МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1994

УДК 539:3

 В. Е. ПОПОВИЧ

ВАРИАНТ МЕТОДА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ В ЗАДАЧАХ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Первое применение степенных рядов для решения задач устойчивости принадлежит, по-видимому, Эйлеру. В более поздних работах ряды для этих целей применялись А. Гринхиллом, Ф. С. Ясинским, А. Н. Динником, Е. Л. Николаи [1] и многими другими. Челомей В. Н. [2] применил методы степенных рядов для решения задач устойчивости стержней. Разлагая решение уравнения второго порядка в степенной ряд, и удовлетворяя граничным условиям, он получил характеристическое уравнение в виде равенства нулю полинома по степеням параметра. Корни уравнения определяют собственные значения параметра. Несколько позже Микеладзе Ш. Е. в [3] вновь изложил идеи метода степенных рядов для решения задач на собственные значения, применив их к решению задач устойчивости и колебаний стержней [1].

Следует отметить, что в работах разных авторов, применяющих степенные ряды, указывается на преимущество последних. Например, П. Ф. Фильчаков в [4] пишет: «Для определения собственных значений разработано большое число различных методов, но все они довольно трудоемки и позволяют главным образом находить первые два — три собственных значения. Решение задачи можно существенно упростить, если воспользоваться степенными рядами».

На примере задачи устойчивости сжатого стержня постоянной жесткости, шарнирно закрепленного по концам, он показывает определение двух низших собственных значений. Отмечается, что с ростом номера собственного значения необходимо учитывать бо́льшее количество членов характеристического полинома. Однако, в работе осталось не замеченным одно обстоятельство. Для вычисления спектра собственных значений с помощью характеристического полинома, построенного традиционным методом, необходимо с ростом номера собственного значения увеличивать точность вычислений членов полинома, то есть увеличивать количество верных значащих цифр в их выражении. Таким образом, использование традиционного подхода методов степенных рядов для определения спектра собственных значений на реальных ЭВМ с ограниченной разрядной сеткой становится невозможным. Рассмотрим вопрос подробнее.

Пусть требуется найти собственные значения параметра λ^2 однородной краевой задачи

$$y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0, \quad x \in [0;\ 1] \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \tag{2}$$

К ней сводится, например, задача устойчивости стержня постоянной жесткости, свободно закрепленного по концам и нагруженного продольной силой Р. В этом случае $\lambda^2 = Pl^2/(EI)$, где l — длина стержня.

---

[1] Различные подходы применения степенных рядов в задачах на собственные значения изложены в работе Э. И. Григолюка, В. Е. Поповича «О применении степенных рядов для интегрирования дифференциальных уравнений». М.: МАМИ, 1979. 61 с.

Таблица 1

k	λ_k^2	$\bar{\lambda}_k^2$	n
1	9,869604	9,869606	14
2	39,47841	39,47850	18
3	88,82643	88,81 ...	24
4	157,9136	157,7 ...	26
5	246,7401	250, ...	29
6	355,3057	330, ...	32
7	483,6106	343, ...	36

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y(x, \lambda) = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} y_{1,n} + C_2 \sum_{n=0}^{\infty} y_{2,n} \tag{3}$$

В решении (3) фундаментальные функции представим степенными рядами. Будем строить нормированную систему фундаментальных функций. Поэтому принимаем

$$y_{1,0} = 1, \quad y_{1,1} = 0, \quad y_{2,0} = 0, \quad y_{2,1} = x \tag{4}$$

Рекуррентная формула имеет вид

$$y_{\mu,n} = -\frac{1}{n(n-1)} y_{\mu,(n-2)} \lambda^2 x^2 \quad (\mu = 1, 2) \tag{5}$$

Используя начальные значения членов ряда (4), и применяя рекуррентную формулу (5), получаем общее решение (3) в виде

$$y(x, \lambda) = C_1\left[1 - \frac{\lambda^2}{2!}x^2 + \frac{\lambda^4}{4!}x^4 - \frac{\lambda^6}{6!}x^6 + \ldots\right] +$$

$$+ C_2\left[x - \frac{\lambda^2}{3!}x^3 + \frac{\lambda^4}{5!}x^5 - \frac{\lambda^6}{7!}x^7 + \ldots\right] \tag{6}$$

