

УДК 539.3

© 1994 г. В. М. ТОЛКАЧЕВ

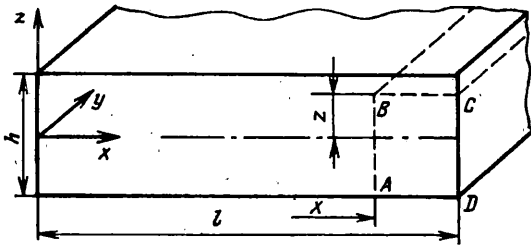
КРАЕВЫЕ ЭФФЕКТЫ В СЛОИСТЫХ ПЛАСТИНАХ

Рассмотрены слоистые пластины-композиции с мягкими склеивающими слоями и достаточно жесткими несущими слоями. Дан анализ напряжений взаимодействия между слоями, которые могут стать причинами расслоений и сколов. Значительное внимание отводится краевым зонам, где имеет место локализация напряжений. Предложены конструктивные меры снижения напряжений в несущих слоях.

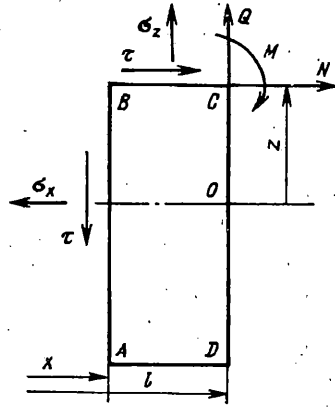
1. Краевые эффекты в классической теории пластин. Классическая теория пластин, построенная на основе гипотез Кирхгофа является самой простой и самой распространенной в инженерной практике. Однако в зонах, примыкающих к контуру пластины, она часто не дает истинной картины напряженно-деформированного состояния в пластине, а характеризует это состояние в интегральном смысле. Если же все-таки на основе классической теории пытаться анализировать краевые эффекты, иногда приходят к неразрешимости задачи в рамках обычных представлений о непрерывности функций, характеризующих напряжения. Чтобы задача стала разрешимой, приходится вводить сосредоточенные факторы-усилия и моменты. По этой причине можно услышать критику в адрес классической теории, но, по-видимому, здесь следует проявлять осторожность. Если, например, исследователя интересует истинный характер распределения напряжений вблизи краев, классическую теорию применять нельзя. Но часто инженера интересуют силовые факторы интегральные, тогда классическая теория может сослужить двойную пользу. Во-первых, упростится процедура нахождения этих факторов и, во-вторых, упростится процесс вычисления напряжений. Кроме этого, сам факт появления сосредоточенных сил и моментов в рамках классической теории является доказательством существования зон концентрации напряжений в реальных пластинах. Недостатки теории фактически становятся ее преимуществами. Например, никто уже не задумывается над вопросом правомерно ли введение сосредоточенных сил и моментов при рассмотрении изгиба балок. Без сосредоточенных нагрузок немисливо сделать даже простые расчеты. Но в природе сосредоточенных сил нет. Если попытаться найти реальные нагрузки, придется решать контактные задачи, что является безнадёжной задачей в инженерных расчетах. К счастью контактные задачи решать не нужно, так как изгибные напряжения в балке практически не зависят от характера распределения контактного давления при малых площадках контакта. Напряжения зависят лишь от равнодействующей контактных усилий, т. е. от величины и места приложения сосредоточенной силы.

Проведенные рассуждения являются, на наш взгляд, обоснованием нашего интереса к краевым эффектам в рамках классической теории пластин. Обратимся к рассмотрению примеров.

Температурный изгиб полосы. Рассмотрим пластину-полосу, бесконечно протяженную вдоль оси y (фиг. 1). Ширина полосы l , толщина h . Полоса неравномерно нагрета по толщине. По координате y температура не меняется, по x может



Фиг. 1



Фиг. 2

либо изменяться, либо нет. Рассмотрим равновесие элемента ABCD полосы, прилегающего к правому краю $x=1$ (фиг. 1). Край считаем не нагруженным внешними силами. На элемент действуют нормальные σ_x , σ_z и касательные напряжения τ . Ниже показано, что для выполнения условий равновесия элемента нужно приложить еще погонные сосредоточенные усилия и моменты по кромке C (фиг. 1 и 2), примыкающей к боковой поверхности пластины. Это реактивные усилия Q и N и моменты M . Они действуют в плоскостях, параллельных плоскости пластины xu и являются факторами взаимодействия между слоями.

Нормальные напряжения σ_x определяются по формуле

$$\sigma_x = N_T/h + 12z M_T/h^3 - E\alpha T/(1 - \nu) \quad (1.1)$$

$$N_T = \frac{E\alpha}{1 - \nu} \int_{-1/2h}^{1/2h} T dz, \quad M_T = \frac{E\alpha}{1 - \nu} \int_{-1/2h}^{1/2h} T z dz$$

где N_T и M_T — температурное усилие и момент; E , α , ν — модуль упругости, коэффициент термического расширения, коэффициент Пуассона; h — толщина пластины.

