МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1994

УДК 539.375

© 1994 г. Ю. В. ЛИПОВЦЕВ

КРИТЕРИЙ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ ОБРАЗЦОВ И ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

На основе полученных в публикуемой работе результатов расчетно-теоретического анализа напряженного состояния образцов и их сопоставления с результатами различных видов экспериментального исследования прочности предлагается следующий критерий хрупкого разрушения образцов и элементов конструкции. Хрупкое разрушение образца или элемента конструкции происходит тогда, когда потенциальная энергия упругих растягивающих деформаций во всем объеме или в той части объема, которая подвержена разрушению, достигает предельного значения.

Имея в виду определение потенциальной энергии деформации, можно сказать иначе. Хрупкое разрушение образца или элемента конструкции происходит тогда, когда предельного значения достигает та часть работы внешних сил, которая вызывает деформации растяжения.

В данном определении критической ситуации разрушения речь идет не об удельной потенциальной энергии, а о потенциальной энергии во всем объеме. В этом главное отличие данного критерия от всех известных в настоящее время [1].

Критическая величина потенциальной энергии области растягивающих напряжений является функцией коэффициента динамической вязкости и геометрических параметров элемента конструкции. При этом предполагается, что ее можно определить экспериментально на изделиях или путем сравнения результатов испытания образцов на прочность при различных видах нагружения.

1. Изгиб и растяжение. Для первой оценки критерия и для иллюстрации его использования рассмотрим примеры. В первую очередь в качестве таких примеров возьмем два вида испытания образцов: испытание на растяжение и испытание на изгиб.

Потенциальная энергия образца прямоугольного сечения при растяжении будет: $\Pi_1 = \sigma_p^2 blh/E$, где $2h$, b — высота и ширина поперечного сечения образца, l — длина рабочей части, σ_p — предел прочности при растяжении.

При изгибе напряжения изменяются по высоте по линейному закону $\sigma(z) = \sigma_m z/h$ $(-h \leq z \leq h)$ и потенциальная энергия одной половины образца, где напряжения растягивающие, будет $\Pi_2 = {}^1\!/_6 blh\sigma_m/E$, где l — длина рабочей части образца, в пределах которой напряжения по длине не изменяются, σ_m — предел прочности при изгибе.

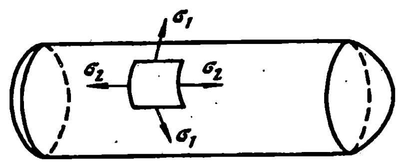
Приравнивая Π_1 и Π_2 получим

$$\sigma_p = \sqrt{6}/\sigma_m \tag{1.1}$$

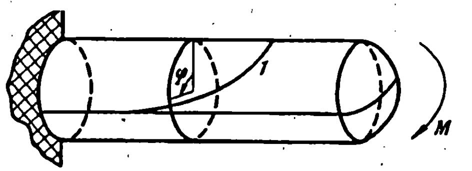
Данный результат хорошо согласуется с данными эксперимента для хрупких материалов.

2. Плоское напряженное состояние. Рассмотрим теперь пластину при одноосном напряженном состоянии $\sigma_1 = \sigma_p$, $\sigma_2 = 0$, и при двухосном напряженном состоянии $\sigma_1 = \sigma_p^*$, $\sigma_2 = k\sigma_p^*$, где k — произвольный коэффициент.

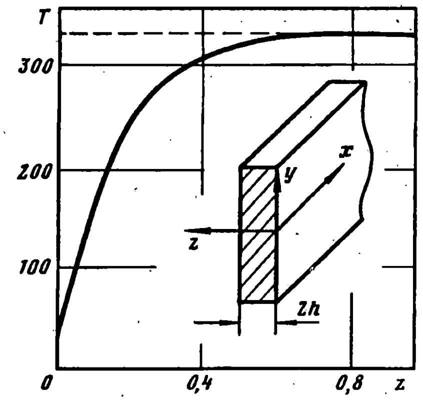
Потенциальная энергия при двухосном напряженном состоянии равна $\Pi_1 = {}^1\!/_2 Sh(\sigma_p^*)^2(1 + k^2 - 2\nu k)/E$, а при одноосном: $\Pi_2 = {}^1\!/_2 Sh\sigma_p^2/E$, где S, h — площадь и толщина пластины.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Приравнивая Π_1 и Π_2, получим $\sigma_p^* = \sigma_p\,(1 + k^2 - 2\nu k)^{-1/2}$. Например, при $k = 1$ и $\nu = 0{,}25$ в момент разрушения будем иметь

$$\sigma_p^* = 0{,}8\sigma_p. \text{ При } k = 0{,}5 \text{ и } \nu = 0{,}25\text{: } \sigma_p^* = \sigma_p,\ \sigma_1 = \sigma_p,\ \sigma_2 = 0{,}5\sigma_p. \tag{2.1}$$