Из первого граничного условия (2) имеем $C_1 = 0$. Удовлетворение второму граничному условию (2) приводит к характеристическому уравнению

$$1 - \lambda^2/3! + \lambda^4/5! - \lambda^6/7! + \ldots = 0 \tag{7}$$

Корни этого уравнения определяют спектр собственных значений параметра λ^2 задачи (1), (2). Обозначим их λ_k^2 ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Каждому собственному значению λ_k^2 соответствуют собственные функции

$$y_k = x - \frac{\lambda_k^2}{3!}x^3 + \frac{\lambda_k^4}{5!}x^5 - \frac{\lambda_k^6}{7!}x^7 + \ldots$$

Для вычисления корней уравнения (7) необходимо вычислять конечные суммы ряда, стоящего в левой части уравнения

$$1 + \sum_{n=1}^{m} (-1)^n \frac{\lambda^{2n}}{(2n+1)!}$$

Если суммирование ряда выполняется на реальной ЭВМ с ограниченной разрядной сеткой, то с ростом λ растут ошибки вычисления суммы [2], следовательно увеличиваются ошибки, с которыми определяются собственные значения параметра λ. Потеря точности здесь связана с суммированием близких по модулю, но противоположных по знаку чисел. В табл. 1 показаны результаты численного эксперимента по определению собственных значений задачи (1), (2).

В первой колонке указан номер k собственных чисел. Во второй колонке приведены собственные значения λ_k^2, найденные с семью верными цифрами (без округления) по формулам точного решения. В третьей колонке приведены результаты вычисления корней $\overline{\lambda}_k^2$ уравнения (7) на машине с семиразрядной сеткой. В четвертой колонке показано количество членов ряда n, учитываемых в расчете. Количество членов ряда выбиралось таким, чтобы ошибка ограничения, связанная с рассмотрением усеченного ряда, выходила за рамки разрядной сетки машины. Из табл. 1 видно, что характеристический полином в уравнении (7), полученный методами степенных рядов, вполне пригоден для решения задач устойчивости. Найденное из уравнения (7) наименьшее собственное значение, определяющее критическую нагрузку, найдено с высокой точностью на машине с семиразрядной сеткой. Точность здесь соответствует практическим возможностям машины. При решении динамических задач, связанных с определением спектра частот свободных колебаний, характеристический полином пригоден для определения только нескольких низших тонов. Из табл. 1 видно, что седьмое собственное значение, найденное из уравнения (7) на машине с семиразрядной сеткой, не имеет уже ни одной верной значащей цифры. Такое нарастание ошибки связано с ростом погрешности вычисления суммы знакочередующегося ряда при большом значении аргумента из-за ограниченности разрядной сетки машины.

Для преодоления указанных трудностей в [5, 6] предложен шаговый подход в реализации степенных рядов. Он оказывается эффективным также в задачах на собственные значения. Покажем его на примере решения задачи (1), (2).

Разобьем интервал, на котором задано уравнение (1), на несколько участков с узловыми точками $k=0, 1, 2, \ldots m_*$. Абсциссу начала участка номера k обозначим x_k.

Общее решение уравнения (1) на каждом участке представим в виде разложений по степеням $x-x_k$:

$$y_k = C_{1,k}y_{1,k}+C_{2,k}y_{2,k} = C_{1,k}\left[1 - \frac{\lambda^2}{2!}(x-x_k)^2 + \frac{\lambda^4}{4!}(x-x_k)^4 - \frac{\lambda^6}{6!}(x-x_k)^6+\ldots\right]+$$
$$+ C_{2,k}\left[x - x_k - \frac{\lambda^2}{3!}(x-x_k)^3 + \frac{\lambda^4}{5!}(x-x_k)^5 - \frac{\lambda^6}{7!}(x-x_k)^7+\ldots\right] \qquad (8)$$

Решение (8) нормировано в начальной точке участка при $x=x_k$, а векторы решений $(y_{1,k}, y'_{1,k})$ и $(y_{2,k}, y'_{2,k})$ в этой точке ортогональны.

