2.6)$$

$$\theta = u_2 - u_1 + h \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \psi = v_2 - v_1 + h \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R} \right)$$

В соотношениях (2.5), (2.6)  $w$  — прогиб оболочки,  $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$  — соответственно тангенциальные перемещения в продольном и окружном направлениях и прогибы слоев  $h = h_1 + h_2$ .

Первые три уравнения в (2.5) совпадают с обычными уравнениями теории оболочек, а последние два описывают дискретную связь слоев оболочки по линиям согласно (2.4). Система (2.5) интегрировалась методом Бубнова. Из условия равенства нулю определителя системы получено критическое значение параметра нагрузки.

В [120] выполнено качественное исследование осесимметричной устойчивости рассмотренной цилиндрической оболочки. В [121] численно проанализировано влияние количества продольных связей на величину критической нагрузки. Показано, что для сварных швов и для клеевых прослоек, модуль сдвига не более чем на два порядка ниже модулей материала склеиваемых оболочек, необходим учет дискретности связей. В других случаях при потере устойчивости оболочки можно использовать модель со сплошным соединительным слоем.

Отметим также, что при потере устойчивости оболочек с несвязанными слоями возможны несинфазные формы потери устойчивости отдельных слоев [35].

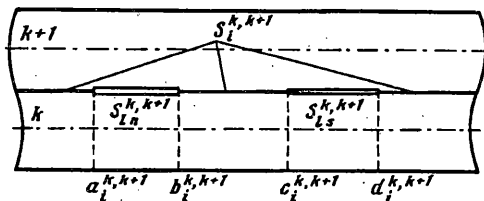
В [41] обращается внимание на то, что приближенные расчетные схемы исследования устойчивости типа балочного приближения часто не вполне удовлетворительны, так как идеализируют условия на границе расслоения и не отражают действительное напряженно-деформированное состояние в окрестности его края. Кроме того, такой подход заведомо неприемлем, если полоса является толстой. Исследование поведения композитных материалов с расслоениями как приповерхностными, так и с внутренними (достаточно удаленными от всех граничных поверхностей материала) проводилось в [39—41, 125] на основе трехмерной линеаризованной теории устойчивости и теории трещин в телах с начальными напряжениями. Так, в [41] определены значения критических нагрузок, соответствующих началу разрушения, в зависимости от отношения модулей упругости слоев и их конфигурации. Полученные в такой постановке значения критических нагрузок существенно отличаются от значений, даваемых приближенными расчетными схемами.

Различные задачи устойчивости стержней, пластин и оболочек с расслоениями рассмотрены также в [35, 56, 148—150, 163, 178—180, 184, 189, 198, 200, 202].

**2.2. Статическая прочность. Напряженно-деформированное состояние оболочек.** Напряженно-деформированное состояние слоистых конструкций с расслоениями изучено относительно меньше, чем устойчивость. При этом большинство имеющихся работ посвящено применению вариационного метода к решению соответствующих задач.

Обычно в теории тонких многослойных пластин и оболочек с идеальным сцеплением между слоями применяются два различных подхода к построению уточненных двумерных теорий. [38], называемых сейчас часто феноменологическим и дискретным (структурным).

При феноменологическом подходе кусочно-неоднородная по толщине слоистая пластина или оболочка рассматриваются как квазиоднородные с приведенными упругими характеристиками. Порядок получающихся при этом уравнений не зависит от числа слоев. При дискретном подходе учитывается неоднородность строения оболочки введением кинематических или статических (или кинематических и статических) гипотез для каждого отдельного слоя. Порядок получающихся при этом уравнений зависит от числа слоев, но эти уравнения позволяют учитывать локальные эффекты на границах контакта слоев. Поэтому именно



Фиг. 3

дискретный подход оказался пригодным, в частности, для расчета многослойных конструкций с разного рода несовершенствами поверхностей контакта слоев.

Смешанный функционал геометрически нелинейной теории тонких многослойных оболочек, состоящих из проскальзывающих и односторонне контактирующих слоев, с учетом трения и заданных зазоров построен в [52]<sup>2</sup>. Получена разрешающая система дифференциальных уравнений осесимметричной деформации гибких оболочек вращения, проскальзывающих с трением. Отыскание зон контакта производится итерационным путем.

Обобщенная вариационная постановка задачи расчета напряженно-деформированного состояния многослойных анизотропных оболочек при наличии зон неидеального межслойного контакта сформулирована в [67, 68].

Построен расширенный функционал [67], из которого следуют уравнения равновесия, соотношения Коши, закон Гука, граничные условия и условия на поверхностях контакта слоев. Переход к двумерным уравнениям многослойных анизотропных оболочек осуществлен [68] с использованием разложения компонент напряженно-деформированного состояния в ряды по полиномам Лежандра.

Развитие этого подхода и распространение его на различные кусочно-однородные среды дано в [69, 70, 73, 74, 98—103]<sup>3</sup>. При этом введены различные типы расслоений (фиг. 3).

Поверхность контакта смежных  $k$ -го и  $(k+1)$ -го слоев предполагается состоящей в общем случае [69, 101] из: зоны жесткого (идеального) сцепления слоев  $S_i^{k, k+1}$ ; зоны межслойных трещин нормального разрыва  $S_{in}^{k, k+1}$  (зоны нормального расслоения) с заданными напряжениями  $\bar{\sigma}_{sz}^k, \bar{\sigma}_{sz}^{k+1}$ , на берегах (в этой зоне межслойные контактные поперечные касательные напряжения, возникающие на поверхности контакта смежных слоев, предполагаются равными нулю:  $\sigma_{\alpha z}^{k, k+1} = \sigma_{\beta z}^{k, k+1} = \sigma_{zz}^{k, k+1} = 0$ ); зоны сдвигового расслоения  $S_{is}^{k, k+1}$ . Это область межслойных дефектов типа пластического проскальзывания, сухого трения и т. п. В зоне межслойных дефектов с соприкасающимися берегами  $S_{is}^{k, k+1}$  могут претерпевать разрыв тангенциальные компоненты перемещений, а касательные напряжения могут задаваться различным образом, в частности, могут быть функциями нормальных контактных напряжений.

Из вариационного уравнения на поверхностях сопряжения  $k$ -го и  $(k+1)$ -го слоев для перемещений  $u_s$  ( $s = \alpha, \beta, z$ ) и напряжений следуют условия

а) на  $S_i^{k, k+1}$ :

$$\sigma_{sz}^k = \sigma_{sz}^{k+1} = \sigma_{sz}^{k, k+1}, \quad u_s^k = u_s^{k+1}$$

в) на  $S_{in}^{k, k+1}$

$$\sigma_{sz}^k = \sigma_{sz}^k, \quad \sigma_{sz}^{k+1} = \bar{\sigma}_{sz}^{k+1}$$

<sup>2</sup> См. также: Кантор Б. Я. К построению континуальных теорий оболочек, состоящих из многих неспаянных слоев. Харьков, 1980. 20 с.— Деп. в ВИНТИ 30.09.1982, № 5018—82.

<sup>3</sup> См. также: Мачуга О. С. К исследованию напряженно-деформированного состояния слоистых пластин с дефектами на границах раздела//Неклассические проблемы механики композиционных материалов и конструкций из них. Тезисы докл. 2-го Всес. научно-техн. семинара. Львов. Сентябрь 1984 г. Киев: Наук. думка, 1984. С. 39; Деформационный критерий межфазного сдвигового разрушения//Матер. 2 конф. мол. ученых Ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР. Львов. 1—3 окт. 1985. Ч. 2. Львов, 1987. С. 140—144.— Деп. в ВИНТИ 17.02.87, № 1089—87.

с) на  $S_{is}^{k, k+1}$ :

$$u_z^k = u_z^{k+1}, \quad \sigma_{zz}^k = \sigma_{zz}^{k+1} = \sigma_{zz}^{k, k+1}$$

$$\sigma_{\alpha z}^k = \sigma_{\alpha z}^{k+1} = F_1(\sigma_{zz}^{k, k+1}), \quad \sigma_{\beta z}^k = \sigma_{\beta z}^{k+1} = F_2(\sigma_{zz}^{k, k+1}) \quad (2.7)$$

где  $k = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $N$  — число слоев.

Межслойные касательные напряжения выражаются через усредненные перемещения соседних слоев [100, 101].

При произвольных границах межслойных дефектов  $a^{k, k+1}, b^{k, k+1}, \dots$  из вариационного уравнения варьированием по неизвестным параметрам  $a^{k, k+1}, b^{k, k+1}, \dots$  можно получить условия для определения границ дефектов вида (2.7) и определить эти границы подбором [70].