3. Цилиндр под действием внутреннего давления. Рассмотрим цилиндр с доньями под действием внутреннего давления (фиг. 1). В данном случае при обеспечении условий безмоментного состояния напряженное состояние в цилиндрической части можно считать однородным. Причем, оно двухосное и главные напряжения σ_1, σ_2 будут следующими.

$$\sigma_1 = pR/h,\ \sigma_2 = 1/2\,pR/h$$

Согласно (2.1) разрушение произойдет, когда $\sigma_1 = \sigma_p$, $\sigma_2 = 0{,}5\sigma_p$, где σ_p — предел прочности при одноосном растяжении. Разрушение произойдет при давлении $p = \sigma_p h/R$, что согласуется с общепринятым расчетом по максимальным нормальным напряжениям.

4. Консольная оболочка вращения при изгибе моментом. Рассмотрим теперь случай, показанный на фиг. 2, когда консольно закрепленная оболочка находится под действием нагрузки, эквивалентной изгибающему моменту M.

По безмоментной теории в цилиндрической части

$$\sigma_1 = \frac{M}{\pi R^2 h}\sin\varphi,\ \sigma_2 = 0 \tag{4.1}$$

Причиной разрушения здесь будут деформации растяжения в верхней части цилиндра, как показано на рисунке. Поэтому сравнивать нужно потенциальную энергию верхней части цилиндра при данном напряженном состоянии (4.1) с потенциальной энергией предельного напряженного состояния под действием внутреннего давления или осевого растяжения.

Потенциальная энергия верхней части цилиндра длины l при неоднородных напряжениях (4.1) будет: $\Pi_1 = 1/4\,\pi Rlh\,[M/(\pi R^2 h)]^2/E$

Потенциальная энергия предельного состояния при опрессовке внутренним давлением равна: $\Pi_2 = 1/2\,\pi Rlh\sigma_p^2/E$. Сравнивая эти два выражения, получим

$$M/(\pi R^2 h) = \sqrt{2}\,\sigma_p \tag{4.2}$$

Таким образом, максимальные растягивающие напряжения в изделии в момент разрушения будут

$$\sigma_1^{max} = \sqrt{2}\,\sigma_p = 0{,}56\sigma_m \tag{4.3}$$

где σ_m — предел прочности образцов при изгибе.

Полученные результаты (1.1), (2.1), (4.3) очень хорошо согласуются с данными эксперимента, который состоял в многочисленных испытаниях оболочек из кварцевой керамики на внутреннее давление и изгиб. Испытывались также образцы на изгиб и растяжение.

5. Термостойкость. Перейдем теперь к изучению механики разрушения хрупких материалов при испытаниях на термостойкость, которые проводятся путем сбрасывания в воду предварительно нагретых плоских образцов. Проведенные нами расчеты нестационарных температурных полей методом конечных разностей показали, что распределение температуры по толщине образца в разные моменты времени хорошо описываются параболой степени $2n$:

$$T(x, y, z) = T_\omega + (T^\circ - T_\omega)\,[1 - (1 - z/h)^{2n}] \tag{5.1}$$

где T_ω — температура воды, T° — начальная температура сбрасываемого в воду образца толщины $2h$. Показатель степени $2n$ изменяется со временем от бесконечности до 2.

В качестве иллюстрации возможности аппроксимировать температурные поля соотношением (5.1) на фиг. 3 показано распределение температуры в поверхностном слое образца из силикатного стекла толщиной 0,01 м на начальной стадии охлаждения при $t = 0{,}02$ с. На этом же рисунке показана часть образца и введенная здесь система координат.

Характерным здесь является то, что на протяжении относительно продолжительного времени температура на поверхности практически равна температуре жидкости T_ω, а температура в середине образца еще равна начальной температуре T°. На этом этапе идет процесс развития толщины слоя, подвергнутого растягивающим напряжениям. Обозначим толщину этого слоя через $\delta(t)$. Как видно из графика (фиг. 3) $\delta = 0{,}25 \cdot 10^{-3}$ м в момент времени $t = 0{,}02$ с. Напряжения на некотором удалении от боковых граней пластин можно определить по формулам

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{E\alpha}{1 - \nu}(T^{\vee} - T) \tag{5.2}$$

$$T^{\vee} = T_\omega + \frac{2n}{2n + 1}(T^\circ - T_\omega)$$

На поверхности $z = 0$ температура $T = T_\omega$ и напряжения будут

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{E\alpha\theta}{(1 - \nu)}\frac{2n}{(2n + 1)}, \quad \theta = T^\circ - T_\omega \tag{5.3}$$