Из условий сопряжений на границах участков константы интегрирования C_{1k} и C_{2k} можно выразить через константы $C_{1,1}$ и $C_{2,1}$ первого участка [6]. Тогда общее решение участка номера k будет иметь вид

$$y_k = C_1\left[\beta^{(1)}_{1,k}y_{1,k} + \beta^{(1)}_{2,k}y_{2,k}\right] + C_2\left[\beta^{(2)}_{1,k}y_{1,k} + \beta^{(2)}_{2,k}y_{2,k}\right] \qquad (9)$$

Коэффициенты $\beta^{(\eta)}_{\mu,k}$ определяются по рекуррентным формулам [5]:

$$\beta^{(\eta)}_{1,k} = \beta^{(\eta)}_{1,(k-1)}y_{1,(k-1)}(h_{k-1}) + \beta^{(\eta)}_{2,(k-1)}y_{2,(k-1)}(h_{k-1}),$$
$$\beta^{(\eta)}_{2,k} = \beta^{(\eta)}_{1,(k-1)}y'_{1,(k-1)}(h_{k-1}) + \beta^{(\eta)}_{2,(k-1)}y'_{2,(k-1)}(h_{k-1}) \qquad (10)$$

[2] См. *Э. И. Григолюк, В. Е. Попович.* О применении степенных рядов в прикладной математике//Методические указания по курсу Вычислительная техника. М.: МАМИ. 1987. 35 с.; О реализации на ЭЦВМ методов степенных рядов//Методические указания для слушателей ФПК МАМИ и студентов всех специальностей. М.: МАМИ, 1987. 36 с.

Таблица 2

k	λ_k^2	$\overline{\lambda}_k^2$	m_*
1	9,869604	9,869606	1
2	39,47841	39,47840	2
3	88,82643	88,82641	4
4	157,9136	157,9134	4
5	246,7401	246,7400	4
6	355,3057	355,3056	4
7	483,6106	483,6106	8
8	631,6546	631,6545	8
9	799,4379	799,4377	8
10	986,9604	986,9603	8
50	24674,01	24674,02	25
100	98696,04	98696,00	50
150	222066,1	222066,1	100

Таблица 3

k	λ_k^2	$\lambda_k^{\vee 2}$	$m_*^{\vee}$	$t^{\vee}$	$\overline{\lambda}_k^2$	$\overline{m}_*$	$\overline{t}$
1	9,869604	9,8690	250	6	9,869606	1	0,5
2	39,47841	39,470	250	6	39,4785	1	0,66
3	88,82643	88,822	800	23	88,82643	3	0,66
4	157,9136	157,90	800	23	157,9136	4	0,66
5	246,7401	246,70	800	23	246,7400	4	0,66
6	355,3057	355,30	2800	80	355,3056	4	0,66
7	483,6106	483,60	2800	80	483,6106	4	0,75

где $\eta = 1, 2$, h_{k-1} — длина участка номера $(k - 1)$. Для первого участка $(k - 1)$ имеем: $\beta_{1,1}^{(1)} = 1$, $\beta_{2,1}^{(1)} = 0$, $\beta_{1,1}^{(2)} = 0$, $\beta_{2,1}^{(2)} = 1$.

Из первого граничного условия $C_1 = 0$. Поэтому решение на каждом участке будет

$$y_k = C_2 \left[\beta_{1,k}^{(2)} y_{1,k} + \beta_{2,k}^{(2)} y_{2,k}\right] \tag{11}$$

Удовлетворяя второму граничному условию в концевой точке последнего участка номера m_*, получаем уравнение (h — длина участка):

$$\beta_{1,m*}^{(2)} y_{1,m*}(h) + \beta_{2,m*}^{(2)} y_{2,m*}(h) = 0$$

или

$$\beta_{1,m*}^{(2)} \left[1 - \frac{\lambda^2}{2!}h^2 + \frac{\lambda^4}{4!}h^4 - \frac{\lambda^6}{6!}h^6 + \ldots\right] + \\ + \beta_{2,m*}^{(2)} \left[h - \frac{\lambda^2}{3!}h^3 + \frac{\lambda^4}{5!}h^5 - \frac{\lambda^6}{7!}h^7 + \ldots\right] = 0 \tag{12}$$