В [73, 102] решены различные задачи определения напряженно-деформированного состояния в двухслойных трансверсально-изотропных пластинах с нормальными и сдвиговыми расслоениями. В [102] приведены также результаты экспериментальных исследований различного типа разрушений цилиндрических металло-пластиковых образцов. В [74] методом сопряжения получено аналитическое решение осесимметричной задачи определения напряженно-деформированного состояния и концентрации межслойных напряжений в цилиндрической двухслойной композитной шарнирно опертой оболочке с кольцевым расслоением. Оболочка нагружена осевыми растягивающими усилиями, приложенными к каждому слою и равномерно распределенным внутренним давлением. Построены зависимости межслойных сдвиговых напряжений от относительной длины расслоения.

Напряженно-деформированное состояние многослойной цилиндрической оболочки с клеевым соединением слоев исследовано<sup>4</sup> в предположении, что для каждого слоя справедлива гипотеза Тимошенко. Условия контакта смежных  $k$ -го и  $(k+1)$ -го слоев задаются в виде  $w^k = w^{k+1} + k_\sigma \sigma^{k, k+1}$ ,  $v^k - h_k \gamma^k = v^{k+1} + k_\tau \tau^{k, k+1}$  ( $k = 1, \dots, n-1$ );  $\sigma_k^- = \sigma_k^+ = \sigma^{k, k+1}$ ,  $\tau_k^- = \tau_k^+ = \tau^{k, k+1}$ , где  $v_k, w_k$  — тангенциальные и нормальные перемещения  $k$ -го слоя;  $\sigma_k^+, \sigma_k^-$  ( $\tau_k^+, \tau_k^-$ ) — нормальные (касательные) напряжения на наружной (+) и внутренней (−) поверхностях оболочки;  $\sigma^{k, k+1}, \tau^{k, k+1}$  — межслойные напряжения;  $\gamma^k$  — углы поворота, обусловленные поперечным сдвигом. Величины  $K_\sigma$  и  $K_\tau$  определяются через характеристики клеевого соединения. Учет условий контакта слоев позволяет записать исходную систему уравнений относительно обобщенных перемещений.

Процесс разрушения тонкостенной многослойной композитной оболочки при статическом нагружении за счет отслаивания армированных слоев друг от друга трактуется<sup>5</sup> как потеря прочности хрупкой изотропной прослойки связующего, обеспечивающего контакт между армирующими слоями. Принимается, что разрушение связующего определяется нормальными растягивающими напряжениями. Для описания послойного разрушения оболочки в постановке работы [138] построен функционал энергии, позволяющий учесть в слоях поперечные сдвиговые и нормальные деформации и напряжения. В качестве примера рассмотрена двухслойная цилиндрическая оболочка из боропластика с клеевым соединением типа эпоксидного связующего.

В [91] задача среднего изгиба тонких трехслойных оболочек с легким ортотропным наполнителем с участками непрочлея между слоями ставится как контактная задача теории пластин и оболочек. Принимается, что контактные усилия взаимодействия между внешними слоями и наполнителем характеризуются векторами усилий  $q_k = q_{kr} + q_{kt}^3$ , где  $k = 1, 2$  — номер внешнего слоя,  $r_t = \partial r / \partial \alpha^t$  —

<sup>4</sup> Максимук А. В., Щербина Н. Н. О деформативности многослойных цилиндрических оболочек в случае несовершенного контакта слоев // Неклассические проблемы механики композиционных материалов и конструкций из них. Тезисы докл. 2 Всес. научно-техн. семинара. Львов. Сентябрь 1984 г. Киев: Наук. думка. 1984. С. 35—36.

<sup>5</sup> Паже Л. А. К постановке задачи о расслоении тонкостенных многослойных конструкций // 3-я конф. мол. ученых и спец. по мех. композ. материалов. Тезисы докл. Рига. 1981. С. 120—121.

базисные векторы на срединной поверхности заполнителя, отнесенные к криволинейным координатам  $\alpha^i$ ,  $r$  — радиус-вектор произвольной точки на срединной поверхности заполнителя,  $m$  — вектор единичной нормали к  $r$ .

Напряженно-деформированное состояние осесимметрично нагруженных, тонких ортотропных многослойных оболочек вращения с заданными малыми зазорами между слоями исследуется в работах [50, 51, 53, 54]. Считается, что отдельные слои оболочек соединены между собой лишь по краям. Применено конечное разложение неизвестных вектор-функций  $Y_k = \{T_{ii}^k, Q_{ii}^k, M_{ii}^k, u^k, w_k, Q_i^k\}^T$ , описывающих равновесие слоев ( $k$  — номер слоя, обозначения общепринятые), по  $n$  ортогональным полиномам дискретного аргумента  $z$  поперечной координаты срединной поверхности слоя ( $n \leq N$ , где  $N$  — общее число слоев оболочки). Это позволяет учесть контактное взаимодействие между слоями в процессе деформирования. При этом контактное давление между слоями принимается пропорциональным разности нормальных смещений смежных слоев

$$\sigma_k = 1/2cE/h (w^{k+1} - w^k + \mu^k) [1 - \text{sign} (w^{k+1} - w^k + \mu^k)]$$

где  $c$  — коэффициент пропорциональности,  $E$  — модуль упругости слоя;  $w^k, w^{k+1}$  — прогибы  $k$ -го и  $(k+1)$ -го слоев,  $\mu^k$  — заданный зазор между слоями, функция  $\sigma^k = 1/2 [1 - \text{sign} (w^{k+1} - w^k + \mu^k)]$  равна единице в зоне контакта и равна нулю вне зоны контакта.

В зонах контакта учитывается трение между слоями по закону Кулона. Решение геометрически нелинейных краевых задач строится методом Ньютона — Рафсона с одновременным уточнением зон контакта методом простых итераций. Для оболочек с различным числом слоев получены распределение нормального давления в зонах контакта, а также зависимости размеров области контакта от величины нагрузки.

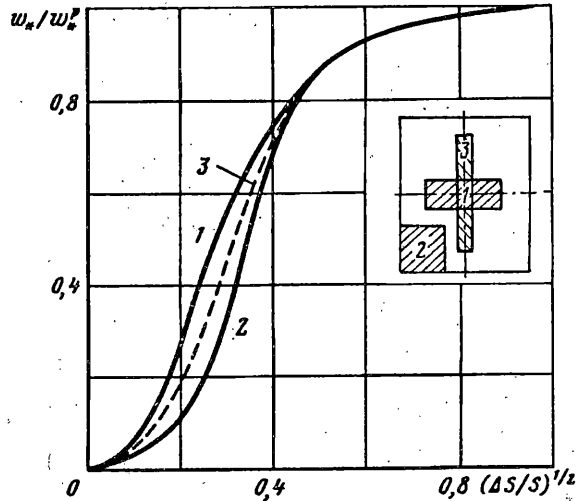
Несущая способность многослойных предварительно напряженных сосудов высокого давления в предположении, что между смежными слоями имеются малые по сравнению с толщиной слоя зазоры, рассмотрена также в [177]. Дан аналитический метод оценки дополнительных напряжений, возникающих из-за неполного контакта, и приведено сравнение аналитического решения с численным решением, полученным методом конечных элементов.

*Изгиб стержней и пластин с расслоениями.* Различные подходы к решению задач изгиба слоистых стержней и пластин предложены в [44, 48, 58, 86, 96, 139, 141, 169, 192, 197].

В [86] рассмотрен изгиб многослойного стержня с учетом проскальзывания между слоями на основе теории слоистых плит [8]. Предполагается, что на границах контакта жесткого и мягких слоев возможны области четырех типов: 1) на обеих сторонах жесткого слоя нет проскальзывания; 2) на обеих сторонах жесткого слоя имеется проскальзывание; 3) проскальзывание есть только на границе с мягким слоем  $k$ ; 4) проскальзывание есть только на границе с мягким слоем  $k-1$ .

Для выяснения характера расположения возможных областей проскальзывания строится решение задачи изгиба стержня заданной нагрузкой без учета проскальзывания, и анализируется эпюра распределения поперечных касательных усилий  $N_{xz}^k$  в мягком слое. В качестве критерия проскальзывания принимается условие  $N_{xz}^k = N_T^k$ , где  $N_T^k$  — предельно допустимое значение. В частности,  $N_T^k$  может приниматься пропорциональным поперечному нормальному усилию:  $N_T^k = fN_z^k$ , где  $f$  — коэффициент трения.

Для получения уравнений, описывающих поведение стержня с областями проскальзывания 2-го—4-го типов, в исходных уравнениях равновесия заменяются  $N_{xz}^{k-1}$  или  $N_{xz}^k$  величиной  $N_T^k$  и принимаются условия непрерывности перемещений и касательных усилий на границах контакта слоев в виде



Фиг. 4

$$u_k^+ = u_k^-, \quad \frac{du_k^+}{dx} = \frac{du_k^-}{dx}, \quad w_k^+ = w_k^-, \quad \frac{dw_k^+}{dx} = \frac{dw_k^-}{dx}$$

$$d^2 w_k^+ / dx^2 = d^2 w_k^- / dx^2, \quad d^3 w_k^+ / dx^3 = d^3 w_k^- / dx^3$$

необходимые для стыковки решений на границе области проскальзывания.