Введем равнодействующие усилия N_x и Q_x от напряжения σ_x и τ , а также момент M_x в элементе ABCD (фиг. 1, 2). Они определяются формулами

$$N_x = \int_{-1/2h}^z \sigma_x dz, \quad Q_x = \int_{-1/2h}^z \tau dz, \quad M_x = \int_{-1/2h}^z \sigma_x z dz \quad (1.2)$$

Проектируя все силы из фиг. 2 на горизонтальную ось x , получим

$$-N_x + \int_x^l \tau dx + N = 0 \quad (1.3)$$

усилия N не зависят от x , отсюда находим:

$$\tau = -dN_x/dx \quad (1.4)$$

Если температура не меняется вдоль оси x , то не будут изменяться напряжения σ_x согласно формуле (1.1) и усилие N_x , определяемое формулой (1.2). Значит $\tau = 0$. Касательные усилия взаимодействия между слоями в данной задаче отсутствуют. Усилие N_x отлично от нуля, ибо напряжения σ_x отличны от нуля и уравновешены лишь по сечению в целом. Таким образом, чтобы выполнить уравнение равновесия (1.3), необходимо введение усилий N , которые определяются равенством: $N = N_x$. Если усилия N не вводить, уравнение равновесия граничного элемента выполнить нельзя.

Данный вывод остается в силе в самом общем случае. Если температура T будет меняться вдоль оси x произвольно, то формула (1.1) остается в силе, но усилие N_x согласно (1.2) будет функцией от x и касательное напряжение τ согласно формуле (1.4) будет отличным от нуля. Теперь уравнение (1.3) в пределе при $x=l$ дает

$$N = N_x \text{ при } x = l \quad (1.5)$$

Иными словами, сосредоточенные реактивные усилия взаимодействия между слоями в общем случае также существуют. Уравнение (1.5) выполняет роль краевого условия на контуре пластины в каждой точке z по ее толщине. Проектируя силы на вертикальную ось, получим уравнение:

$$\int_x^l \sigma_z dx + Q - Q_x = 0 \quad (1.6)$$

Устремляя x к l , получим

$$Q = Q_x \text{ при } x = l \quad (1.7)$$

Если температура не меняется по x , то, как было показано выше, $\tau = 0$ и, значит, $Q_x = 0$. Это следует из второй формулы (1.2). Из (1.7) теперь находим $Q = 0$, а из уравнения (1.6) $\sigma_z = 0$. Волокна не надавливают друг на друга в поперечном направлении. В общем случае произвольно изменяющейся по x температуры из уравнения (1.6) находим:

$$\sigma_z = -dQ_x/dx \quad (1.8)$$

Таким образом, в рамках теории Кирхгофа существуют краевые погонные силы Q , отрывающие смежные волокна друг от друга в поперечном направлении. Вычисляя сумму моментов всех сил относительно точки O (фиг. 2), получим в пределе при $x=l$ третье уравнение равновесия

$$M = M_x \text{ при } x = l \quad (1.9)$$

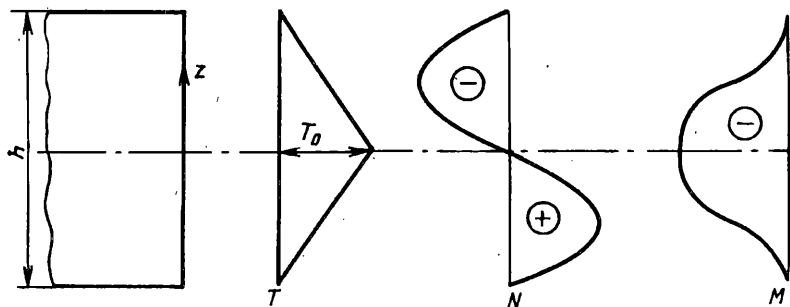
Отсюда следует, что между слоями в рамках теории Кирхгофа присутствуют концевые погонные моменты M (фиг. 2), определяемые по формуле (1.9).

Основной итог выполненных доказательств в том, что теория пластин, построенная на гипотезах Кирхгофа, приводит к наличию погонных усилий Q , N и моментов M , приложенных по линиям пересечения боковой поверхности пластины с плоскостями $z = \text{const}$, параллельными срединной плоскости x . Эти усилия и моменты являются реакциями взаимодействия между смежными слоями пластины, примыкающими к плоскостям сечения $z = \text{const}$. Они определяются по формулам (1.5), (1.7), (1.8), которые ввиду их принципиальной важности запишем вместе

$$N = N_x, \quad Q = Q_x, \quad M = M_x \quad (1.10)$$

Эти равенства можно назвать краевыми условиями в рамках теории Кирхгофа. В реальных пластинах усилий N , Q и моментов M нет. Но их появление в классической теории — это верный признак наличия концентрации напряжений в краевых зонах. Усилия N — это следствие концентрации касательных напряжений τ , усилия Q и моменты M — следствие концентрации нормальных напряжений σ_z . В какой-то мере они дают оценку величины равнодействующей силы и момента от напряжений E_τ и σ_z в реальных пластинах и характера их распределения по толщине пластины.

