МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1994

УДК 539.3

© 1994 г. Н. Х. АРУТЮНЯН

О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГОГО КОЛЬЦА С УПРУГИМ ЦИЛИНДРОМ

Рассматривается осесимметричная контактная задача об обжатии бесконечного кругового цилиндра упругим кольцом, насаженным на цилиндр с натягом (фигура). Получена формула, определяющая контактное давление в зависимости от величины натяга.

Пусть $C = \{0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < \infty\}$ — бесконечный цилиндр с модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν, а $H = \{R_1 \le r \le R_2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -h \le z \le h\}$ — упругое кольцо с модулем сдвига G_1 и коэффициентом Пуассона ν_1, причем h мало по сравнению с радиусом цилиндра R и значением $R_2 - R_1$, а величина $\delta = R - R_1$ положительна и имеет порядок упругого перемещения в линейной теории.

При контактном взаимодействии цилиндра C с насаженным на него кольцом H величину δ будем называть натягом. Считаем, что контакт кольца и цилиндра является гладким, то есть возникает только нормальное контактное давление $p(z)$, а в области контакта $\{r = R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -h \le z \le h\}$ разность средних по z радиальных перемещений точек кольца и цилиндра дает δ, то есть условие контакта кольца и цилиндра имеет вид

$$\langle u\rangle_H - \langle u\rangle_C = \delta \quad \left(\langle u\rangle = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} u(z)\,dz\right) \tag{1}$$

Рассмотрим осесимметричную задачу для цилиндра C. Пусть $\Phi(r, z)$ — бигармоническая функция Лява [1], тогда

$$\Delta^2\Phi(r, z) = 0 \quad (0 \le r \le R,\ |z| < \infty) \tag{2}$$

Поля смещений и напряжений определяются через функцию $\Phi(r, z)$ следующим образом:

$$2Gu = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z},\quad 2Gw = \left[2(1-\nu)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\Phi + \text{const}$$

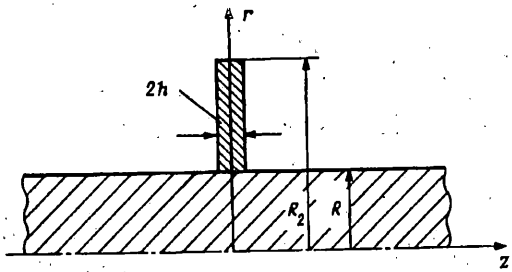
$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\Phi,\quad \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\Phi \tag{3}$$

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\Delta - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right]\Phi,\quad \sigma_\varphi = \frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\Delta - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]\Phi$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Граничные условия имеют вид

$$\sigma_r = -p(z)H(h-z)H(h+z),\quad \tau_{rz} = 0 \quad (r = R,\ |z| < \infty) \tag{4}$$



где $H(x)$ — функция Хевисайда.

Применим к уравнению (2) и условиям (4) преобразование Фурье по z:

$$\Phi_\lambda(r)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(r,z)\,e^{i\lambda z}dz,\quad \Phi(r,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_\lambda(r)\,e^{-i\lambda z}d\lambda \tag{5}$$

и в результате придем к одномерной краевой задаче

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\lambda^2\right)^2\Phi_\lambda(r)=0,\quad 0\le r\le R \tag{6}$$

$$i\lambda\left[(\nu-1)\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{d}{dr}-\nu\lambda^2\right]\Phi_\lambda(R)=p_\lambda;\quad p_\lambda=\int_{-h}^{h}p(z)\,e^{i\lambda z}dz$$

$$\left[(1-\nu)\frac{d^3}{dr^3}+\frac{1-\nu}{r}\frac{d^2}{dr^2}+\left(\nu\lambda^2-\frac{1-\nu}{r^2}\right)\frac{d}{dr}\right]\Phi_\lambda(R)=0$$

Решение этой задачи с учетом того, что точка $r=0$ — точка регулярности функции $\Phi_\lambda(r)$, имеет вид

$$\Phi_\lambda(r)=\frac{-iRp_\lambda\left[-(\varkappa+I_1^\circ+\lambda RI_0^\circ)\,I_0(\lambda r)+I_1^\circ\lambda rI_1(\lambda r)\right]}{\lambda^2 d(\lambda)} \tag{7}$$

$$d(\lambda)=\lambda^2R^2\left(I_0^{\circ 2}-I_1^{\circ 2}\right)-\varkappa_+I_1^{\circ 2},\quad \varkappa_+=2-2\nu$$

$$I_m^\circ=I_m(\lambda R)\quad (m=0,\,1)$$

где $I_m(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента.