В качестве примера рассмотрен изгиб двухслойного свободно опертого стержня, находящегося под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки  $q$ , и получена зависимость величины зоны проскальзывания от  $q/N_T^*$ .

Обобщение этого подхода на случай осесимметричной деформации многослойных цилиндрических оболочек дано в [87].

Изгиб нагруженных равномерной поперечной нагрузкой свободно опертых трехслойных пластин симметричного строения с произвольно расположенной зоной непрочности методом конечных разностей рассмотрен в [44]. Для несущих слоев принимаются справедливыми гипотезы Кирхгоффа, заполнитель считается легким, ортотропным. Расчет сводится к совместному решению уравнений равновесия для бездефектных участков и участков с расслоениями с учетом условий сопряжения на границах участков и граничных условий для пластины.

Получены зависимости  $w_*/w_p^* = f(\sqrt{\Delta S/S})$ , где  $w_*$ ,  $w_p^*$  — максимальные прогибы изучаемой и полностью расслоенной пластины;  $\Delta S = \Delta x \Delta y$  — площадь зоны непрочности;  $S$  — площадь пластины (фиг. 4).

Из сравнения кривых 1, 2, 3 на фиг. 4 можно заключить, что зона непрочности, расположенная в углу пластины (кривая 2), слабее влияет на величину прогиба пластины, чем зона непрочности в центре (кривая 1) при одинаковой форме и площади.

Показано, что  $w_*$  при величине непрочности (0,05—0,1) возрастает на порядок по сравнению с прогибом бездефектной пластины и оказывается близким по величине к прогибу полностью расслоенной пластины. Непрочности, равномерно распределенные на нескольких участках, оказывают меньшее влияние на величину  $w_*$ , чем непрочности, сосредоточенные на одном участке той же суммарной площади. При смещении зоны непрочности от центра к краю максимальный прогиб также смещается в сторону дефектной зоны.

В [58] в аналогичной постановке рассмотрена задача цилиндрического изгиба трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, и приведены графики изменения нормальных напряжений в несущих слоях и касательных напряжений

в заполнителе в зависимости от сжимаемости заполнителя и площади зоны расслоения. Рассмотрено также влияние модулей упругости и толщин заполнителя и несущих слоев на напряженно-деформированное состояние трехслойных панелей с расслоениями, и даны рекомендации конструктивного характера по снижению чувствительности конструкции к расслоениям.

Отметим также предложенную в [139] модель (названную авторами феноменологической моделью первого приближения), позволяющую дать единое описание возможных условий контакта смежных поверхностей слоев двухслойной полосы при наличии зон расслоения. Для этого в [139] введен в рассмотрение гипотетический бесконечно тонкий упругий слой, лежащий между несущими слоями полосы, характеристики которого описываются зависимостями

$$\tau_k = \mu_k(x) (u_k^2 - u_k^1), \quad \sigma_k = \rho_k(x) (w_k^2 - w_k^1) \quad (2.8)$$

где  $\tau_k, \sigma_k, u_k^1, w_k^1$  — касательные и нормальные напряжения, осевые перемещения и прогибы на поверхностях контакта слоев;  $\mu_k(x), \rho_k(x)$  — переменные по длине полосы коэффициенты упругости контактного слоя. В предельных случаях, когда  $\mu_k, \rho_k \rightarrow \infty$  или  $\mu_k, \rho_k \rightarrow 0$ , соотношения (2.8) будут характеризовать идеальное жесткое сцепление между слоями или полное расслоение. В частности, для сдвигового расслоения  $w_k^1 = w_k^2$  и  $\rho_k \rightarrow \infty$ , а  $\mu_k = \mu_k(x)$  и, следовательно,  $u_k^1 \neq u_k^2$ .

Уравнения изгиба трехслойных неравномерно нагретых стержней несимметричной структуры с нераспространяющимися сдвиговыми расслоениями вариационным методом получены авторами настоящего обзора в предположении, что для внешних слоев справедлива классическая гипотеза Бернулли или гипотеза Тимошенко. Заполнитель считается трансверсально-изотропным, жестким, в нем учитываются поперечные нормальные и сдвиговые деформации и напряжения согласно [49].

Эти результаты обобщены также на случай трехслойных пластин с расслоениями. При этом рассмотрены две модели: в первой по аналогии с теорией составных стержней с упругоподатливыми связями сдвига принимается, что составляющие межслоевых касательных усилий пропорциональны взаимным смещениям слоев в зоне расслоения; во второй модели межслойные касательные усилия считаются функциями поперечного контактного давления между слоями. Из обобщенного вариационного уравнения Лагранжа получены системы уравнений равновесия для бездефектных и дефектных зон, граничные условия и условия сопряжения этих зон. Уравнения равновесия в усилиях-моментах записаны в удобной для численного решения инвариантной форме. Построены соотношения упругости для стержней и пластин с различным расположением зон расслоения друг относительно друга. Эти результаты опубликованы в отчетах НИИ Механики МГУ в 1990—1993 гг.

В [169, 197] рассматривается процесс расслоения в слоистых композитах в предположении, что слои волокон моделируются трансверсально-изотропными пластинами, а связующее — поверхностью нулевой толщины, выдерживающей лишь ограниченные значения межслоевых напряжений. Разрыв перемещений на поверхности расслоения связан с межслоевыми напряжениями с помощью многозначных немонотонных операторов. Показано, что краевые задачи для квазистационарных процессов расслоения приводят при этом к системе полувариационных неравенств. Возможность их использования для оценки механических свойств композитов с расслоениями показана также в [174, 175].

Отметим также работы, в которых рассматриваются различные критерии прочности соединения слоев при наличии расслоений, виды и модели разрушения, а также экспериментальные методы определения сопротивления композитов расслоению [29, 31, 47, 58, 60, 166, 103, 126, 193, 137, 153]<sup>6</sup>, и большое количество работ, посвященных так называемому кромочному эффекту [61, 152, 88, 95, 97, 104, 112, 113, 118, 193, 147, 159, 167, 186, 187, 196]. Он наблюдается при одноосном растяжении плоских образцов из слоистых композитов со свободными кромками. Из-за различия свойств и разной ориентации слоев возникает высокая концентрация межслоевых нормальных напряжений и происходит расслоение образца вблизи свободных кромок.

Подробный обзор экспериментальных методов исследования кромочного эффекта дан в [113].

<sup>6</sup> См. также: *Полилов А. Н.* Методы определения сопротивления композитов расслоению // В сб: *Современные методы испытаний композиционных материалов* / Под ред. А. П. Гусенкова. М.: МНТК. Надежность машин. Ин-т Машиноведения РАН, 1992. С. 176—204.



2.3. *Динамическое нагружение.* Немногочисленны пеха работы, посвященные динамическому поведению конструкций с расслоениями. Экспериментальное и аналитическое исследование процесса разрушения сложных пластин при действии продольной сжимающей импульсной нагрузки рассмотрено в [133, 149]. Высокоскоростная киносъемка процесса разрушения [133] показывает, что распространение дефекта в пластине связано с расслоением и локальным выпучиванием отдельных слоев пластины. Аналитическое моделирование такого разрушения в квазистатической постановке с использованием методов механики разрушения выполнено в [149] в предположении, что область расслоения представляет собой полосу, а в [133] рассмотрено развитие дефекта эллипсоидальной формы. Определены условия роста и останова расслоения в зависимости от нагрузки и геометрии расслоения, области неустойчивого и устойчивого расслоений.

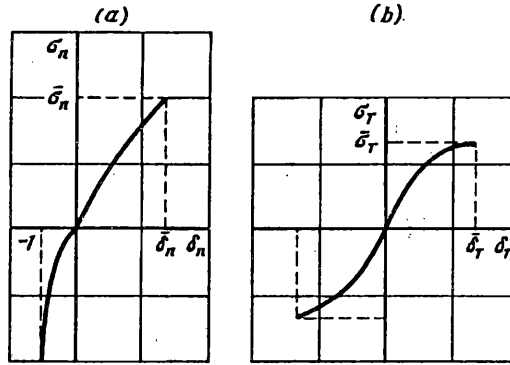
Поперечные изгибные колебания стержней с расслоениями исследуются в [168]. Рассмотрены случай расслоения на некоторой части пролета, когда за счет трения сохраняются связи сдвига, и предельный случай полного раскрытия расслоения. Составлены дифференциальные уравнения колебаний для участков стержня с расслоением и без него. Из условия сопряжения решений этих уравнений на границах дефектного и бездефектного участков и граничных условий получено частотное уравнение задачи. Определены зависимости первых двух частот колебаний от параметров расслоения для различных граничных условий. При этом учитывалась возможность контакта берегов расслоения. Приведены также результаты экспериментов.