В качестве примера рассмотрим полосу толщиной h , с модулем упругости E и коэффициентом термического расширения α . Закон изменения температуры по высоте сечения зададим в виде (фиг. 3) $T = T_0(1 - |t|)$, $t = 2z/h$. Для простоты возьмем коэффициент Пуассона $\nu = 0$, чтобы не завязывать напряжения σ_y и σ_x . Это будет соответствовать расчету стержня прямоугольного сечения.



Фиг. 3

По формуле (1.1) находим напряжение $\sigma_x = E\alpha T_0 (|t| - 1/2)$. Затем вычисляем усилия N и моменты M по формулам (1.2), (1.10):

$$N = 1/4 E\alpha T_0 h |t| (|t| - 1) \text{ sign } t, \quad M = 1/48 E\alpha T_0 h^2 (3t^2 - 2|t|^3 - 1)$$

Эпюры распределения усилий N и моментов M показаны на фиг. 3.

Учет краевых внешних нагрузок. Имеется в виду, что в задаче изгиба пластины либо под воздействием внешних сил, либо в температурной задаче на краю пластины $x=l$ приложены заданные внешние напряжения τ^* и σ_x^* (фиг. 4). При этом можно себе представить две ситуации. Первая, когда задан характер изменения напряжений τ^* и σ_x^* как некоторых непрерывно изменяющихся функций координаты z . В этом случае равнодействующими факторами будут два усилия N_x^* и Q_x^* , а также момент M_x^* , которые определятся по формулам (1.2), если σ_x и τ заменить на σ_x^* и τ^* . Вместо краевых условий (1.10) будут иметь место краевые условия, обобщающие (1.10):

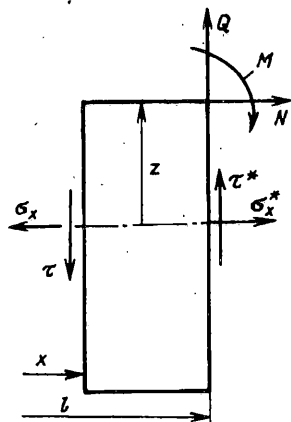
$$N = N_x - N_x^*, \quad Q = Q_x - Q_x^*, \quad M = M_x - M_x^* \quad \text{при } x = l \quad (1.11)$$

Наличие слагаемых со звездочками, являющихся заданными функциями координаты z , изменит характер распределения погонных реактивных усилий N , Q и моментов M (фиг. 4). Вторая ситуация может рассматриваться как частный случай первой, когда по линии вдоль контура пластины приложены внешние погонные силы Q^* , N^* и моменты M^* на некотором расстоянии a от срединной плоскости пластины (фиг. 5). Естественно, таких линий приложения внешних сил и моментов может быть несколько. В этом случае условия (1.11) сохраняют силу. Разница лишь в том, что величины N_x^* , Q_x^* и M_x^* будут изменяться скачком. Для случая, показанного на фиг. 5, скачок будет на линии $z = a$, а именно при $z < a$: $N_x^* = Q_x^* = M_x^* = 0$; при $z > a$: $N_x^* = N^*$, $Q_x^* = Q^*$, $M_x^* = M^*$.

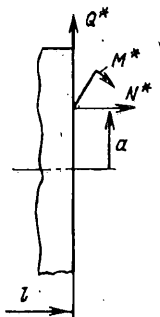
Если линий приложения сосредоточенных усилий и моментов несколько, нужно будет добавлять сосредоточенный фактор при переходе через каждую линию.

Все это позволяет сделать весьма важный практический вывод, суть которого состоит в следующем.

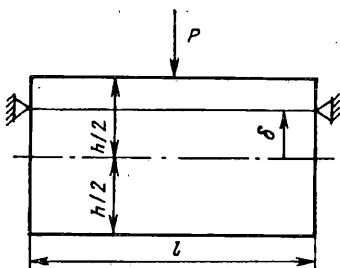
Характер распределения внешних напряжений на боковой контурной поверхности пластины является определяющим фактором, влияющим на характер изменения усилий N , Q и моментов M , которые взаимодействуют между смежными слоями пластины, граничащими по линиям пересечения плоскостей $z = \text{const}$ с боковой поверхностью пластины. Это линии C на фиг. 1. Напомним, что Q — усилия отрыва слоев, N — усилия сдвига между слоями, M — моменты, препятствующие взаимному повороту слоев. Данный вывод распространяется и на случай сосредоточенных усилий Q^* , N^* , а также моментов M^* . Иными словами, напряженное состояние вблизи края пластины в сильной степени будет зависеть от того, как



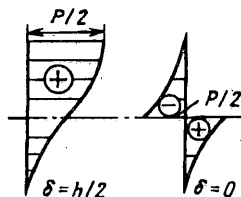
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

нагружен или закреплен край. Этот факт особенно важен при рассмотрении слоистых пластин. В зависимости от способа закрепления каждого слоя, будет существенно меняться напряженное состояние слоистой композиции. Данному обстоятельству, на наш взгляд, уделяется в настоящее время недостаточно внимания при разработке теорий слоистых пластин и оболочек.

