

УДК 539.3

© 1994 г. Г. М. КУЛИКОВ

ТЕРМОУПРУГОСТЬ ГИБКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Пространственная задача термоупругости для многослойных анизотропных оболочек простейших геометрических форм и при частных видах граничных условий решена в [1, 2]. Расчет термоупругих многослойных анизотропных оболочек типа Тимошенко в геометрически нелинейной постановке обсуждается в [3]. О современном состоянии проблемы можно судить по обзорным статьям [4—7], откуда видно, что задача расчета геометрически нелинейных многослойных анизотропных оболочек, подверженных термомеханическому нагружению, практически не исследована.

В настоящей работе рассмотрены в геометрически нелинейной постановке термоупругие многослойные анизотропные оболочки с учетом локальных эффектов на основе кинематической гипотезы Э. И. Григолюка [8]. При этом слои ориентированы в пакете таким образом, что их оси ортотропии не совпадают с направлениями координатных линий. Отметим, что общая теория многослойных анизотропных оболочек на основе гипотезы Григолюка была построена ранее без учета температурных эффектов в [9, 10].

1. Смешанное вариационное уравнение термоупругости для нелинейной анизотропной оболочки. Рассмотрим тонкую оболочку постоянной толщины h , составленную из N анизотропных слоев. В качестве поверхности приведения Π примем внутреннюю поверхность оболочки, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам α_1, α_2 , считываяем вдоль линий главных кривизн. Поперечную координату z будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к поверхности приведения. Введем некоторые обозначения: h_k — толщина k -слоя; δ_k — расстояние от поверхности приведения до «верхней» граничной поверхности k -го слоя ($\delta_0 = 0$); A_i — параметры Ламе; k_i — кривизны координатных линий; $u_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2, z)$, $u_3^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2, z)$ — тангенциальные и нормальное перемещения точек k -го слоя; $u_i(\alpha_1, \alpha_2)$, $w(\alpha_1, \alpha_2)$ — тангенциальные и нормальное перемещения поверхности приведения; $\beta_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2)$ — углы поворота нормали в пределах k -го слоя; $\mu_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2)$ — функции, характеризующие распределение поперечных касательных напряжений по толщине k -го слоя; $\tau_i^{(k)}(\alpha_1, \alpha_2)$ — поперечные касательные напряжения верхней граничной поверхности k -слоя ($\tau_i^{(0)} = p_i^-$, $\tau_i^{(N)} = p_i^+$); p_i^- , q^- и p_i^+ , q^+ — компоненты внешних поверхностных нагрузок, действующих на внутренней и внешней поверхностях оболочки. Здесь и далее $i, j = 1, 2; k = 1, 2, \dots, N$.

Введем деформационные характеристики оболочки. Тангенциальные и поперечные компоненты тензора деформаций в случае простейшего нелинейного варианта теории оболочек в квадратичном приближении [11] определим по формулам

$$\varepsilon_{i1}^{(k)} = \frac{1}{1 + k_iz} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2^{(k)} + k_i u_3^{(k)} \right) + \frac{1}{2} (\theta_1^{(k)})^2$$

$$\varepsilon_{i2}^{(k)} = \frac{1}{1 + k_iz} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1^{(k)} \right) +$$

$$+ \frac{1}{1+k_{2z}} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2^{(k)} \right) + \theta_1^{(k)} \theta_2^{(k)}$$

$$\varepsilon_{13}^{(k)} = \partial u_1^{(k)} / \partial z + \theta_1^{(k)}, \quad \varepsilon_{33}^{(k)} = \partial u_3^{(k)} / \partial z \quad (1.1)$$

$$\theta_1^{(k)} = \frac{1}{1+k_{1z}} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial \alpha_1} - k_{1z} u_1^{(k)} \right) \quad (1 \geq 2)$$

Уравнения равновесия многослойной оболочки получим из смешанного вариационного принципа Рейсснера [12]:

$$\delta(J - A) = 0 \quad (1.2)$$

который открывает естественный путь сведения трехмерных задач теории упругости к двумерным задачам теории оболочек. Здесь A — работа внешних нагрузок, а функционал J представим в форме

$$J = \iint_{\Pi} \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} [\sigma_{11}^{(k)} \varepsilon_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} \varepsilon_{22}^{(k)} + \sigma_{12}^{(k)} \varepsilon_{12}^{(k)} + \sigma_{33}^{(k)} \varepsilon_{33}^{(k)} + \sigma_{13}^{(k)} \varepsilon_{13}^{(k)} +$$

$$+ \sigma_{23}^{(k)} \varepsilon_{23}^{(k)} + G_k] A_1 A_2 (1 + k_{1z}) (1 + k_{2z}) dz d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (1.3)$$