Теоретическая и экспериментальная оценки сопротивления слоистых композитных пластин действию поперечных ударных нагрузок получены в [162, 165, 190, 25, 151]. Так, в [165] рассмотрено влияние характеристик материала, последовательности укладки и толщины слоев на распространение расслоения при ударном нагружении. В [190] предлагается осуществлять повышение сопротивления композитов динамическому распространению межслоевой трещины за счет назначения оптимальной укладки слоев по толщине и введения адгезионных прокладок.

Осесимметричная задача о динамическом поведении тонкой упругой цилиндрической оболочки, скрепленной с толстостенным упругим полым заполнителем, с учетом неабсолютно жесткой склейки заполнителя с оболочкой рассмотрена в [42]. Предполагалось, что конструкция нагружена внутренним давлением, переменным вдоль продольной оси и во времени. Численные результаты, полученные методом конечных разностей для различных условий на торцах и условий скрепления оболочки с заполнителем, показывают, что условия соединения оболочки с заполнителем весьма существенно влияют на смещения и сдвиговые напряжения на поверхности контакта слоев. Влияние же склейки на радиальные напряжения в рассмотренных примерах невелико.

В [72] на примере сферической оболочки в контактной постановке конечно-разностным методом исследовано влияние расслоений на характер волновых переходных процессов. Сферическая оболочка с расслоением рассматривается как система трех оболочек. Осесимметричное деформирование оболочек описывается системой уравнений гиперболического типа, учитывающей инерцию вращения и сдвига. На границе расслоения, соответствующей стыку оболочек, выполняются условия равенства сил и моментов и условия равенства линейных и угловых скоростей. При описании контактного взаимодействия двух оболочек в зоне расслоения местное сжатие материала на поверхности контакта и трение не учитываются. Численно исследована зависимость прогиба в полусе оболочке от параметров расслоения и начального импульса. Из полученных результатов следует, что учет контактного взаимодействия существенно важен. Наличие расслоения может качественно менять характер переходного процесса.

Импульсное нагружение многослойных цилиндрических и пологих сферических оболочек и круговых пластин с тонкими клеевыми прослойками подробно обсуждается в [75]. Принятая модель расслоения является обобщением известной



Фиг. 5

линейной модели клеевого соединения Голанда — Рейсснера, учитывающим нелинейность характеристик прослойки в поперечном направлении и в продольной плоскости склейки в виде (фиг. 5):

$$f_n(\delta_n) = \begin{cases} a \operatorname{tg}(\pi \delta_n / 2) & (-1 \leq \delta_n \leq 0) \\ \bar{\sigma}_n [1 - (1 - \delta_n)^\alpha] & (0 < \delta_n < \bar{\delta}_n) \end{cases}$$

$$f_T(\delta_T) = \begin{cases} \bar{\sigma}_T [1 - (1 - |\delta_T|)^\alpha] \operatorname{sign} \delta_T & (|\delta_T| < \bar{\delta}_T) \\ 0 & (|\delta_T| \geq \bar{\delta}_T) \end{cases}$$

$$\delta_n = \Delta_n / \Delta_0, \quad \delta_T = \Delta_T / \Delta_0$$

Здесь  $\Delta_n$ ,  $\Delta_T$  — нормальное и тангенциальное перемещения прослойки;  $\Delta_0$  — начальная толщина прослойки;  $\bar{\delta}_n$ ,  $\bar{\delta}_T$  — предельно допустимые относительные перемещения;  $\bar{\sigma}_n$ ,  $\bar{\sigma}_T$  — предельные напряжения отрыва и сдвига соответственно;  $a$ ,  $\alpha$  — безразмерные коэффициенты.

Уравнения движения для каждого из соединяемых склейкой слоев составляются как для отдельных однослойных оболочек с учетом реакций клеевой прослойки

$$L_1(u_i, v_i, w_i) - \sigma_T (-1)^i \cos \theta = \partial^2 u_i / \partial t^2$$

$$L_2(u_i, v_i, w_i) - \sigma_T (-1)^i \sin \theta = \partial^2 v_i / \partial t^2$$

$$L_3(u_i, v_i, w_i) - \sigma_n (-1)^i + q(i-1) = \partial^2 w_i / \partial t^2 \quad (2.9)$$

где  $L_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) — известные дифференциальные операторы уравнений оболочек в перемещениях; индекс  $i = 1$  соответствует внутреннему слою,  $i = 2$  — внешнему слою.

Уравнения движения (2.9) интегрировались численно по неявной разностной схеме<sup>7</sup>. Внешняя нагрузка принималась в виде треугольного импульса по времени. Получены зависимости относительных прогибов в среднем поперечном сечении каждого из слоев от времени.

Результаты численных экспериментов свидетельствуют о том, что влияние параметров нелинейности ( $a$ ,  $\alpha$ ) и предельных деформаций склейки на процесс расслоения несущественно, а определяющую роль играют стандартные характеристики клеевого слоя — предельные напряжения отрыва и сдвига  $\bar{\sigma}_n$  и  $\bar{\sigma}_T$ .

<sup>7</sup> Фельдштейн В. А., Пауткин А. М. Численное моделирование процесса накопления повреждений в неоднородных оболочках при динамическом нагружении // Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов. Всес. конф. М. 19—21 октября 1983 г. М.: МАИ. 1983. С. 108.

Работы по расчету слоистых конструкций с расслоениями привлекают в последние годы все большее внимание исследователей вследствие их безусловной практической значимости. Имеющиеся к настоящему времени исследования характеризуются большим разнообразием подходов, моделей расслоений, уровнем строгости решения задач, методов решения.

Большинство работ по устойчивости конструкций с расслоениями выполнено, как правило, в рамках приближенных расчетных схем. Работы по изучению напряженно-деформированного состояния носят в основном постановочный характер. Обращает на себя внимание малое количество систематических численных и экспериментальных результатов по влиянию различных параметров конструкций с расслоениями на характеристики несущей способности.

Нуждаются в существенном развитии исследования по поведению стержней, пластин и оболочек с расслоениями при динамическом нагружении и при повторных воздействиях.

Необходимы экспериментальная проверка различных моделей расслоения, разработка пакетов прикладных программ расчета несущей способности конструкций с расслоениями, создание научно обоснованных методик нормирования допустимых дефектов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев Л. В., Ободан Н. И. Задачи устойчивости цилиндрической оболочки с переменной жесткостью при внешнем давлении//Прикл. механика. 1968. Т. 4. № 12. С. 82—88.
2. Артюхин Ю. П. Напряжения в клеевых соединениях//В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казанск. ун-та. 1973. Вып. 20. С. 3—27.
3. Бабич Д. В. Влияние расслоения материала на устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек//Прикл. механика. 1988. Т. 2. № 10. С. 52—56.
4. Баренблатт Г. И. Теория трещин//В кн.: Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е. М.: Наука, 1966. 709 с.: Гл. 8. Разд. 6. С. 608—628.
5. Бережницкий Л. Т., Делевский М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наук. думка, 1979. 400 с.
6. Бережницкий Л. Т., Перевозчиков В. Г., Делевский М. В., Онышко Л. И. Напряженное состояние и предельное равновесие многослойной армированной пластины с трещиной//Физико-химическая механика материалов. 1985. Т. 21. № 6. С. 17—21.
7. Блумберг Н. Н., Тамуж В. П. Краевые эффекты и концентрация напряжений в многослойных композитных пластинах//Мех. композ. материалов. 1980. № 3. С. 424—435.
8. Болотин В. В. К теории слоистых плит//Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 3. С. 65—72.
9. Болотин В. В. Теория армированной слоистой среды со случайными начальными неправильностями//Механика полимеров. 1966. № 1. С. 11—19.
10. Болотин В. В. Уравнения роста усталостных трещин//Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 153—160.
11. Болотин В. В. Стохастические модели разрушения однонаправленных волокнистых композитов//Прочность и разрушение композитных материалов. Тр. 2-го советско-американского симпозиума. Рига: Зинатне, 1983. С. 9—19.
12. Болотин В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.
13. Болотин В. В. Дефекты типа расслоений в конструкциях из композитных материалов//Мех. композ. материалов. 1984. № 2. С. 239—255.
14. Болотин В. В. Объединенные модели в механике разрушения//Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 127—137.
15. Болотин В. В. Многопараметрическая механика разрушения//В сб.: Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1984. Вып. 25. С. 12—33.
16. Болотин В. В. Уравнения роста отслоений в оболочках из композиционных материалов//В сб.: Надежность и ресурс машин и конструкций. Межведомственный темат. сборник трудов. М.: МЭИ, 1984. № 26. С. 5—10.
17. Болотин В. В. Энергетический подход к описанию роста усталостных трещин при неадиабатном напряженном состоянии//ПМТФ. 1985. № 5. С. 136—143.
18. Болотин В. В. Трещина Гриффитса в повреждаемой вязкоупругой среде//В сб.: Расчеты на прочность. М.: Машиностроение. 1985. Вып. 26. С. 19—32.