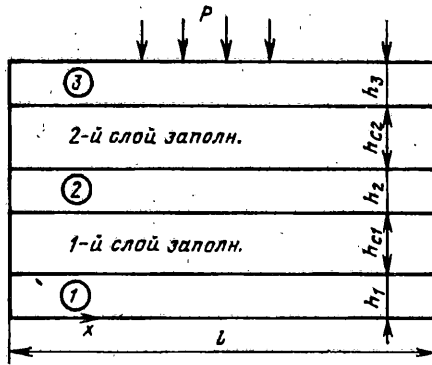
Случай слоистых пластин рассмотрим ниже, а сейчас приведем примеры для пластины однослойной.

Полоса, нагруженная посередине погонными силами P и закрепленная на расстоянии δ от срединной плоскости (фиг. 6). В данном случае изгибающий момент M_x , действующий на всю толщину сечения пластины $M_x = -P(l-x)/2$, а напряжения $\sigma_x = 12M_x z/h^3$.

По первой формуле (1.2) находим $N_x = 3M_x(t^2 - 1)/2h$, $t = 2z/h$.

По формуле (1.4) находим касательные напряжения и затем по второй формуле (1.2) поперечные усилия $Q_x = 1/8P(2 + 3t - t^3)$.

По формулам (1.2) получим $N_x = M_x = 0$ на краю $x=l$. Из внешних усилий на контуре (фиг. 5) $Q_x^* = P/2$, $M_x^* = 0$, $N_x^* = 0$. Поэтому из соотношений (1.10) найдем $N = M = 0$, $Q = Q_x - P/2$. Эпюра распределения разрывающих слоистых усилий Q показана на фиг. 7. Если $\delta = h/2$, т. е. пластина подвешена по верхней кромке боковой поверхности, то слои на контуре работают на разрыв ($Q > 0$), причем максимальные отрывные усилия будут у верхнего слоя и равны $P/2$, т. е. равны реакции опоры. Если же пластину на контуре закрепить по линии на срединной плоскости ($\delta = 0$), то в верхних слоях $z > 0$ слои будут надавливать друг на друга, а нижние слои $z < 0$ будут работать на отрыв. Скачок усилий Q всегда на линии закрепления и равен величине реакции опоры $P/2$.



Фиг. 8

2. Слоистые пластины рессорного типа. *Модель.* Рассмотрим теперь многослойную пластину, показанную на фиг. 8, где число слоев $m = 3$. Пластины из стекла толщиной $h_1, h_2, h_3, \dots, h_m$, будем называть несущими слоями. Слои из полимерного материала толщиной $h_{c1}, h_{c2}, \dots, h_{c,m-1}$ будем называть слоями заполнителя или склеивающими. Как показывают экспериментальные опыты, в некоторых случаях реальные характеристики слоев заполнителя таковы, что вдали от краевых зон слои практически недеформируются в поперечном направлении, перпендикулярном плоскости пластин. Краевые зоны, где условия несжимаемости нарушаются, имеют размеры от одной до двух-трех толщин пластин.

Здесь будем использовать гипотезу, что слои заполнителя несжимаемы везде, включая и краевые зоны. Кроме того будем считать, что слои не препятствуют взаимному сдвигу пластин в их плоскости. Касательные напряжения равны нулю. Введенные гипотезы присущи работе рессоры, состоящей из пластин, трение между которыми не учитывается. Они равносильны равенствам $E_{c,j} = \infty, G_{c,j} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, m - 1$), где $E_{c,j}$ — приведенный модуль упругости материала слоя при его деформировании поперек плоскости пластин в стесненном состоянии, $G_{c,j}$ — модуль сдвига слоя.

Косвенное подтверждение правомерности введенных гипотез вытекает из условия, что материал слоя при поперечной деформации находится в стесненном состоянии, т. е. не может выдавливаться или перетекать вдоль плоскостей пластин. Ситуация такая, как при работе жидкости в цилиндре при сжатии ее поршнем. Если в данных условиях коэффициент Пуассона материала слоя близок к 0,5, то материал становится практически несжимаем, так как приведенный модуль упругости E_c определяется по формуле

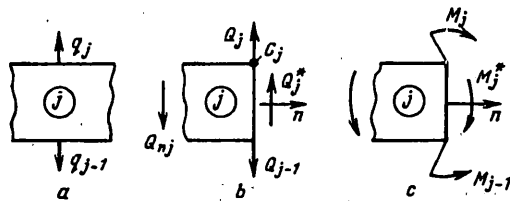
$$E_c = E(1 - \nu) / [(1 - 2\nu)(1 + \nu)] \quad (2.1)$$

где E — модуль упругости при растяжении-сжатии в свободном состоянии, ν — коэффициент Пуассона. Формула (2.1) получается из условия, что деформация слоя в плоскости пластин равна нулю. Из нее видно, приведенный модуль E_c становится большим при коэффициенте Пуассона ν близким к 0,5, даже если модуль E не велик.

Что касается модуля сдвига $G_c = 1/2 E / (1 + \nu)$, то на него эффект запирания не влияет. Поэтому, если модуль упругости E на растяжение-сжатие в свободном состоянии не велик, то и модуль сдвига G_c будет небольшим.