где G_k — термодинамический потенциал Гиббса k -го слоя [13]:

$$-G_k = 1/2 a_{11}^{(k)} (\sigma_{11}^{(k)})^2 + a_{12}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + a_{13}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} + a_{16}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} +$$

$$+ 1/2 a_{22}^{(k)} (\sigma_{22}^{(k)})^2 + a_{23}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} + 1/2 a_{33}^{(k)} (\sigma_{33}^{(k)})^2 +$$

$$+ a_{36}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} + 1/2 a_{66}^{(k)} (\sigma_{12}^{(k)})^2 + 1/2 a_{44}^{(k)} (\sigma_{23}^{(k)})^2 + a_{45}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)} +$$

$$\dots$$

$$+ 1/2 a_{33}^{(k)} (\sigma_{13}^{(k)})^2 + (\alpha_1^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + \alpha_2^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + \alpha_3^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} + \alpha_6^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} +$$

$$+ \alpha_4^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} + \alpha_5^{(k)} \sigma_{13}^{(k)}) \theta + 1/2 c_s^{(k)} \theta^2 / T_0 \quad (1.4)$$

Здесь $a_{11}^{(k)}, \dots, a_{66}^{(k)}$ — податливости k -го слоя; $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \alpha_3^{(k)}$ — коэффициенты линейного температурного расширения k -го слоя; $\alpha_4^{(k)}, \alpha_5^{(k)}, \alpha_6^{(k)}$ — коэффициенты температурного сдвига k -го слоя; $c_s^{(k)}$ — теплоемкость при постоянном напряжении k -го слоя; $\theta = T - T_0$ — приращение температуры относительно начального состояния T_0 .

Предположим, что нормальные напряжения $\sigma_{33}^{(k)}$, действующие на площадках, параллельных площадкам поверхности приведения, пренебрежимо малы по сравнению с другими компонентами тензора напряжений, поэтому подчеркнутые члены в выражении для термодинамического потенциала Гиббса (1.4) можно опустить. В то же время член $\alpha_3^{(k)} \sigma_{33}^{(k)}$ следует сохранить, так как коэффициент линейного температурного расширения в направлении, нормальном к поверхности приведения, для композитных материалов может превосходить значения коэффициентов линейного температурного расширения в тангенциальных направлениях.

Введя потенциал G_k из (1.4), деформации (1.1) в смешанный вариационный принцип Рейсснера (1.2), (1.3) и независимо варьируя перемещения и напряжения получим с учетом обобщенных формул интегрирования по частям вариационное уравнение

$$\iint_{\Pi} \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \{ -L_1^{(k)} \delta u_1^{(k)} - L_2^{(k)} \delta u_2^{(k)} - L_3^{(k)} \delta u_3^{(k)} + [(\varepsilon_{11}^{(k)} - a_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} -$$

$$\begin{aligned}
& - a_{12}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} - a_{16}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} - \alpha_1^{(k)} \theta) \delta \sigma_{11}^{(k)} + (\varepsilon_{22}^{(k)} - a_{12}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} - a_{22}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} - \\
& - a_{26}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} - \alpha_2^{(k)} \theta) \delta \sigma_{22}^{(k)} + (\varepsilon_{33}^{(k)} - \alpha_3^{(k)} \theta) \delta \sigma_{33}^{(k)} + (\varepsilon_{12}^{(k)} - a_{16}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} - \\
& - a_{26}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} - a_{66}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} - \alpha_6^{(k)} \theta) \delta \sigma_{12}^{(k)} + (\varepsilon_{23}^{(k)} - a_{44}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} - a_{43}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)} - \\
& - \alpha_4^{(k)} \theta) \delta \sigma_{23}^{(k)} + (\varepsilon_{13}^{(k)} - a_{43}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} - a_{33}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)} - \alpha_5^{(k)} \theta) \delta \sigma_{13}^{(k)}] H_1 H_2] dz d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + \iint_{\Pi} [(\sigma_{13}^{(N)} - p_1^+) \delta u_1^{(N)} + (\sigma_{23}^{(N)} - p_2^+) \delta u_2^{(N)} + (\sigma_{33}^{(N)} - q^+) \delta u_3^{(N)}] H_1 H_2 \Big|_{z=\delta_N} d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
& - \iint_{\Pi} [(\sigma_{13}^{(1)} - p_1^-) \delta u_1^{(1)} + (\sigma_{23}^{(1)} - p_2^-) \delta u_2^{(1)} + (\sigma_{33}^{(1)} - q^-) \delta u_3^{(1)}] H_1 H_2 \Big|_{z=\delta_0} d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + \iint_{\Pi} \sum_{n=1}^{N-1} [(\sigma_{13}^{(n)} \delta u_1^{(n)} - \sigma_{13}^{(n+1)} \delta u_1^{(n+1)}) + (\sigma_{23}^{(n)} \delta u_2^{(n)} - \sigma_{23}^{(n+1)} \delta u_2^{(n+1)}) + (\sigma_{33}^{(n)} \delta u_3^{(n)} - \\
& - \sigma_{33}^{(n+1)} \delta u_3^{(n+1)})] H_1 H_2 \Big|_{z=\delta_n} d\alpha_1 d\alpha_2 + \int_{\Gamma_2^+} \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} [(\sigma_{11}^{(k)} - X_1^+) \delta u_1^{(k)} + \\
& + (\sigma_{12}^{(k)} - X_2^+) \delta u_2^{(k)} + (S_{13}^{(k)} - X_3^+) \delta u_3^{(k)}] H_2 \Big|_{\alpha_1=\alpha_1^+} dz d\alpha_2 - \int_{\Gamma_2^-} \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} [(\sigma_{11}^{(k)} - X_1^-) \delta u_1^{(k)} + \\
& + (\sigma_{12}^{(k)} - X_2^-) \delta u_2^{(k)} + (S_{13}^{(k)} - X_3^-) \delta u_3^{(k)}] H_2 \Big|_{\alpha_1=\alpha_1^-} dz d\alpha_2 + \\
& + \int_{\Gamma_1^+} \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} [(\sigma_{12}^{(k)} - Y_1^+) \delta u_1^{(k)} + (\sigma_{22}^{(k)} - Y_2^+) \delta u_2^{(k)} + (S_{23}^{(k)} - Y_3^+) \delta u_3^{(k)}] H_1 \Big|_{\alpha_2=\alpha_2^+} dz d\alpha_1 - \\
& - \int_{\Gamma_1^-} \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} [(\sigma_{12}^{(k)} - Y_1^-) \delta u_1^{(k)} + (\sigma_{22}^{(k)} - Y_2^-) \delta u_2^{(k)} + \\
& + (S_{23}^{(k)} - Y_3^-) \delta u_3^{(k)}] H_1 \Big|_{\alpha_2=\alpha_2^-} dz d\alpha_1 = 0 \tag{1.5}
\end{aligned}$$