19. Болотин В. В. Механика зарождения и начального развития усталостных трещин//Физико-химическая механика материалов. 1986. Т. 22. № 1. С. 18—23.
20. Болотин В. В. Разрушение композиционных материалов по типу отслоений//В сб.: Расчеты на прочность. М.: Машиностроение. 1986. № 27. С. 8—20.
21. Болотин В. В. Повреждение и разрушение композитов по типу расслоений//Мех. композ. материалов. 1987. № 3. С. 424—432.
22. Болотин В. В. Межслойное разрушение композитов при комбинированном нагружении//Мех. композ. материалов. 1988. № 3. С. 410—418.
23. Болотин В. В. Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 448 с.
24. Болотин В. В., Ефимов А. Е., Мезенцев Н. С., Шебунин И. В., Щугорев В. Н. Трещиностойкость композитных материалов на полимерных связующих при повышенных температурах//Мех. композ. материалов. 1988. № 5. С. 839—844.
25. Болотин В. В., Ефимов А. Е., Мезенцев Н. С., Щугорев В. Н. Экспериментальное исследование влияния локального ударного нагружения на межслойную прочность композитов//Мех. композ. материалов. 1990. № 1. С. 48—51.
26. Болотин В. В., Зебельян З. Х. Устойчивость упругих сферических оболочек с расслоениями//В сб.: Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1981. Вып. 22. С. 150—165.
27. Болотин В. В., Зебельян З. Х., Курзин А. А. Устойчивость сжатых элементов с дефектами типа расслоений//Проблемы прочности. 1980. № 7. С. 3—8.
28. Болотин В. В., Нефедов С. В., Щугорев В. Н. Сопrotивление композиционных материалов межслойному разрушению//В сб.: Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1989. Вып. 30. С. 47—66.
29. Борзунов К. К., Овчинский А. С. Имитационное моделирование на ЭВМ процессов разрушения волокнистых композитов при действии сжимающих нагрузок//Тр. 13 науч. конф. мол. ученых Ин-та мех. АН УССР. Киев, 24—27 мая 1988. Ч. 2. Киев, Ин-т мех. АН УССР. 1988. С. 310—316.
30. Бугаков И. И. О расслоении колец из волокнистого и слоистого стеклопластика при внешнем давлении//Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. Математика, механика, астрономия. 1977. № 13. С. 126—131.
31. Бугаков И. И. Работа разрушения слоистых стеклопластиков по поверхности раздела//Проблемы прочности. 1978. № 4. С. 49—51.
32. Викторov Е. Г. Подрастание и излом отслоений в композитах при сжатии//Тр. МЭИ. Темат. сборник: Механика материалов и конструкций. М. 1982. Вып. 578. С. 36—40.
33. Викторov Е. Г. О развитии трещин в стержнях при продольном изгибе//Тр. МЭИ. Темат. сборник: Механика материалов и конструкций. М. 1982. Вып. 578. С. 40—42.
34. Воронцов А. Н., Мурзаханов Г. Х., Щугорев В. Н. Разрушение конструкций из композитных материалов по типу расслоений//Мех. композ. материалов. 1989. № 6. С. 1007—1023.
35. Герштейн М. С., Красулин И. Д., Розедент Б. Я., Сапрыкин Ю. М. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрической многослойной составной оболочки при продольном сжатии//В кн.: Конструкции, методы расчета газонефтепроводов и способы их строительства. М.: ВНИИСТ. 1980. С. 86—95.
36. Гниобкин В. П., Ильин В. П. К задаче о локальном выпучивании обшивок трехслойных элементов в зоне внутренних дефектов//В сб.: Механика стержневых систем и сплошных сред. Л.: 1978. Вып. 11. С. 5—13.
37. Григолюк Э. И. Уравнения трехслойных оболочек с легким наполнителем//Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 1. С. 77—84.
38. Григолюк Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек//Прикл. механика. 1972. Т. 8. Вып. 6. С. 3—17.
39. Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев: Наук. думка, 1971. 275 с.
40. Гузь А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1983. 296 с.
41. Гузь А. Н., Кнюх В. И., Назаренко В. М. Расслаивание композиционных материалов при сжатии вдоль внутренних и приповерхностных макротрещин//Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 11. С. 40—46.
42. Гулин Б. В. Учет возможности отклеивания наполнителя в задачах о переходных процессах деформации в цилиндрической оболочке с упругим наполнителем//В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казанск. ун-та. 1972. Вып. 8. С. 346—350.
43. Гурьянов Н. Г. Контактные напряжения в склеенных прямоугольных пластинах//В сб.: Иссле-

- дования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казанск. ун-та. 1984. Вып. 17. Ч. II. С. 79—82.
44. Дрюшев В. В., Прохоров Б. Ф. Влияние технологических дефектов на несущую способность трехслойных конструкций//Технология судостроения. 1981. № 10. С. 90—92.
  45. Железко И. П., Ободан Н. И. Влияние расслоений на несущую способность оболочек//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 153—158.
  46. Зайцев Г. П., Полилов А. Н. Методы оценки трещиностойкости волокнистых композитов с полимерной матрицей//Зав. лаб. 1984. Т. 50. № 11. С. 60—66.
  47. Захаров В. В., Никитин Л. В. Влияние трения на процесс расслоения разнородных материалов//Мех. композ. материалов. 1983. № 1. С. 20—25.
  48. Зубко В. И., Полевой Б. Н., Шопя В. М. Цилиндрический изгиб пакета трансверсально-изотропных пластин при наличии зон сцепления, отслоения//Мех. композ. материалов. 1990. № 3. С. 508—512.
  49. Иванов А. В., Чулков П. П. Учет поперечных деформаций заполнителя в задачах устойчивости трехслойных пластин с различными несущими слоями//Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 6. С. 101—107.
  50. Кантор Б. Я. Континуальный подход к анализу оболочек, состоящих из многих неспаиваемых слоев//ДАН УССР. Сер. А. 1983. № 10. С. 30—33.
  51. Кантор Б. Я. Нелинейная теория оболочек, составленных из несвязанных слоев//Нелинейная теория тонкостенных конструкций в биомеханике. В 2-х т. Тр. I Всесоюз. симпоз. Кутаиси-Ткибули: Тбилис. ун-т. 1985. Т. 2. С. 260—264.
  52. Кантор Б. Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения//АН УССР. Ин-т проблем машиностроения. Киев: Наук. думка, 1990. 135 с.
  53. Кантор Б. Я., Роменский В. М. Об одном численном методе исследования многослойных оболочек вращения с зазорами между слоями//Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 4. С. 27—32.
  54. Кантор Б. Я., Роменский В. М. О напряженном состоянии оболочки с односторонне контактирующими слоями различной кривизны//Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 9. С. 91—96.
  55. Качанов Л. М. Расслоение стекловолокнистых труб при внешнем давлении//Мех. полимеров. 1975. № 6. С. 1106—1108.
  56. Качанов Л. М. К вопросу о расслоении композитных материалов//Вестник Ленингр. ун-та. 1976. № 13. Вып. 3.9 С. 77—81.
  57. Кисляков С. А., Нефедов С. В. Равновесные размеры эллипсоидальных отслоений в ортотропной цилиндрической оболочке//В сб.: Надежность и ресурс машин и конструкций. Межведомственный темат. сб. трудов. М.: МЭИ. 1984. Вып. 26. С. 29—33.
  58. Кобелев В. Н., Коварский Л. М., Тимофеев С. И. Расчет трехслойных конструкций. М.: Машиностроение. 1984. 303 с.
  59. Композиционные материалы. Справочник//Под ред. В. В. Васильева и Ю. М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
  60. Копьев И. М., Овчинский А. С., Билсагаев Н. К. Моделирование на ЭЦВМ процессов разрушения композитов с дефектами прочности связи между компонентами//Разрушение композитных материалов. Тр. 1-го советско-американского симпозиума. Рига: Зинатне, 1979. С. 57—61.
  61. Кроссман Ф. В. Анализ разрушения слоистых композитов у свободного края//Мех. композ. материалов. 1979. № 2. С. 280—290.
  62. Крысин В. Н. Слоистые клееные конструкции в самолетостроении. М.: Машиностроение, 1980. 128 с.
  63. Кулиев В. Д., Каплун А. Б., Садыхов Н. Э. Прочность и долговечность слоистых композитных материалов с центральной трещиной//Физико-химическая механика материалов. 1989. Т. 25. № 2. С. 23—35.
  64. Кулиев В. Д., Мехдиев А. К., Насибов В. И. К проблеме разрушения многослойных сред с трещинами//Физико-химическая механика материалов. 1986. Т. 22. № 2. С. 33—39.
  65. Курдюмов А. А. Прочность корабля. Л.: Судостроение. 1956. 384 с.
  66. Курзин А. А. Исследование устойчивости стержней с дефектами//Изв. вузов. Машиностроение. 1978. № 7. С. 5—10.
  67. Лазько В. А. Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. I. Вариационный принцип теории упругих слоистых анизотропных систем при наличии зон неидеального контакта//Мех. композ. материалов. 1981. № 5. С. 832—836.
  68. Лазько В. А. Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при