Учитывая формулу обращения (5), а также первое равенство в (3), приходим к выражению для радиальных смещений

$$u(r,z)=-\frac{R}{2\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p_\lambda e^{-i\lambda z}}{d(\lambda)}\left[(\lambda RI_0^\circ+\varkappa+I_1^\circ)\,I_1(\lambda r)-\lambda rI_1^\circ I_0(\lambda r)\right]d\lambda \tag{8}$$

С помощью (8) найдем при $r=R$:

$$\langle u\rangle_C=-\frac{R}{2\pi\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p_\lambda I_1^{\circ 2}\sin\lambda h}{\lambda h\,d(\lambda)}\,d\lambda\quad\left(\theta=\frac{G}{1-\nu}\right) \tag{9}$$

Из решения задачи Ламе [2] в случае обобщенного плоского напряженного состояния для кольца H получим

$$\langle u\rangle_H=\frac{\langle p\rangle R^3}{2G_1\left(R_2^2-R^2\right)}\left(\frac{1-\nu_1}{1+\nu_1}\frac{r}{R}+\frac{R_2^2}{rR}\right) \tag{10}$$

где $\langle p\rangle$ — среднее по z значение контактного давления. Из (10) найдем $\langle u\rangle_H$ в области контакта, то есть при $r=R$.

Для окончательного решения задачи необходимо определить характер распределения контактных давлений. Заметим, что в окрестности точек $z=\pm h$ контактное давление соответственно имеет вид

$$p(z)\sim A_i r_i^{\varkappa-1} \quad (A_i = \text{const},\ i = 1, 2) \tag{11}$$

$$r_1 = h - z, \quad r_2 = h + z$$

где величина $\varkappa$ определяется из решения [3] плоской задачи о взаимодействии без трения упругих четвертьплоскости с постоянными G_1, ν_1 и полуплоскости с постоянными G, ν, причем $\varkappa$ является функцией безразмерного параметра $n = \theta_1/\theta$, $\theta_1 = G_1(1-\nu_1)^{-1}$. При $n = 0$ величина $\varkappa = 1$, при $n \to \infty$ величина $\varkappa = 1/2$, в общем случае график зависимости $\varkappa$ от n имеется в работе [4]. Еще известно, когда жесткость цилиндра намного больше жесткости кольца ($n = 0$), то согласно [2] $p(z)=B=$const, а когда жесткость кольца намного больше жесткости цилиндра ($n\to\infty$), то при малых значениях h/R имеет место зависимость $p(z) = C(r_1 r_2)^{-1/2}$, $C = $ const [5].

С учетом всего сказанного при произвольном n примем, что

$$p(z) = D(r_1r_2)^{\varkappa-1} = D(h^2 - z^2)^{\varkappa-1} \quad (D = \text{const}) \tag{12}$$

тогда найдем

$$p_\lambda = D\sqrt{\pi}\left(\frac{2h}{\lambda}\right)^{\varkappa-1/2}\Gamma(\varkappa)J_{\varkappa-1/2}(\lambda h) = Df_1(\lambda, h, \varkappa) \tag{13}$$

$$\langle p\rangle = D\frac{\sqrt{\pi}}{2}h^{2(\varkappa-1)}\frac{\Gamma(\varkappa)}{\Gamma(\varkappa+1/2)} = Df_2(h, \varkappa)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $J_\nu(x)$ — функция Бесселя.

Подставляя (9), (10) при $r = R$ и (13) в условие контакта (1), для постоянной D в (12) получим выражение

$$D = \delta\left[\frac{f_2(h, \varkappa)R^3}{2G_1(R_2^2 - R^2)}\left(\frac{1-\nu_1}{1+\nu_1} + \frac{R_2^2}{R^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{R}{2\pi\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1(\lambda, h, \varkappa)I_1^{\circ 2}\sin\lambda h}{\lambda h d(\lambda)}d\lambda\right]^{-1} \tag{14}$$

Итак, при заданном натяге δ по формулам (12), (14) может быть рассчитано контактное давление, а затем напряженно-деформированное состояние цилиндра и кольца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 676 с.
2. *Кац А. М.* Теория упругости. М.: ГИТТЛ, 1956. 208 с.
3. *Theocaris P. S., Gdoutos E. E.* Stress singularities at vertices of composite plates with smooth or rough interfaces // Arch. of Mech. 1976. V. 28. No. 4. P. 693—704.
4. *Александров В. М., Гришин С. А., Коваленко Е. В.* Контактное взаимодействие толстой плиты с упругим слоем большой толщины // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 64—69.
5. *Александров В. М.* Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 5. С. 91—94.

Москва

Поступила в редакцию 20.III.1993