где X_i^{\pm} , X_3^{\pm} и Y_i^{\pm} , Y_3^{\pm} — внешние поверхностные нагрузки, действующие на боковых поверхностях оболочки $\alpha_1 = \alpha_1^{\pm}$ и $\alpha_2 = \alpha_2^{\pm}$; $L_i^{(k)} L_3^{(k)}$ — нелинейные дифференциальные операторы пространственной теории упругости [11], соответствующие введенному полю деформаций (1.1):

$$\begin{aligned}
L_1^{(k)} &= \frac{\partial (H_2 \sigma_{11}^{(k)})}{\partial \alpha_1} - \frac{H_1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22}^{(k)} + \frac{\partial (H_1 \sigma_{12}^{(k)})}{\partial \alpha_2} + \frac{H_2}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12}^{(k)} + \frac{\partial (H_1 H_2 \sigma_{13}^{(k)})}{\partial z} + k_1 A_1 H_2 S_{13}^{(k)} \\
L_3^{(k)} &= \frac{\partial (H_2 S_{13}^{(k)})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (H_1 S_{23}^{(k)})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial (H_1 H_2 \sigma_{33}^{(k)})}{\partial z} - k_1 A_1 H_2 \sigma_{11}^{(k)} - k_2 A_2 H_1 \sigma_{22}^{(k)} \tag{1.6}
\end{aligned}$$

$$S_{13}^{(k)} = \sigma_{13}^{(k)} + \theta_1^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + \theta_2^{(k)} \sigma_{12}^{(k)}, \quad H_1 = A_1 (1 + k_1 z) \quad (1 \neq 2)$$

2. Разрешающие уравнения многослойной анизотропной оболочки средней толщины. При построении теории многослойных анизотропных оболочек с учетом локальных эффектов воспользуемся кинематической гипотезой Э. И. Григолюка о кусочно-линейном законе изменения тангенциальных перемещений по толщине оболочки [12]:

$$u_i^{(k)} = u_i + \sum_{n=1}^N \pi_{kn} \beta_i^{(n)} + (z - \delta_{k-1}) \beta_i^{(k)} \tag{2.1}$$

$$\pi_{kn} = \begin{cases} h_n & \text{при } k > n \\ 0 & \text{при } k \leq n \end{cases}$$

и кинематической гипотезой [14] о нелинейной зависимости нормальных перемещений от поперечной координаты в пределах k -го слоя

$$u_3^{(k)} = w + \gamma_\theta^{(k)}, \quad \gamma_\theta^{(k)} = \sum_{n=1}^{k-1} \alpha_3^{(n)} \int_{\delta_{n-1}}^{\delta_n} \theta dz + \alpha_3^{(k)} \int_{\delta_{k-1}}^z \theta dz \quad (2.2)$$

Для поперечных касательных напряжений примем независимую аппроксимацию [12]

$$\sigma_{\beta\beta}^{(k)} = \overline{M}_k(z) \tau_i^{(k-1)} + M_k(z) \tau_i^{(k)} + f_k(z) \mu_i^{(k)} \quad (2.3)$$

$$M_k(z) = \frac{1}{h_k} (z - \delta_{k-1}), \quad \overline{M}_k(z) = 1 - M_k(z), \quad f_k(z) = \frac{6}{h_k} \overline{M}_k(z) M_k(z)$$