- наличии зон неидеального контакта слоев. 2. Обобщенные уравнения ортотропных слоистых оболочек при разрывных перемещениях на границе раздела//Мех. композ. материалов. 1982. № 1. С. 77—84.
69. Лазько В. А. О вариационных формулировках задач для кусочнооднородных сред при наличии зон несовершенной связи на границах раздела//Мех. неоднородных структур. Матер. I Всес. конф. Львов, сентябрь 1983. Киев, 1986. С. 123—129.
  70. Лазько В. А., Мачуга О. С. Определение границ межслойных дефектов в слоистых анизотропных оболочках//Мех. композ. материалов. 1985. № 6. С. 1112—1115.
  71. Любчак В. А., Фильштинский Л. А. Упругое равновесие анизотропной оболочки с трещинами//В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казанск. ун-та. 1985. Вып. 19. С. 57—75.
  72. Мальшиев А. П. Переходные процессы в оболочке с расслоениями//Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 101—105.
  73. Мачуга О. С., Пелех Б. Л. О сопротивлении разрушению слоистых анизотропных пластин с дефектами на границах раздела//Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 168—174.
  74. Мачуга О. С., Щербина Н. Н. Моделирование и оптимизация структурной поврежденности цилиндрических оболочек с расслоениями//Мех. композ. материалов. 1990. № 6. С. 1079—1086.
  75. Методы динамических расчетов и испытаний тонкостенных конструкций//Под ред. А. В. Кармишина. М.: Машиностроение, 1990. 288 с.
  76. Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т. Т. 1. Механика материалов//Под ред. А. Н. Гузя. Киев: Наук. думка, 1982. 368 с.
  77. Михайлов А. М. Динамические задачи теории трещин в балочном приближении//ПМТФ. 1966. № 5. С. 167—172.
  78. Михайлов А. М. Некоторые задачи теории трещин в балочном приближении//ПМТФ. 1967. № 5. С. 128—133.
  79. Мурзаханов Г. Х., Кисляков С. А. Экспериментально-теоретическое исследование развития расслоений в пластинах из композитного материала//Науч. тр. МЭИ. 1985. № 83. С. 10—15.
  80. Мурзаханов Г. Х., Несин Д. Н. Расчет роста эллипсоидальных отслоений в сферической оболочке при циклическом нагружении//В сб.: Надежность и ресурс машин и конструкций//Межведомственный темат. сборник трудов. М.: МЭИ. 1984. № 26. С. 15—20.
  81. Мурзаханов Г. Х., Щугорев В. Н. Влияние вторичных трещин на устойчивость и рост отслоений в конструкциях из композитов//Мех. композ. материалов. 1988. № 6. С. 1120—1124.
  82. Мурзаханов Г. Х., Щугорев В. Н. Поведение отслоений вблизи надрезов в пластинах и оболочках из композитных материалов//Мех. композ. материалов. 1991. № 1. С. 61—68.
  83. Несин Д. Н. Малоцикловая усталость композитов с нарушениями сплошности между слоями//Мех. композ. материалов. 1985. № 1. С. 114—146.
  84. Нефедов С. В. Анализ роста эллипсоидальных отслоений в композитах при длительных квазистатических нагрузках//Мех. композ. материалов. 1988. № 5. С. 827—833.
  85. Нефедов С. В. Расчет роста эллипсоидальных отслоений в пластинах из композиционных материалов при межслойном разрушении//Науч. тр. МЭИ. 1988. № 190. С. 14—18.
  86. Новичков Ю. Н. Изгиб слоистых стержней с проскальзыванием между слоями//Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1974. № 4. С. 67—73.
  87. Новичков Ю. Н. Осесимметричная деформация многослойных цилиндрических оболочек с учетом проскальзывания между слоями//Тр. МЭИ. 1975. № 227. С. 109—118.
  88. Носатенко П. Я. Численное исследование эффекта свободного края в перекрестно армированных оболочках//Мех. композ. материалов. 1991. № 1. С. 127—131.
  89. Опанасович В. К. Напряженное состояние пластины и оболочек с дефектами типа трещин и тонких включений//Физико-химическая механика материалов. 1989. Т. 25. № 2. С. 127—128.
  90. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с трещинами. Киев: Наук. думка, 1985. 224 с.
  91. Паймушин В. Н. Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непроклея//Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 11. С. 32—38.
  92. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.
  93. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 444 с.

94. *Партон В. Э., Черепанов Г. П.* Механика разрушения//В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. М.: Наука, 1972. С. 365—467.
95. *Парцевский В. В.* Приближенный анализ механизмов разрушения слоистых композитов у свободного края//Мех. композ. материалов. 1980. № 2. С. 246—253.
96. *Парцевский В. В.* Расслоение композитных пластин при изгибе//Мех. композ. материалов. 1990. № 6. С. 1047—1050.
97. *Парцевский В. В., Петровский А. В.* Кромочные эффекты в перекрестно армированных композитах//Мех. композ. материалов. 1980. № 4. С. 585—591.
98. *Пелех Б. Л.* Проектирование слоистых композиционных материалов и конструкций из них с повышенной трещиностойкостью. Киев: Общество Знание Укр. ССР, 1982. 20 с.
99. *Пелех Б. Л., Коровайчук И. М.* Об одном классе задач для слоистых композитов при наличии зон проскальзывания на границе раздела фаз//Мех. композ. материалов. 1981. № 2. С. 342—345.
100. *Пелех Б. Л., Лазыко В. А.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. Киев: Наук. думка, 1982. 296 с.
101. *Пелех Б. Л., Лазыко В. А., Мачуга О. С.* Вариационный метод исследования концентрации напряжений возле межслойных дефектов в слоистых анизотропных оболочках и пластинах//Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 11. С. 124—128.
102. *Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М.* Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. Киев: Наук. думка, 1988. 280 с.
103. *Пелех Б. Л., Мачуга О. С.* Двухпараметрическая модель разрушения адгезионных соединений//Мех. композ. материалов. 1988. № 6. С. 1034—1039.
104. *Перов Ю. Ю.* Предотвращение кромочного расслаивания слоистых пластиков//Мех. композ. материалов. 1991. № 3. С. 468—473.
105. *Пимштейн П. П., Жукова В. Н.* Расчет напряжений в многослойном цилиндре с учетом особенностей контакта слоев//Проблемы прочности. 1977. № 5. С. 71—77.
106. *Писчиков В. Г.* Продольный изгиб составных стержней//Проект и стандарт. 1935. № 2. С. 34—36.
107. *Писчиков В. Г.* Поперечный и продольный изгиб составных деревянных стержней//Проект и стандарт. 1936. № 6. С. 26—33.
108. *Плешков П. Ф.* О продольном изгибе деревянных составных стержней//Проект и стандарт. 1935. № 2. С. 37—40.
109. *Полилов А. Н., Погарский М. В.* Оценка опасности продольных трещин при сжатии композитных элементов//Проблемы машиностроения и надежности машин. 1992. № 4. С. 87—93.
110. *Полилов А. Н., Работнов Ю. Н.* О разрушении композитных труб по форме «китайского фонарика»//Мех. композ. материалов. 1983. № 3. С. 548—550.
111. *Полилов А. Н., Работнов Ю. Н.* Развитие расслоений при сжатии композитов//Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 166—171.
112. *Поляков В. А., Жигун И. Г., Хитров В. В.* Оценка напряжений в зоне кромочного эффекта при растяжении слоистых композитов//Мех. композ. материалов. 1987. № 5. С. 787—796.
113. *Поляков В. А., Перов Ю. Ю.* Экспериментальные методы оценки кромочного эффекта//Мех. композ. материалов. 1989. № 2. С. 318—331.
114. *Регель В. Р., Лексовский А. М., Поздняков О. Ф.* Изучение кинетики разрушения композитных материалов//Разрушение композитных материалов. Тр. 1-го советско-американского симпозиума. Рига: Зинатне, 1979. С. 32—37.
115. *Ржаницын А. Р.* Теория составных стержней строительных конструкций. М.: Стройиздат, 1948. 192 с.
116. *Ржаницын А. Р.* Составные стержни и пластинки. М.: Стройиздат, 1986. 316 с.
117. *Рочинский С. Л., Плейков Л. В., Дрейцер В. И., Першин В. А.* Пути повышения несущей способности стеклопластиковых оболочек, нагруженных внешним гидростатическим давлением//В кн.: Методы расчета и пробл. прочн. конструкций из современ. материалов. Владивосток. 1983. С. 68—79.
118. *Рыска Я.* Влияние кромочных эффектов на напряженное состояние и прочность углеродных композитов при растяжении//Мех. композ. материалов. 1985. № 2. С. 263—270.
119. *Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 446 с.
120. *Семенов Н. П.* Об учете несовершенного контакта слоев в двухслойных цилиндрических оболочках//Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 1. С. 58—63.