Следует еще подчеркнуть, что кроме приведенных рассуждений, целесообразность гипотез $E_{c1} = \infty, G_{c1} = 0$ мы оправдываем спецификой рассматриваемой задачи. Это задача изгиба пластин, в которой основную роль играют поперечные напряжения σ_z между слоями и второстепенную роль — касательные напряжения τ . В задачах, где целью является выяснение характера распределения касательных напряжений в краевых зонах, пренебрегать модулем сдвига нельзя.

Данной модели присущи те же эффекты, которые обнаружены при рассмот-



Фиг. 9

рени выше пластины однослойной: смежные слои взаимодействуют между собой с помощью поперечных реактивных напряжений σ_{zj} , которые для краткости будем обозначать через q_j (фиг. 9, а). На контурных линиях C_j (фиг. 9, в) между боковой поверхностью пакета и плоскостью склейки j -й пластины C_j -м слоем, действуют реактивные поперечные усилия Q_j (фиг. 9, в) и моменты M_j (фиг. 9, с). Если бы учитывались касательные напряжения в склейке, то добавились бы горизонтальные реактивные усилия N_j как и в рассмотренном выше случае однослойной пластины.

Выведем формулы для определения усилий Q_j и моментов M_j . Внешнюю нормаль к боковой поверхности пластины будем обозначать буквой n (фиг. 9).

Цилиндрический изгиб. В данном случае цилиндрического изгиба пластины шириной l (фиг. 8) при $x=l$ нормаль n будет совпадать с направлением оси x , а при $x=0$ на левом торце нормаль n направлена в сторону противоположную оси x . Поэтому при дифференцировании функций следует придерживаться правила

$$d(\cdot)/dx = -d(\cdot)/dn \text{ при } x=0, \quad d(\cdot)/dx = d(\cdot) dn \text{ при } x=l$$

Будем считать, что пакет нагружен распределенными напряжениями p , как показано на фиг. 8. На способах крепления слоев по контуру пакета остановимся ниже, а пока зададим внешние погонные поперечные усилия Q_j^* и моменты M_j^* для каждого слоя отдельно. Через Q_{nj} и M_{nj} на фиг. 9 обозначены предельные внутренние поперечные силы и изгибающие моменты j -го несущего слоя при приближении к контуру. В рассматриваемом случае цилиндрического изгиба

$$M_{nj} = -D_j \frac{d^2 w}{dn^2}, \quad Q_{nj} = -D_j \frac{d^3 w}{dn^3} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2.2)$$

$$D_j = \frac{E_j h_j^3}{12(1 - \nu_j^2)}$$

В силу несжимаемости слоев заполнителя, прогибы срединных поверхностей всех несущих слоев будут одинаковы (фиг. 8):

$$w_1 = w_2 = \dots = w_m = w \quad (2.3)$$

Поэтому уравнения равновесия пластин будут иметь вид (дифференцирование по x):

$$D_1 w^{IV} = q_1, \quad D_2 w^{IV} = q_2 - q_1, \quad \dots, \quad D_m w^{IV} = -p - q_{m-1} \quad (2.4)$$

Условия равновесия края пластины (фиг. 9) будут иметь вид

$$M_{nj} - M_j + M_{j-1} - M_j^* = 0 \quad (x = 0, l)$$

$$Q_{nj} - Q_j + Q_{j-1} - Q_j^* = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$M_0 = M_m = 0, \quad Q_0 = Q_m = 0 \quad (2.5)$$

Эти уравнения выполняют роль статических краевых условий, поэтому задачу можно назвать краевой. Если на краях пластин задать кинематические краевые

условия, например, условия свободного опирания, защемления и т. д., то на этих краях условия (2.5) нужно заменить соответствующими кинематическими. Но и в этом случае условия (2.5) справедливы и могут служить уравнениями для определения неизвестных усилий Q_j^* и моментов M_j^* в заделке.

Система уравнений (2.4), (2.5) содержит в качестве неизвестных прогиб w , напряжения q_j , усилия и моменты Q_j, M_j ($j = 1, 2, \dots, m - 1$).

Решение системы (2.4), (2.5) можно свести к решению одного уравнения для прогиба w . Для этого сложим уравнения (2.4) и краевые условия (2.5) с учетом (2.2), (2.3) и того, что $Q_0 = Q_m = 0, M_0 = M_m = 0$ (фиг. 9). В результате получим разрешающее уравнение

$$Dw^{IV} = -p, \quad D = \sum_{j=1}^m D_j \quad (2.6)$$

где D — цилиндрическая жесткость пакета, а также статические краевые условия

$$-D \frac{d^2 w}{dn^2} = M^*, \quad -D \frac{d^3 w}{dn^3} = Q^* \quad \text{при } x = 0, l \quad (2.7)$$

$$M^* = \sum_{j=1}^m M_j^*, \quad Q^* = \sum_{j=1}^m Q_j^* \quad (2.8)$$

где D — жесткость пакета, M^* и Q^* — равнодействующий момент и поперечная сила внешних нагрузок на краю пакета.