Внесем перемещения и поперечные касательные напряжения согласно формулам (2.1), (2.2), (2.3) в вариационное уравнение (1.5) и, приравнявая нулю выражения, стоящие перед вариациями независимых переменных $u_i, \beta_i^{(k)}, w, \sigma_{ij}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \mu_i^{(k)}, \tau_i^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots, N-1$) получим:

соотношения упругости для тангенциальных напряжений и деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(k)} &= a_{11}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + a_{12}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + a_{16}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} + \alpha_1^{(k)} \theta \\ \varepsilon_{22}^{(k)} &= a_{12}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + a_{22}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} + \alpha_2^{(k)} \theta \\ \varepsilon_{12}^{(k)} &= a_{16}^{(k)} \sigma_{11}^{(k)} + a_{26}^{(k)} \sigma_{22}^{(k)} + a_{66}^{(k)} \sigma_{12}^{(k)} + \alpha_6^{(k)} \theta \end{aligned} \quad (2.4)$$

уравнения для определения поперечных нормальных деформаций

$$\varepsilon_{33}^{(k)} = \alpha_3^{(k)} \theta \quad (2.5)$$

которые тождественно удовлетворяются согласно формулам (1.1), (2.2);

интегральные соотношения упругости для поперечных касательных напряжений и деформаций

$$\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \Lambda_i^{(k)} f_k(z) dz = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (2.6)$$

$$\int_{\delta_{n-1}}^{\delta_n} \Lambda_i^{(n)} M_n(z) dz + \int_{\delta_n}^{\delta_{n+1}} \Lambda_i^{(n+1)} \overline{M}_{n+1}(z) dz = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N-1)$$

$$\Lambda_i^{(k)} = \varepsilon_{i3}^{(k)} - a_{43}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} - a_{35}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)} - \alpha_3^{(k)} \theta \quad (1 \neq 2, 4 \neq 5)$$

$2N + 2$ уравнений равновесия многослойной оболочки в усилиях и моментах

$$\sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} L_i^{(k)} dz = 0 \quad (2.7)$$

$$\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} L_i^{(k)} (z - \delta_{k-1}) dz + \sum_{n=1}^N \pi_{nk} \int_{\delta_{n-1}}^{\delta_n} L_i^{(n)} dz = 0$$

N нелинейных уравнений пространственной теории упругости

$$L_3^{(k)} = 0 \quad (2.8)$$

граничные условия на внутренней поверхности оболочки $z = \delta_0$:

$$\sigma_B^{(1)} = p_i^-, \quad \sigma_{33}^{(1)} = q^- \quad (2.9)$$

первые два из которых удовлетворяются согласно (2.3);

граничные условия на внешней поверхности оболочки $z = \delta_N$:

$$\sigma_B^{(N)} = p_i^+, \quad \sigma_{33}^{(N)} = q^+ \quad (2.10)$$

первые два из которых удовлетворяются согласно (2.3);

условия непрерывности на поверхностях раздела слоев $z = \delta_n$:

$$\sigma_B^{(n)} = \sigma_B^{(n+1)}, \quad \sigma_{33}^{(n)} = \sigma_{33}^{(n+1)} \quad (n = 1, 2, \dots, N-1) \quad (2.11)$$

первые $2N-2$ из которых удовлетворяются согласно (2.3);

граничные условия на боковых поверхностях $\alpha_1 = \alpha_1^+$, $\alpha_1 = \alpha_1^-$:

$$(T_{11} - T_{11}^\pm) \delta u_1 = 0, \quad (T_{12} - T_{12}^\pm) \delta u_2 = 0, \quad (T_{13} - Q_1^\pm) \delta w = 0$$

$$(\Phi_{11}^{(k)} - \Phi_{11}^{(k)\pm}) \delta \beta_1^{(k)} = 0, \quad (\Phi_{12}^{(k)} - \Phi_{12}^{(k)\pm}) \delta \beta_2^{(k)} = 0 \quad (2.12)$$

граничные условия на боковых поверхностях $\alpha_2 = \alpha_2^+$, $\alpha_2 = \alpha_2^-$, получаемые

из граничных условий (2.12) перестановкой индексов ($1 \geq 2$).

В соотношениях (2.12) введены классические усилия и обобщенные моменты по формулам

$$T_m = \sum_{k=1}^N T_{m}^{(k)}, \quad Q_l = \sum_{k=1}^N Q_l^{(k)}$$

$$\Phi_{rm}^{(k)} = M_{rm}^{(k)} - \delta_{k-1} T_{rm}^{(k)} + \sum_{n=1}^N \pi_{nk} T_{rm}^{(n)} \quad (1 \geq 2; r, m = 1, 2, 3)$$

$$T_{11}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{11}^{(k)} (1 + k_2 z) dz, \quad T_{12}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{12}^{(k)} (1 + k_2 z) dz$$

$$T_{13}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} S_{13}^{(k)} (1 + k_2 z) dz, \quad Q_1^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{13}^{(k)} (1 + k_2 z) dz$$

$$M_{11}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{11}^{(k)} z (1 + k_2 z) dz, \quad M_{12}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{12}^{(k)} z (1 + k_2 z) dz$$

$$M_{13}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} S_{13}^{(k)} z (1 + k_2 z) dz \quad (1 \geq 2) \quad (2.13)$$