121. Семенюк Н. П., Бойко Н. Б. Моделирование дискретной связи слоев при расчете на устойчивость двухслойной цилиндрической оболочки//Прикл. механика. 1982. Т. 18. № 7. С. 46—51.
122. Серенсен С. В., Зайцев Г. П. Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами. Киев.: Наук. думка, 1982. 295 с.
123. Си Дж. Механика разрушения композитных материалов//Разрушение композитных материалов. Тр. 1-го советско-американского симпозиума. Рига: Зинатне, 1979. С. 107—119.
124. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение. 1981. 296 с.
125. Стародубцев И. П. Плоская задача расслаивания композиционных материалов при сжатии вдоль двух внутренних параллельных трещин//Тр. 13 науч. конф. мол. ученых Ин-та мех. АН УССР. Киев. 24—27 мая 1988. Ч. 3. Киев. Ин-т мех. АН УССР. 1988. С. 523—527.
126. Тарнопольский Ю. М. Расслоение сжимаемых стержней из композитов//Разрушение композитных материалов. Тр. 1-го советско-американского симпозиума. Рига: Зинатне, 1979. С. 160—166.
127. Тимошенко С. П. Вопросы прочности машиностроения//В сб.: С. П. Тимошенко. Прочность и колебания элементов конструкций./Под ред. Э. И. Григोलюка. М.: Наука, 1975. С. 556—643.
128. Томашевский В. Т. Моделирование влияния технологии на качество и несущую способность изделий из композитных материалов//Мех. композ. материалов. 1987. № 1. С. 105—111.
129. Томашевский В. Т., Захватов А. С., Яковлев В. С. Влияние расслоений на устойчивость цилиндрических оболочек из композитов//Мех. композ. материалов. 1981. № 4. С. 683—691.
130. Трегуб А. В. Напряженное состояние осесимметричной конструкции с внутренним расслоением//В сб.: Прикл. задачи механики сплошной среды и геокосмической физики. М. 1988. С. 56—60.
131. Трошин В. П. К устойчивости цилиндрических оболочек с расслоениями//Мех. композ. материалов. 1981. № 4. С. 729—731.
132. Трошин В. П. Влияние продольного расслоения в слоистой цилиндрической оболочке на величину критического внешнего давления//Мех. композ. материалов. 1982. № 5. С. 839—843.
133. Чай Х., Бэбок К. Д., Кнаусс В. Г. О моделировании роста дефекта расслоения в композитной пластине при действии продольной импульсной нагрузки//Прочность и разрушение композитных материалов. Тр. 2-го советско-американского симпозиума. Рига: Зинатне, 1983. С. 45—47.
134. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
135. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
136. Черепанов Г. П. Механика трещин расслаивания//ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 832—845.
137. Чоу Ш. Ч. Расслоение в графитэпоксидных композитах//Прочность и разрушение композитных материалов. Тр. 2-го советско-американского симпозиума. Рига: Зинатне, 1983. С. 136—145.
138. Чулков П. П. Уравнения колебаний упругих слоистых оболочек//В сб.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: 1970. Вып. 4. С. 19—29.
139. Шаповалов Л. А., Парамонов В. В. Об устойчивости двухслойной полосы при осевом сжатии с учетом упругого контакта слоев//Изв. вузов. Машиностроение. 1989. № 12. С. 7—10.
140. Шебунин И. В. Поведение отслоений в композитных материалах при тепловом воздействии//Мех. композ. материалов. 1988. № 4. С. 644—650.
141. Шопа В. М., Полевой Б. Н., Зубко В. И. Цилиндрический изгиб двухслойной пластины с учетом сил трения//Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 11. С. 63—68.
142. Щугорев В. Н. Дефекты типа отслоений при совместном действии отрыва и межслойного сдвига//Мех. композ. материалов. 1987. № 3. С. 539—542.
143. Щугорев В. Н. Экспериментально-теоретическое исследование кинетики роста карманообразных отслоений в цилиндрической оболочке из композиционного материала//Научн. тр. МЭИ. 1988. № 190. С. 10—14.
144. Щугорев В. Н. Кинетика дефектов типа отслоений при совместном действии отрыва и межслойного сдвига//Мех. композ. материалов. 1988. № 2. С. 227—231.
145. Amar C. G. Delamination a damage mode in composite structures//Eng. Fract. Mech. 1988. V. 29. № 5. P. 557—584.
146. Barber J., Triantafylidis N. Effect of debonding on the stability of fiber-reinforced composites//Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1985. V. 52. № 1. P. 235—237.
147. Barsoum Roshdy S., Freede C. E. An iterative approach for the evaluation of delamination stresses in laminated composites//Int. J. Numer. Meth. Eng. 1984. V. 20. № 8. P. 1415—1451.
148. Bolotin V. V. Fracture and fatigue of composite plates and shells. — Inelastic behaviour of plates and shells//IUTAM symposium. Rio de Janeiro. 1985. Berlin, Heidelberg: Springer. 1986. P. 131—161.



149. *Chai H., Babcock C. D., Knauss W. G.* One dimensional modelling of failure in laminated plates by delamination buckling//Int. J. Solids and Struct. 1981. V. 17. № 11. P. 1069—1083.
150. *Chen Z. Q., Simitses G. J.* Delamination buckling of pressure loaded, cross-ply, laminated cylindrical shells//Z. angew. Math. und Mech. 1988. Bd. 68. № 10. S. 491—501.
151. *Clark G.* Modelling of impact damage in composite laminates//Composites (Gr. Brit.). 1989. V. 20. № 3. P. 209—214.
152. *Cristensen R. M.* Mechanics of composite materials. New York etc: Wiley. 1979. XVI + 348 p. Перевод: *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир. 1982. 334 с.
153. *Fish John C., Lee Sung W.* Delamination of tapered composite structures//Eng. Fract. Mech., 1989. V. 34. № 1. P. 43—54.
154. Fracture. An advanced treatise. In 7 Volumes. Vol. 2. Mathematical fundamentals./Ed. H. Liebowitz. N.—Y., London: Academic Press. 1968, XVI + 759 p.; Vol. 7. Fracture of nonmetals and composites./Ed. H. Liebowitz. N.—Y., London: Academic Press. 1972. 948 p. Перевод: Разрушение. Ред. Либовиц Г. Т. 2. Математические основы теории разрушения./Ред. русского перевода А. Ю. Ишлинский. М.: Мир. 1975. 764 с.; Т. 7. Разрушение неметаллов и композиционных материалов. Часть 1. Неорганические материалы./Ред. русского перевода Ю. Н. Работнов. М.: Мир. 1976. 634 с.
155. *Gamski K.* Defects and damage growth detection in fibre composite laminates//Mech. Charact. Load Bear. Fibre Compos. Laminates: Proc. Eur. Mech. Colloq. 182. Brussels 29—31 Aug. 1984. London — New — York: 1985. P. 151—160.
156. *Griffith A. A.* The theory of rupture//Proc. First Int. Congress Appl. Mech. Delft. 1924. P. 55—63.
157. *Griffith A. A.* The phenomenon of rupture and flow in solids//Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1920. V. 221. P. 163—198.
158. *Hahn H. T., Lorenzo L.* Fatigue failure mechanisms in composite laminates//Adv. Fract. Res.: Proc. 6th Int. Conf. (ICFG). New Delhi. 4—10 Dec. 1984. V. 1. Oxford. 1984. P. 549—568.
159. *Hong C. S., Kim K. S.* An analysis of free-edge delamination in laminated composite under uniform axial strain//Progr. Sci. and Eng. Compos. Proc. 4 Int. Conf. ICCM-IV. Tokyo. Oct. 25—28. 1982. V. 1. Tokyo. 1982. P. 261—268.
160. *Ilis S., Williams J. F.* Compression failure modes in composites//Theor. and Appl. Fract. Mech. 1986. V. 6. N 2. P. 121—127.
161. *Irwin G. R.* Fracture dynamics//In: Fracturing of metals. Cleveland: ASM. 1948. P. 147—166.
162. *Kassapoglou Christos, Jonas Paul J., Abbot Ric.* Compressive strength of composite sandwich panels after impact damage: An experimental and analytical study//J. Compos. Technol. and Res. 1988. V. 10. № 2. P. 65—73.
163. *Kulkarni S. V., Frederik D.* Buckling of partially debonded layered cylindrical shells//AIAA Paper. 1973. N 73—366. 9 p.
164. *Kulkarni S. V., Frederik D.* Propagation of delamination in layered cylindrical shell//Int. J. Fracture. 1973. V. 9. № 1. P. 113—115.
165. *Liu Dahsin.* Impact-induced delamination — a view of bending stiffness mismatching//J. Compos. Mater. 1988. V. 22. № 7. P. 674—692.
166. *Mulville D. R., Hunston D. L., Mast P. M.* Developing failure criteria for adhesive joints under complex loading//Trans. ASME. J. Eng. Mater. and Technol. 1978. V. 100. № 1. P 25—31. Перевод: *Молвил Д., Ханстон Д., Маст П.* Установление критериев разрушения клеевых соединений при комбинированном нагружении//В сб.: Теоретические основы инженерных расчетов. М.: Мир. 1978. Т. 100. N 1. С. 29—36.
167. *Mujumdar P. M., Suryanarayan S.* Flexural vibration of beams with delaminations//J. Sound and Vibr. 1988. V. 125. № 3. P. 441—461.
168. *Murthy Pappu L. N., Chamis Christos C.* Free-edge delamination: laminate width and loading conditions effects//J. Compos. Technol. and Res. 1989. V. 11. № 1. P. 15—22.
169. *Naniewicz Z., Wozniak Cz.* On a quasi-stationary model of debonding processes in layered composites//Ing.-Arch. 1988. V. 58. № 6. P. 403—412.
170. *Ochoa Ozder O., McDuffie Mark.* A study of delamination in asymmetric laminates//Comput. Mech. 1988. Theory and Appl.: Proc. Int. Conf. Comput. Eng. Sci. Atlantâ. Ga. Apr. 10—14. 1988. V. 1. Berlin. 1988. C. 22. IX.1—22.IX.2.
171. *Ochoa Ozder O., Moore Allan.* A parametric study on strain energy release rates of compression members//Compos. Struct. 1989. V. 11. № 2. P. 151—163.