Уравнение (2.6) по виду совпадает с уравнением однослойной пластины, жесткость которой равна приведенной жесткости D для слоистой пластины. Если на краях слоистой пластины заданы статические условия, т. е. усилия Q_j^* и моменты M_j^* , то, согласно (2.8), будут известны и равнодействующие величины Q^* и M^* . В этом случае уравнения (2.7) будут статическими краевыми условиями для уравнения (2.6).

Предположим теперь, что на каком-то слое заданы кинематические краевые условия. Например, первый слой свободно оперт по контуру. Тогда для этого слоя $w = 0, d^2 w / dn^2 = 0$. В силу принятой гипотезы эти же условия будут выполняться и для всех остальных слоев. Поэтому уравнения (2.7) можно рассматривать как формулы для определения равнодействующей Q^* и M^* . Что касается внешних усилий Q_j^* и M_j^* , приложенных к слоям, то в рамках данной гипотезы их можно выбирать произвольно. При этом условия (2.8) будут выполняться всегда, так как на опертой первой пластине будет еще реакция опоры, которая должна быть включена в реакцию Q_j^* . Это обеспечивает условия равновесия пакета. Иными словами, в рамках принятой гипотезы несжимаемости пакет нечувствителен к характеру распределения краевых усилий.

В рассматриваемой постановке совершенно безразлично, для какого несущего слоя ставятся геометрические краевые условия, так как все слои изгибаются одинаково.

Следует отметить, что в рассматриваемом примере свободного опирания можно вообще не решать уравнение (2.6), если нас не интересуют прогибы как таковые. В этом случае краевые нагрузки M^* и Q^* определяются из уравнений равновесия пакета как твердого тела. Если пакет нагружен равномерным давлением P по всей плоскости (фиг. 8), то $M^* = 0, Q^* = pl/2$ при $x = 0$ и $x = l$. Задача статически определимая.

Если задача статически неопределимая, то решать уравнение (2.6), вообще говоря, нужно. Например, если какой-либо несущий слой защемлен на обоих концах, то $w = 0, dw/dx = 0$ при $x = 0, l$. Решение уравнения (2.6) в данном

случае нужно, так как усилия Q^* и моменты M^* можно определить только из уравнений (2.7). Из уравнений статики их найти нельзя.

Дальнейший ход рассуждений кроме специально оговоренных мест не связан с решением уравнения изгиба (2.6). Он справедлив в случае, когда решение уравнения (2.6) найдено, и в случае, когда уравнение (2.6) не решалось. Из уравнения (2.6), фактически его не решая, найдем $w^{IV} = -p/D$. После этого из уравнений равновесия (2.4) несущих слоев последовательно находим

$$q_1 = pD_1/D, \quad q_2 - q_1 = -pD_2/D, \quad \dots, \quad q_{m-1} - q_{m-2} = -pD_{m-1}/D \quad (2.9)$$

Путем простого сложения уравнений (2.9) получим формулы для нахождения реактивных напряжений между пластинами

$$q_j = -\frac{p}{D} \sum_{k=1}^j D_k \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2.10)$$

Этот результат является естественным: для того, чтобы пластины изгибались одинаково, нужно чтобы нагрузка на каждую из них была пропорциональна цилиндрической жесткости пластины D_j . При этом вид реактивного нагружения каждой пластины будет в точности таким же, как и нагружение пакета. В данном случае это давление P (2.5), которое может распределяться по ширине пластины совершенно произвольно. В частности, вместо давления допустимо нагружение сосредоточенной силой. Из условий (2.7) найдем вторые и третьи производные от прогиба по направлению внешней нормали n , подставим эти значения в соотношения (2.2), а затем усилия Q_{nj} и моменты M_{nj} в крайевые условия равновесия (2.5). В результате получим

$$M_{nj} = M^* D_j/D, \quad Q_{nj} = Q^* D_j/D \quad (2.11)$$

Уравнения (2.5) будут иметь вид

$$M^* D_j/D - M_j + M_{j-1} - M_j^* = 0 \quad (x = 0, l)$$

$$Q^* D_j/D - Q_j + Q_{j-1} - Q_j^* = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2.12)$$

$$M_0 = M_m = 0, \quad Q_0 = Q_m = 0$$

Отметим, что последние два из этих уравнений при $j = m$, являются следствием остальных и выполняются автоматически, так как при получении формул (2.11), а стало быть и уравнений (2.12), использовалась сумма уравнений (2.5). Последнее уравнение (2.12) поэтому можно было не записывать. Их оставляем, так как они могут быть использованы для определения усилий и моментов в заделке при решении задач с кинетическими крайевыми условиями.

Уравнения (2.12) позволяют последовательно, начиная с $j = 1$, определить крайевые реактивные моменты M_j и усилия Q_j . Напомним, что моменты M_j препятствуют взаимному повороту краев пластин, а усилия Q_j — взаимному поперечному перемещению-отрыву или сжатию.