С учетом обозначений (2.13) уравнения равновесия многослойной оболочки средней толщины (2.7) можно записать так:

$$\frac{\partial (A_2 T_{11})}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{22} + \frac{\partial (A_1 T_{21})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{12} + A_1 A_2 k_1 T_{13} =$$

$$= A_1 A_2 (p_i^- - p_i^+) \quad (1 \geq 2) \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial (A_2 \Phi_{11}^{(k)})}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \Phi_{22}^{(k)} + \frac{\partial (A_1 \Phi_{21}^{(k)})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \Phi_{12}^{(k)} - A_1 A_2 (Q_1^{(k)} - k_1 \Phi_{13}^{(k)}) =$$

$$= -A_1 A_2 h_k p_i^+ \quad (1 \geq 2) \quad (2.15)$$

Принтегрируем уравнение пространственной теории упругости (2.8) по координате z с учетом условий непрерывности (2.11) и граничных условий (2.9). В результате получим

$$\sigma_{33}^{(k)} = q^- - \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial (A_2 T_{13}^{(k)} [z])}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 T_{23}^{(k)} [z])}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 (k_1 T_{11}^{(k)} [z] + k_2 T_{22}^{(k)} [z]) \right) \quad (2.16)$$

$$T_{11}^{(k)} [z] = \sum_{n=1}^{k-1} \int_{\delta_{n-1}}^{\delta_n} \sigma_{11}^{(n)} (1 + k_2 z) dz + \int_{\delta_{k-1}}^z \sigma_{11}^{(k)} (1 + k_2 z) dz \quad (2.17)$$

$$T_{13}^{(k)} [z] = \sum_{n=1}^{k-1} \int_{\delta_{n-1}}^{\delta_n} S_{13}^{(n)} (1 + k_2 z) dz + \int_{\delta_{k-1}}^z S_{13}^{(k)} (1 + k_2 z) dz \quad (1 \geq 2)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.10) и принимая во внимание равенства $T_{11}^{(N)} [\delta_N] = T_{11}$, $T_{13}^{(N)} [\delta_N] = T_{13}$ ($1 \geq 2$), приходим к последнему уравнению равновесия многослойной оболочки

$$\partial (A_2 T_{13}) / \partial \alpha_1 + \partial (A_1 T_{23}) / \partial \alpha_2 - A_1 A_2 (k_1 T_{11} + k_2 T_{22}) = A_1 A_2 (q^- - q^+) \quad (2.18)$$

3. Разрешающие уравнения тонкой многослойной оболочки. Введя перемещения (2.1), (2.2) в деформационные выражения (1.1), пренебрегая членами kz по сравнению с единицей и полагая, что функции $\gamma_\theta^{(k)}$ имеют малый показатель изменчивости по координате α_i , получим

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = E_{ij} + \sum_{n=1}^N \pi_{kn} K_{ij}^{(n)} + (z - \delta_{k-1}) K_{ij}^{(k)} + \delta_{ij} k_i \gamma_\theta^{(k)}$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)} = \beta_i^{(k)} - \theta_i, \quad \varepsilon_{33}^{(k)} = \alpha_3^{(k)} \theta \quad (3.1)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, E_{ij} — деформации поверхности приведения:

$$E_{11} = \varepsilon_1 + \theta_1^2 / 2, \quad E_{12} = \omega_1 + \omega_2 + \theta_1 \theta_2$$

$$K_{11}^{(k)} = \varkappa_i^{(k)}, \quad K_{12}^{(k)} = \xi_1^{(k)} + \xi_2^{(k)}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + k_1 w, \quad \omega_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1$$

$$\varkappa_i^{(k)} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_1^{(k)}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \beta_2^{(k)}, \quad \xi_i^{(k)} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_2^{(k)}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \beta_1^{(k)}$$

$$\theta_i = k_i u_i - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \quad (1 \geq 2)$$

Если снова воспользоваться допущением о тонкостенности оболочки, приняв упрощенные формулы для усилий и моментов

$$T_{ij}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{ij}^{(k)} dz, \quad M_{ij}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{ij}^{(k)} z dz, \quad Q_i^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{33}^{(k)} dz$$

$$T_{13} = N_1, \quad N_1 = Q_1 - \theta_1 T_{11} - \theta_2 T_{12} \quad (1 \geq 2) \quad (3.2)$$

а в уравнениях (2.15) дополнительно пренебречь обобщенными моментами от перерезывающих напряжений $\Phi_{13}^{(k)}$, то в этом случае уравнения равновесия (2.14), (2.15), (2.18) по форме записи совпадают с соответствующими уравнениями

равновесия теории тонких многослойных оболочек на основе кинематической гипотезы Э. И. Григолока [15], полученными без учета температурных напряжений. По физической же сущности это разные уравнения и различаются они в первую очередь наличием в формулах для усилий и моментов слагаемых, отвечающих учету температурных воздействий.