В пределах поверхностного слоя толщины δ напряжения представим в виде

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{E\alpha\theta}{(1 - \nu)}\frac{2n}{(2n + 1)}\left(1 - \frac{z}{\delta}\right), \quad z \leq \delta \tag{5.4}$$

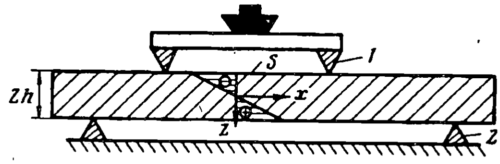
Вычислим теперь потенциальную энергию слоя толщины δ:

$$\Pi_1 = \iint_S dxdy \int_0^\delta \frac{E\alpha^2\theta^2}{1 - \nu}\left(\frac{2n}{2n + 1}\right)^2\left(1 - \frac{z}{\delta}\right)^2 dz$$

Пренебрегая изменением подынтегрального выражения по координатам x, y в пределах некоторой области S, получим

$$\Pi_1 = S\,\frac{E\alpha^2\theta^2}{1 - \nu}\left(\frac{2n}{2n + 1}\right)^2\frac{\delta}{3} \tag{5.5}$$

Обратимся теперь к вычислению потенциальной энергии такого же образца при центральном симметричном изгибе с помощью двух колец 1, 2, как показано



Фиг. 4

на фиг. 4. В этом случае напряжения в пределах круга будут $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_m z/h$ $(-h \leq z \leq h)$ и для потенциальной энергии деформаций в объеме растягивающих напряжений получим выражение

$$\Pi_2 = 1/3 S\sigma_m (1 - \nu)\, h/E \qquad (5.6)$$

Приравнивая (5.5) и (5.6), приходим к соотношению

$$\theta = \frac{(2n + 1)(1 - \nu)\sigma_m}{2nE}\sqrt{\frac{h}{\delta}} \qquad (5.7)$$

В основу вывода полученного соотношения положено приближенное выражение (5.1), аппроксимирующее реальное распределение температуры по толщине в некоторый момент времени. Но погрешности аппроксимации здесь не имеют принципиального значения, поскольку полученный при этом коэффициент $(2n + 1)/2n$ в общем случае характеристика статистическая, но изменяется в узких пределах от 1 до 1,5. Главное — получена связь между механическими характеристиками материала, определяющими его прочность и термостойкость.

В дополнение к вышесказанному отметим, что между параметрами n и δ есть непосредственная связь. Дело в том, что $T(\delta) = T^{\vee}$:

$$T_\omega + (T^\circ - T_\omega)\left[1 - \left(1 - \frac{\delta}{h}\right)^{2n}\right] = T_\omega + \frac{2n}{2n + 1}(T^\circ - T_\omega)$$

Из этого следует

$$\frac{\delta}{h} = 1 - \left(\frac{1}{2n + 1}\right)^{\varkappa}, \quad \varkappa = \frac{1}{2n}$$

Ранее было отмечено, что $n \to \infty$ при $t = 0$. Вычисляя предел правой части, находим

$$\lim_{n \to \infty}\frac{\delta}{h} = 1 - \lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{2n + 1}\right)^{\varkappa} = 0$$

С другой стороны, $n = 1$ при $t \to \infty$. Из этого получаем $\delta_{max} = h\left(1 - 1/\sqrt{2}\right) = 0{,}3h$.

Таким образом, если подставить в формулу (5.7) предельные значения $n = 1$ и $\delta = 0{,}3h$, то получим соотношение

$$\theta = 2{,}73\,(1 - \nu)\,\sigma_m/(E\alpha) \qquad (5.8)$$

где θ — термостойкость материала, σ_m — предел прочности плоских образцов при центральном симметричном изгибе. Возьмем в качестве примера алюмоксидную керамику ТСМ 303, для которой $E = 3{,}0 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 7{,}0 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$, $\nu = 0{,}23$, $\sigma_m = 240$ МПа. Расчетное значение термостойкости $\theta = 240$ градусов, а экспериментально полученные значения $\theta = 180 - 240$ градусов.

В качестве второго примера приведем кварцевое стекло, у которого $E = 6{,}45 \cdot 10^4$ МПа, $\alpha = 4{,}3 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$, $\nu = 0{,}2$, $\sigma_m = 25$—30 МПа. Расчетная термостойкость стекла $\theta = 212$ градусов, экспериментальная термостойкость 180—240 градусов.

Выражаю глубокую благодарность Эдуарду Ивановичу Григолюку, творческое влияние которого привело к данным исследованиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Писаренко Г. С., Лебедев А. А.* Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Наук. думка, 1976. 432 с.

Обнинск

Поступила в редакцию
4.I.1994