Уравнение (12) обобщает уравнение (7). При $m_* = 1$ оно переходит в уравнение (7). В этом случае $h = 1$. Если $h < 1$, это уравнение позволяет вычислять высшие собственные значения с высокой точностью. Легко для любого λ^2 подобрать длину участка h таким образом, чтобы сходимость рядов в (12) была такой же, как сходимость ряда в уравнении (7) при первом собственном значении λ_1^2.

Следовательно, точность вычисления высших собственных значений в уравнении (12) можно поддерживать на одном и том же уровне даже на машине с ограниченной разрядной сеткой.

В табл. (2) показаны результаты вычисления собственных значений по уравнению (12) на ЭВМ с семиразрядной сеткой. В первой колонке указаны номера k собственных значений. Во второй колонке приведены значения λ_k^2 найденные с семью верными цифрами. В третьей колонке расположены значения $\overline{\lambda}_k^2$, полученные по уравнению (12). Для проверки алгоритма вычислялись собственные значения до сто пятидесятого тона. Как видно из таблицы, точность вычислений не зависит от номера собственного значения и остается весьма высокой. Ошибки не превышают нескольких десятых последнего разряда числа. В последней колонке табл. 2 указано количество участков m_*, на которое разбивается интервал [0, 1].

Представляет интерес сравнение трудоемкости метода степенных рядов и численных методов. В табл. 3 сравниваются результаты решения задачи (1), (2) методом Рунге — Кутта второго порядка (отмечены галочкой) и методом степенных рядов (отмечены чертой) с использованием уравнения (12). В таблице указано количество участков на интервале и время счета t в минутах. Так как вычисления проводились методом стрельбы, то в таблице указано время на один ход.

Как видно из таблицы, время счета методом Рунге — Кутта существенно превышает время счета методом степенных рядов. Кроме того в методе Рунге — Кутта время счета заметно возрастает с ростом номера тона. При переходе от первого собственного значения к седьмому время счета в методе Рунге — Кутта возрастает в 13 раз, в методе степенных рядов оно увеличивается всего в 1,5 раза. Поэтому, например, время вычисления первого собственного значения с четырьмя верными цифрами методом Рунге — Кутта превышает время счета методом степенных рядов всего в 12 раз, в то время как на вычисление седьмого тона тратится уже время, большее в сто раз, чем в методе степенных рядов. Отметим, что на вычисление пятидесятого собственного значения $\lambda_{50}^2 = 24674{,}00$, где шесть верных цифр, в методе степенных рядов тратится время всего в 1,6 раза большее, чем на определение первого тона, а на вычисление сотого собственного значения с четырьмя верными цифрами уходит время в два раза большее времени вычисления первого тона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. М.: Гостехтеориздат., 1955. 567 с.
2. *Челомей В. Н.* Применение рядов к исследованию устойчивости стержней//Тр. Киевского авиац. ин-та. 1938. Вып. 10. С. 55—59.
3. *Микеладзе Ш. Е.* Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений. М. Л.: Гостехтеориздат, 1951. 291 с.
4. *Фильчаков П. Ф.* Численные и графические методы прикладной математики. Киев: Наук. думка, 1970. 745 с.
5. *Попович В. Е.* Вариант метода прогонки решения краевых задач с обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями.//В сб. Численные и экспериментальные методы исследования прочности, устойчивости и колебаний конструкций летательных аппаратов. М.: МАИ, 1983. С. 56—62.
6. *Попович В. Е.* Модификация метода степенных рядов для плохообусловленных краевых задач//Вопросы прочности тонкостенных конструкций. Тематический сб. научн. тр. М.: МАИ, 1987. С. 33—38.

Москва

Поступила в редакцию
15.IX.1993