Соотношения упругости (2.4) перепишем в матричной форме, предварительно разрешив их относительно напряжений

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^{(k)} \\ \varepsilon_{22}^{(k)} \\ \varepsilon_{12}^{(k)} \end{pmatrix} = \mathbf{b}^{(k)} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^{(k)} \\ \varepsilon_{22}^{(k)} \\ \varepsilon_{12}^{(k)} \end{pmatrix} - \theta \begin{pmatrix} \eta_1^{(k)} \\ \eta_2^{(k)} \\ \eta_6^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^{(k)} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & b_{16}^{(k)} \\ b_{12}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & b_{26}^{(k)} \\ b_{16}^{(k)} & b_{26}^{(k)} & b_{66}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Формулы для определения элементов матрицы тангенциальных жесткостей k -го слоя $\mathbf{b}^{(k)}$ представлены в [12]; $\eta_1^{(k)}$, $\eta_2^{(k)}$, $\eta_6^{(k)}$ — тангенциальные компоненты тензора температурных напряжений при стесненных деформациях:

$$\eta_1^{(k)} = b_{11}^{(k)} \alpha_1^{(k)} + b_{12}^{(k)} \alpha_2^{(k)} + b_{16}^{(k)} \alpha_6^{(k)}$$

$$\eta_2^{(k)} = b_{12}^{(k)} \alpha_1^{(k)} + b_{22}^{(k)} \alpha_2^{(k)} + b_{26}^{(k)} \alpha_6^{(k)}$$

$$\eta_6^{(k)} = b_{16}^{(k)} \alpha_1^{(k)} + b_{26}^{(k)} \alpha_2^{(k)} + b_{66}^{(k)} \alpha_6^{(k)}$$

Подставив напряжения (3.3) в формулы (2.13) с учетом деформационных соотношений (3.1) и формул (3.2), приходим к выражениям, связывающим усилия и моменты с деформационными характеристиками оболочки

$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^N \mathbf{D}^{(n)} \begin{pmatrix} K_{11}^{(n)} \\ K_{22}^{(n)} \\ K_{12}^{(n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{\theta 1} \\ T_{\theta 2} \\ T_{\theta 6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11}^{(k)} \\ \Phi_{22}^{(k)} \\ \Phi_{12}^{(k)} \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{(k)} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^N \mathbf{F}^{(kn)} \begin{pmatrix} K_{11}^{(n)} \\ K_{22}^{(n)} \\ K_{12}^{(n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi_{\theta 1}^{(k)} \\ \Phi_{\theta 2}^{(k)} \\ \Phi_{\theta 6}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{A} = \sum_{n=1}^N \mathbf{A}^{(n)}, \quad \mathbf{D}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k)} - \delta_{k-1} \mathbf{A}^{(k)} + \sum_{n=1}^N \pi_{nk} \mathbf{A}^{(n)}$$

$$\mathbf{F}^{(kn)} = \delta_{kn} [\mathbf{C}^{(n)} - \delta_{n-1} \mathbf{B}^{(n)} - \delta_{n-1} (\mathbf{B}^{(n)} - \delta_{n-1} \mathbf{A}^{(n)})] + \pi_{kn} (\mathbf{B}^{(k)} - \delta_{k-1} \mathbf{A}^{(k)}) + \\ + \pi_{nk} (\mathbf{B}^{(n)} - \delta_{n-1} \mathbf{A}^{(n)}) + \sum_{m=1}^N \pi_{mk} \pi_{mn} \mathbf{A}^{(m)}$$

$$\mathbf{A}^{(k)} = (\delta_k - \delta_{k-1}) \mathbf{b}^{(k)}, \quad \mathbf{B}^{(k)} = 1/2 (\delta_k^2 - \delta_{k-1}^2) \mathbf{b}^{(k)} \quad \mathbf{C}^{(k)} = 1/3 (\delta_k^3 - \delta_{k-1}^3) \mathbf{b}^{(k)}$$

Здесь \mathbf{A} , $\mathbf{D}^{(k)}$, $\mathbf{F}^{(kn)}$ — матрицы жесткости, а интегральные характеристики температурного поля имеют вид

$$T_{\theta m}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} t_{\theta m}^{(k)} dz, \quad M_{\theta m}^{(k)} = \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} t_{\theta m}^{(k)} z dz$$

$$\Phi_{\theta m}^{(k)} = M_{\theta m}^{(k)} - \delta_{k-1} T_{\theta m}^{(k)} + \sum_{n=1}^N \pi_{nk} T_{\theta m}^{(n)}, \quad T_{\theta m} = \sum_{k=1}^N T_{\theta m}^{(k)}$$

$$t_{\theta m}^{(k)} = d_m^{(k)} \eta_6^{(k)} - \eta_m^{(k)} \theta \quad (m = 1, 2, 6), \quad d_1^{(k)} = k_1 b_{11}^{(k)} + k_2 b_{12}^{(k)}$$

$$d_2^{(k)} = k_1 b_{12}^{(k)} + k_2 b_{22}^{(k)}, \quad d_6^{(k)} = k_1 b_{16}^{(k)} + k_2 b_{26}^{(k)}$$