Уравнения (2.12) позволяют выявить одно обстоятельство, имеющее практическое значение. Можно так подобрать внешние крайевые усилия Q_j^* и M_j^* , чтобы реактивные усилия Q_j и M_j были равны нулю. Для этого достаточно, чтобы

$$M_j^* = M^* D_j/D, \quad Q_j^* = Q^* D_j/D \quad (2.13)$$

где M^* и Q^* равнодействующие (2.8).

Равенства (2.13) открывают интересные перспективы для слоистых композиций с оптимальным конструированием краев.

Можно, например, не нагружать края пластин внешними моментами M_j^*

(фиг. 9, с), полагая $M_j^* = 0$. Тогда первое условие (2.13) отсутствия реактивных моментов M_j выполняется. Причем, можно опереть лишь первую пластину, либо любую из них, или каждую, или две, три и т. д. Способ установки опор будет влиять только на реактивные поперечные силы Q_j (фиг. 9, в). Моменты M^* можно выбрать, например, из условия жесткого защемления одной из пластин пакета при $x = l$. Тогда нужно будет выполнить краевое условие $w = 0$ при $x = l$. Это будет означать, что и остальные пластины защемлены, так как по условию прогиба всех пластин одинаковы. В этом случае нужно будет решать уравнение (2.6), но вместо первого краевого условия (2.7) при $x = l$ нужно выполнить условие защемления $w' = 0$. В данном случае краевые условия (2.5) по моментам при $x = l$ не нужны — они заменены условиями защемления $w' = 0$. Но вопрос о нахождении реактивных моментов M_j можно поставить и в этом случае. Ответ будет отрицательным — определить их нельзя. Для определения M_j имеются уравнения равновесия (2.12) края пластин, в которых известны лишь моменты M^* , определяемые из (2.7), так как по условию решение для прогиба получено. Но неизвестными являются в данном случае и внешние моменты M_j^* (фиг. 9, с) — реакции в защемлении. В данной ситуации естественно положить $M_j = 0$, так как жесткая заделка края не дает возможности поворачиваться пластинам по отношению друг к другу. Поэтому уравнения (2.12) позволяют найти реактивные моменты M_j^* в заделке.

Остановимся на второй группе уравнений (2.12) для поперечных сил. Рассмотрим, например, пакет из трех пластин силикатного стекла (фиг. 8). Предположим, что опоры поставлены по краям второй пластины, а концы первой и третьей свободны. Тогда из условий статики можно найти реакции опор второй пластины Q_2^* . В данном случае при $x = 0$ и $x = l$ $Q^* = Q_2^*$, $Q_1^* = Q_3^* = 0$. Из соотношений (2.12) находим $Q_1 = Q_2^* D_1 / D$, $Q_2 = -Q_2^* D_3 / D$.

Таким образом, между первой и второй пластиной (фиг. 8) возникнут положительные реактивные поперечные усилия Q_1 , способствующие разрыву слоев. Между второй и третьей пластиной будут отрицательные усилия Q_2 , прижимающие края пластин друг к другу.

Если, например, поставить условия защемления пакета по всему краю $x = l$, то вместо статических краевых условий (2.5) для Q_{nj} нужно поставить кинематические $w = 0$. Но вопрос об определении реактивных усилий Q_1, Q_2, \dots, Q_{m-1} поставить можно. Как и при рассмотрении моментов можно в этом случае сделать допущение, что защемление ограничивает не только взаимный поворот пластин, но и взаимное вертикальное их перемещение. В таком случае следует считать $Q_j = 0$, после чего величина усилий $Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_m^*$ будет определяться по формулам (2.13).

3. Пакет пластин произвольного очертания в плане. В рамках введенных гипотез поперечной недеформируемости слоев заполнителя и их абсолютной податливости на сдвиг решение задачи сохраняет тот же вид, что и выше при рассмотрении цилиндрического изгиба пакета. В частности нормальные напряжения q_j между слоями (фиг. 9, а) находят по формулам (2.10); контурные усилия Q_j и моменты M_j (фиг. 9, в, с) определяются последовательно, начиная с $j = 1$, из уравнений равновесия краев (2.5). В этом случае однако Q_j и M_j , вообще говоря будут переменными вдоль контура, так как переменными могут быть внешние усилия Q_j^* и M_j^* . Напомним, что в случае кинематических краевых усилий величины Q_j^* и $subj^*$ будут реакциями опор. Q_j, M_j будут равны нулю, если внешние усилия Q_j^* и моменты M_j^* (фиг. 9, в, с) подобраны по формулам (2.13).

Докажем справедливость этого утверждения. Уравнения равновесия несущих слоев будут иметь вид

$$D_j \Delta \Delta w = q_j - q_{j-1} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (3.1)$$

$$q_0 = 0, \quad q_m = -p$$

где Δ — оператор Лапласа. Складывая уравнения (3.1), получим разрешающее уравнение для прогиба

$$D \Delta \Delta w = -p \quad (3.2)$$

здесь D — цилиндрическая жесткость пакета (2.6), p — внешняя нагрузка (фиг. 8).