172. *Orowan E. O.* Fundamentals of brittle behaviour of metals//In: Fatigue and Fracture of Metals. N. Y.: Wiley. 1950. P. 139—167.
173. *Pagano N. J., Pipes R. B.* Some observations of the interlaminar strength of composite laminates//Int. J. Mech. Sci. 1973. V. 15. P. 679—688.
174. *Panagiotopoulos P. D.* Hemivariational inequalities and their applications to composite material structures //Trends. Appl. Math. Mech.: Proc. 7th Symp. Wassennar. Dec. 7—11. 1987. Berlin e. a., 1988. P. 204—214.
175. *Panagiotopoulos P. D., Stavroulakis G. E.* A hemivariational inequality approach to the delamination effect in theory of layered plates//Arch. mech. stosow. 1987. V. 39. № 5. P. 497—512.
176. *Partridge C., Waechter R. T., Williams J. F., Jones R.* A finite element analysis of delamination behaviour in a circular laminate//Comput. and Struct. 1989. V. 31. № 1. P. 17—20.
177. *Rasty J., Sabbaghian M.* Effect of imperfect contact between adjacent layers on the integrity of wrapped vessels//Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol. 1988. V. 110. № 3. P. 247—254.
178. *Sallam S., Simitzes G. J.* Delamination buckling and growth of flat, cross-ply laminates//Compos. Struct. 1985. V. 4. P. 361—381.
179. *Sheinman I.* On the cylindrical buckling load of laminated columns//ASCE. J. Eng. Mechanics. 1989. V. 115. № 3. P. 659—661.
180. *Sheinman I., Bass M., Ishi O.* Effect of delamination on stability of laminated composite strip//Compos. Struct. 1989. V. 11. № 3. P. 227—242.
181. *Sheinman I., Simitzes G. J.* A modification of Potter's method for diagonal matrices with common unknown//Comput. and Struct. 1984. V. 18. № 2. P. 273—275.
182. *Sheinman I., Soffer M.* Effect of delamination on the nonlinear behaviour of composite laminated beams//J. Eng. Mater. and Technol. 1990. October. V. 112. P. 393—397.
183. *Shirakumar K. N., Whitcomb J. D.* Buckling of sublaminates in a quasi-isotropic composite laminate//J. Compos. Mater. 1985. V. 19. P. 2—18.
184. *Simitzes G. J., Chen Z. Q.* Delamination buckling of pressure loaded thin cylinders and panels//Compos. Struct. 4: Proc. 4th Int. Conf. Paisley. 27th—29th July. 1987. V. 1. London; New York. 1987. P. 294—308.
185. *Simitzes G. J., Sallam S., Yin W. L.* Effect of delamination of axially loaded homogeneous laminated plates//AIAA Journal. 1985. V. 23. № 9. 1437—1444.
186. *Soni S. R.* Stress and strength analysis of composite laminates at delamination//Progr. Sci. and Eng. Compos.: Proc. 4 Int. Conf. ICCM-IV. Tokyo. Oct. 25—28. 1982. V. 1. Tokyo. 1982. P. 251—260.
187. *Soni S. R.* Design analysis of thin composites//28th Nat. SAMPE Symp. and Exhib. Anaheim. Calif. 12—14 Apr. 1983. Azusa. Calif. 1983. P. 189—199.
188. Stress intensity factors handbook. In 2 Volumes./Ed. Y. Murakami. Oxford. N.-Y. a. e.: Pergamon Press. 1987. Vol. 1, 640 p.; Vol. 2, 641 p. Перевод: Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2-х томах./Под ред. Ю. Мураками. М.: Мир. 1990. Т. 1. 448 с., Т. 2. С. 449—1013.
189. *Suemasu H., Wang S. S.* Analytical method to solve postbuckling behaviour of delaminated composite plates//J. Jap. Soc. Compos. Mater. 1988. V. 14. № 1. P. 26—35.
190. *Sun C. T.* Impact response and damage in composite laminates//Failure Anal. Compos. Laminates: Workshop. Atlanta. Oct. 1—3. 1985. Lancaster (Pa). 1985. P. 1—36.
191. *Sun C. T., Manoharan M. G.* Growth of delamination cracks due to bending in a [90<sub>s</sub>/0<sub>s</sub>/90<sub>s</sub>] laminate//Compos. Sci. and Technol. 1989. V. 34. № 4. P. 365—377.
192. *Trethewey B. R., Gillespie J. W., Carlsson L. A.* Mode II cyclic delamination growth//J. Compos. Mater. 1988. V. 22. № 5. P. 459—493.
193. *Tsai Sw., Hahn Ht.* Analysis of composite fracture//In: Inelastic behaviour of composite materials. Vol. 13./Ed. Carl T. Herakovich. N.-Y.: ASME, 1975, VII+211 p.: P. 73—96. Перевод: Цай С., Хан Х. Анализ разрушения композитов//В кн.: Неупругие свойства композитных материалов./Под ред. К. Гераковича. М.: Мир. 1978. 295 с.; С. 104—139.
194. *Wang S. S.* Fracture mechanics for determination problems in composite materials//J. Compos. Mater. 1983. V. 17. N 3. P. 210—223.
195. *Whitney J. M.* Structural analysis of laminated anisotropic plates. Lancaster. Basel: Technomic Publishing Co. 1987, XII+342 p.
196. *Whitney J. M., Knight M.* Effect of residual stresses on edge delamination in composite materials//30th. AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Conf.: Struct., Struct. Dyn. and Mater. Mobile, Ala, Apr. 3—5, 1989. Collect. Techn. Pap. Washington (D. C.), 1989. P. 1666—1670.

197. *Wozniak Cz.* Mathematical modelling of delamination effects//Arch. mech. stosow. 1988. V. 40. N 5—6. P. 871—884.
198. *Yin W. L.* Cylindrical buckling of laminated and delaminated plates//Proc. 27th AIAA/ASME/ASCE/AHS Struct. Dyn. and Mater. Conf. Part V. San Antonio. 1986. P. 165—179.
199. *Yin W. L., Fei Z.* Postbuckling growth of a circular delamination in a laminate under compression and bending//SECTAM 12: 12th Southeast. Conf. Theor. and Appl. Mech. Callaway Gardens. Ga. May 10—11. 1984. Proc. V. 2. Auburn. 1984. P. 130—134.
200. *Yin W. L., Fei Z.* Delamination buckling and growth in a clamped circular plate//AIAA Journal. 1988. V. 26. N 4. P. 438—445.
201. *Yin W. L., Sallam S., Simitzes G. J.* Ultimate axial load capacity of a delaminated beam-plate//AIAA Journal. 1986. V. 24. № 1. P. 123—128.
202. *Yin W. L., Wang J. T. S.* Energy-release rate in the growth of a one-dimensional delamination.//Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1984. V. 51. № 4. P. 939—941.

Москва

Поступила в редакцию  
12.V.1992