Введем далее поперечные касательные напряжения (2.3) в интегральные соотношения упругости (2.6) и исключая функции $\mu_i^{(k)}$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно межслойных касательных напряжений

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{U} = \|\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}, \dots, \tau_1^{(N-1)}, \tau_2^{(1)}, \tau_2^{(2)}, \dots, \tau_2^{(N-1)}\|^T$$

$$g_{mn} = -3 (h_m a_{35}^{(m)} + h_{m+1} a_{35}^{(m+1)}), \quad g_{N-1+m, N-1+m} = -3 (h_m a_{44}^{(m)} + h_{m+1} a_{44}^{(m+1)})$$

$$g_{m, N-1+m} = g_{N-1+m, m} = -3 (h_m a_{45}^{(m)} + h_{m+1} a_{45}^{(m+1)})$$

$$g_{n, n+1} = g_{n+1, n} = h_{n+1} a_{35}^{(n+1)}, \quad g_{N-1+n, N+n} = g_{N+n, N-1+n} = h_{n+1} a_{44}^{(n+1)}$$

$$g_{n, N+n} = g_{N+n, n} = g_{n+1, N-1+n} = g_{N-1+n, n+1} = h_{n+1} a_{45}^{(n+1)}$$

$$v_m = -2 (h_m \varepsilon_{13}^{(m)} + h_{m+1} \varepsilon_{13}^{(m+1)}) - \delta_{1m} h_1 (a_{35}^{(1)} p_1^- + a_{45}^{(1)} p_2^-) - \\ - \delta_{N-1, m} h_N (a_{35}^{(N)} p_1^+ + a_{45}^{(N)} p_2^+) - 10 (h_m \chi_3^{(m)} + h_{m+1} \chi_3^{(m+1)}) + 12 (h_m \omega_5^{(m)} + h_{m+1} \bar{\omega}_5^{(m+1)})$$

$$v_{N-1+m} = -2 (h_m \varepsilon_{23}^{(m)} + h_{m+1} \varepsilon_{23}^{(m+1)}) - \delta_{1m} h_1 (a_{45}^{(1)} p_1^- + a_{44}^{(1)} p_2^-) - \\ - \delta_{N-1, m} h_N (a_{45}^{(N)} p_1^+ + a_{44}^{(N)} p_2^+) - 10 (h_m \chi_4^{(m)} + h_{m+1} \chi_4^{(m+1)}) + 12 (h_m \omega_4^{(m)} + h_{m+1} \bar{\omega}_4^{(m+1)})$$

$$\omega_4^{(m)} = \frac{2}{h_m} \alpha_4^{(m)} \int_{\delta_{m-1}}^{\delta_m} \theta M_m(z) dz, \quad \bar{\omega}_4^{(m+1)} = \frac{2}{h_{m+1}} \alpha_4^{(m+1)} \int_{\delta_m}^{\delta_{m+1}} \theta \bar{M}_{m+1}(z) dz$$

$$\chi_4^{(k)} = \alpha_4^{(k)} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \theta f_k(z) dz \quad (4 \geq 5)$$

где $k = 1, 2, \dots, N$; $m = 1, 2, \dots, N-1$; $n = 1, 2, \dots, N-2$, а не определенные в (3.5) элементы матрицы \mathbf{G} считаются нулевыми.

Решим систему уравнений (3.5), выразив межслойные напряжения $\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \dots, \tau_i^{(N-1)}$ через обобщенные перемещения $u_i, w, \beta_i^{(k)}$. Тогда из интегральных соотношений упругости (2.6) получим

$$\mu_i^{(k)} = q_{44}^{(k)} (\varepsilon_{13}^{(k)} - \chi_3^{(k)}) - q_{45}^{(k)} (\varepsilon_{23}^{(k)} - \chi_4^{(k)}) - 5/12 h_k (\tau_i^{(k-1)} + \tau_i^{(k)}) \quad (1 \geq 2; 4 \geq 5) \quad (3.6)$$

где $q_{mn}^{(k)}$ — коэффициенты поперечного сдвига

$$q_{mn}^{(k)} = \frac{5}{6} \frac{h_k a_{mn}^{(k)}}{a_{44}^{(k)} a_{35}^{(k)} - (a_{45}^{(k)})^2} \quad (m, n = 4, 5)$$

Как видим, интегральные соотношения упругости (2.6) играют принципиально важную роль в рассматриваемом варианте теории термоупругих многослойных оболочек, являясь связующим звеном между независимыми кинематическими (2.1), (2.2) и статическими (2.3) гипотезами, так как именно с их помощью удастся найти зависимость между лишними функциями $\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \dots, \tau_i^{(N-1)}$, $\mu_i^{(1)}, \mu_i^{(2)}, \dots, \mu_i^{(N)}$, введенными в (2.3), и обобщенными перемещениями $u_i, w, \beta_i^{(k)}$.