Уравнение (3.2) позволяет найти оператор $\Delta \Delta w = -p/D$, после чего из уравнения (3.1) можно последовательно определить реактивные напряжения q_j между слоями пакета. Получаются формулы (2.10). Отсюда вытекает первый важный вывод. Для нахождения реактивных напряжений q_j не нужно решать задачу изгиба слоев. Напряжения q_j не зависят от формы изгиба и конфигурации пакета, всегда определяются по рекуррентным формулам (2.10). В частности не играют роли условия на контуре пластин. Внутренние изгибающие моменты M_{nj} и поперечные обобщенные усилия Q_{nj} на контуре будут определяться по формулам

$$\begin{aligned} M_{nj} &= -D_j \left(\Delta w - (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \quad (j = 1, \dots, m) \\ Q_{nj} &= -D_j \frac{\partial}{\partial n} \left(\Delta w + (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

где n, s — внешняя нормаль и касательная к контуру. Уравнения равновесия (2.5) элемента контура остаются в силе для контура произвольной формы, поэтому туда можно подставить M_{nj} и Q_{nj} из формул (3.3), после чего уравнения (2.5) сложить. В результате придем к соотношениям

$$\begin{aligned} -D \left(\Delta w - (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) &= M^* \\ -D \frac{\partial}{\partial n} \left(\Delta w + (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) &= Q^* \end{aligned} \quad (3.4)$$

причем D, Q^*, M^* — приведенная цилиндрическая жесткость пакета (2.6), равнодействующие краевые усилия и моменты (2.8).

Соотношения (3.4) служат для нахождения M^* и Q^* через прогиб. Для нахождения прогиба нужно решать уравнение изгиба (3.2) с заданными краевыми условиями. Виды краевых условий можно брать любые: свободное опирание, защемление и т. д. Причем можно считать, что w это прогиб какого-то конкретного несущего слоя, любого из несущих слоев. Условия закрепления можно задавать тоже для этого же слоя. В некоторых случаях Q^* и M^* можно определить из условий статики, не решая краевую задачу для прогиба. Например, если имеется круговая многослойная пластина, один из слоев которой свободно оперт, а внешняя нагрузка — давление. Поэтому будем считать Q^* и M^* известными величинами, которые в общем случае могут изменяться вдоль контура. Из условий (3.4) можно выразить содержимое квадратных скобок и согласно (3.3), получить формулы (2.11) для моментов M_{nj} и усилий Q_{nj} . Подставляя затем M_{nj} и Q_{nj} из (2.11) в (2.5), вновь придем к уравнениям (2.12). Все сказанное в тексте после уравнений (2.12) целиком переносится на пластины произвольного контура. В частности, сохраняют силу соотношения (2.13), при соблюдении которых усилия Q_j и моменты M_j краевого взаимодействия слоев будут равны нулю.

4. О рациональном конструировании слоистых пластин. Рационально сконструированные пластины назовем оптимальными. Оптимальным условимся называть пакет, у которого все пластины изгибаются одинаково. Такой пакет уже рассмотрен в п. 2 в предположении, что слои заполнителя абсолютно жесткие на растяжение-сжатие в поперечном направлении, перпендикулярном плоскости пластин. Иными словами, приведенный модуль слоев, определяемый по формулам (2.1) $E_{cj} = \infty$. Задачу можно обобщить на случай сжимаемых слоев заполнителя в поперечном направлении и не воспринимающих касательные напряжения в плоскостях раздела слоев, т. е. $G_{cj} = 0$.

В одинаково изогнутых слоях изгибные напряжения на поверхностях будут пропорциональны толщине слоев h_j . Казалось бы, данное обстоятельство не дает право назвать одинаково изогнутые слои оптимальными или наиболее рационально сконструированными. Более подходящим было бы условие одинаковых напряжений в слоях.

В действительности условие равенства напряжений нецелесообразно считать условием оптимальности, так как слои разной толщины могут иметь разную прочность. Условием оптимальности пластин-слоев разумно считать условие равнопрочности слоев, равных изгибов. Обоснованием служит то, что в слоистых композициях из стекла, используются, как правило, закаленные пластины. При закалке пластин их прочность увеличивается с увеличением толщины. Поэтому условие равнопрочности согласуется с условием равного изгиба, когда напряжения пропорциональны толщине пластины.

Отметим, что в случае сжимаемых слоев заполнителя введение краевых усилий Q_j и моментов M_j не правомерно. Слои заполнителя с плавно изменяющимися упругими свойствами неспособны «создать» сосредоточенные силы и моменты. Однако многие положения, изложенные в п. 2, в случае одинаково изгибаемых пластин будут справедливы. Это касается формул (2.10), определяющих реактивные напряжения между слоями, уравнений (2.12) и вытекающих отсюда при $Q_j = 0, M_j = 0$ уравнений (2.13), определяющих условия оптимальности. Эти условия (2.13) можно выполнить конструктивными способами, а именно, с помощью упругого опирания слоев или введением по контуру слоистых композиций межслойных упругих вставок. Вопросы оптимального проектирования рассматривались в [1 и 2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 411 с.
2. Кулаков Н. А., Толкачев В. М. Влияние способа заделки края на напряжения слоистых пластин//Механика композитных материалов. 1984. № 3. С. 477—485.

Москва

Поступила в редакцию
1.XII.1993