Подставив поперечные касательные напряжения (2.3) в формулу для поперечных усилий (3.2) и интегрируя с учетом соотношений (3.6), находим

$$Q_1^{(k)} = q_{44}^{(k)} (\varepsilon_{13}^{(k)} - \chi_3^{(k)}) - q_{45}^{(k)} (\varepsilon_{23}^{(k)} - \chi_4^{(k)}) + 1/12 h_k (\tau_1^{(k-1)} + \tau_1^{(k)})$$

$$Q_1 = \sum_{k=1}^N Q_1^{(k)} \quad (1 \geq 2, 4 \geq 5)$$

В заключение приведем формулы для вычисления поперечных нормальных напряжений. Пренебрегая в формулах (2.16), (2.17) членами kz по сравнению с единицей и интегрируя по координате z с учетом соотношений упругости (3.3), статической гипотезы (2.3) и деформационных соотношений (3.1), получим

$$\sigma_{33}^{(k)} = q^- - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial (A_2 N_1^{(k)} [z])}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 N_2^{(k)} [z])}{\partial \alpha_2} \right) + k_1 T_{11}^{(k)} [z] + k_2 T_{22}^{(k)} [z]$$

$$N_1^{(k)} [z] = Q_1^{(k)} [z] - \theta_1 T_{11}^{(k)} [z] - \theta_2 T_{12}^{(k)} [z]$$

$$Q_1^{(k)} [z] = \sum_{r=1}^{k-1} Q_1^{(r)} + h_k M_k (z) \left[1 - \frac{1}{2} M_k (z) \right] \zeta^{(k-1)} +$$

$$+ \frac{1}{2} h_k M_k^2 (z) \zeta^{(k)} + M_k^2 (z) [3 - 2M_k (z)] \mu_1^{(k)} \quad (1 \geq 2)$$

$$\begin{Bmatrix} T_{11}^{(k)} [z] \\ T_{22}^{(k)} [z] \\ T_{12}^{(k)} [z] \end{Bmatrix} = A^{(k)} [z] \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^N D^{(kn)} [z] \begin{Bmatrix} K_{11}^{(n)} \\ K_{22}^{(n)} \\ K_{12}^{(n)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_{01}^{(k)} [z] \\ T_{02}^{(k)} [z] \\ T_{06}^{(k)} [z] \end{Bmatrix}$$

$$A^{(k)} [z] = \sum_{r=1}^{k-1} h_r b^{(r)} + (z - \delta_{k-1}) b^{(k)}$$

$$D^{(kn)} [z] = \sum_{r=1}^{k-1} (\pi_{rn} + \frac{1}{2} \delta_{rn} h_r) h_r b^{(r)} + [\pi_{kn} + \frac{1}{2} \delta_{kn} (z - \delta_{k-1})] (z - \delta_{k-1}) b^{(k)}$$

$$T_{0m}^{(k)} [z] = \sum_{r=1}^{k-1} T_{0m}^{(r)} + \int_{\delta_{k-1}}^z t_{0m}^{(k)} dz \quad (m = 1, 2, 6)$$

Таким образом, непротиворечивый с точки зрения смешанного вариационного принципа геометрически нелинейный вариант теории термоупругих тонких многослойных анизотропных оболочек с учетом локальных эффектов, позволяющий рассмотреть достаточно общий случай температурного и силового нагружений (включая тангенциальное), построен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. Пространственная геометрически нелинейная задача термоупругости слоистых анизотропных оболочек вращения // Механика композитных материалов. 1988. № 4. С. 684—690.
2. Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Исследование пространственных эффектов в задачах о термонапряженном состоянии анизотропных оболочек // Механика композитных материалов. 1989. № 3. С. 487—493.
3. Куликов Г. М., Мищенко С. В. Термосиловое нагружение многослойных анизотропных оболочек // Механика композитных материалов. 1993. № 2. С. 191—202.
4. Григолюк Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикл. механика. 1972. Т. 8. № 6. С. 3—17.
5. Дудченко А. А., Лурье С. А., Образцов И. Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. Т. 15. М.: ВИНТИ, 1983. С. 3—68.
6. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // Механика композитных материалов. 1988. № 2. С. 287—298.
7. Noor A. K., Burton W. S. Assessment of computational models for multilayered composite shells // Appl. Mech. Rev. 1990. Vol. 23. No. 4. P. 67—97.
8. Григолюк Э. И. Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким наполнителем // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 1. С. 26—34.

9. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Нелинейные уравнения тонких упругих слоистых анизотропных пологих оболочек с жестким наполнителем // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 5. С. 68—80.
10. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. К теории упругих слоистых анизотропных оболочек // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 5. С. 1077—1079.
11. Новожилов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
12. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988. 288 с.
13. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
14. Григоренко Я. М., Васцленко А. Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. М.: Наука, 1992. 336 с.
15. Куликов Г. М. Напряженно-деформированное состояние оболочек из слоистых композитов // ПМТФ. 1988. № 5. С. 157—162.

Тамбов

Поступила в редакцию
1.X.1993