МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1994

УДК 539.3

© 1994 г. Р. А. ВАСИН, А. А. ИЛЬЮШИН, П. А. МОССАКОВСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ И КРИТЕРИЕВ РАЗРУШЕНИЯ НА СПЛОШНЫХ И ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБЧАТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБРАЗЦАХ

Предлагается метод исследования связи напряжений с деформациями на основании испытания сплошных или толстостенных трубчатых образцов, нагружаемых осевой силой, крутящим моментом, внешним (а для трубок — и внутренним) давлением. Изотермический процесс задается тремя компонентами тензора деформации в виде функций времени; в каждый момент времени строятся соответствующие компоненты тензора напряжений.

Недостатком традиционного экспериментального метода изучения сложного нагружения на тонкостенных трубчатых образцах является невозможность (вследствие потери устойчивости) получения больших деформаций сдвига. Кроме того, известны трудности качественного изготовления тонкостенных образцов. Предлагаемый метод свободен от этих недостатков, но ввиду неоднородного напряженно-деформированного состояния в толстостенных образцах возникает проблема расшифровки результатов экспериментов. Известны два подхода к ее решению: для заданной траектории деформаций точки, расположенной на наружной поверхности образца, соответствующая траектория напряжений определяется из эксперимента или на одном образце (как и при использовании тонкостенной трубки), или по результатам экспериментов на двух образцах с различными, но близкими величинами диаметров (условная тонкостенная трубка). Первый подход широко используется для получения зависимости «касательное напряжение — сдвиг» [1, 2] в экспериментах на кручение сплошных круговых образцов.[1] Второй подход менее распространен; в нашей стране его систематическое применение осуществлено в экспериментальных работах [4, 5]. Эти подходы для сложных нагружений недостаточно обоснованы. Не останавливаясь на анализе работ, посвященных названным подходам, обратимся к общей схеме эксперимента на толстостенном круговом цилиндрическом образце.

Рассмотрим такой образец, нагружаемый по некоторой программе (кинематической, силовой или комбинированной) осевой силой P, крутящим моментом M, внутренним и внешним давлениями q_1 и q_2. В рабочей части образец представляет собой полый прямой круговой цилиндр длины L с внутренним и внешним радиусами основания R_1 и R_2. Исходим из известного предположения о том, что вектор перемещений $\mathbf{u}\,(u_r, u_\varphi, u_z)$ в естественной системе координат (r, φ, z) имеет вид

$$u_r = u\,(r, t),\ \ u_\varphi = \frac{\psi\,(t)}{L}\,zr,\ \ u_z = \frac{\Delta L\,(t)}{L}\,z \tag{1}$$

где $\Delta L\,(t)$ — осевое удлинение, $\psi\,(t)$ — относительный угол закручивания образца на базе L.

Будем считать материал образца несжимаемым

$$\partial u/\partial r + u/r + \Delta L/L = 0 \tag{2}$$

[1] Соответствующая методика для двузвенных траекторий деформаций с ортогональным изломом, разработанная в рамках теории упругопластических процессов [3], предложена в работе Муравлева А. В. «Построение материальных функций некоторых двузвенных процессов в экспериментах с толстой трубкой». М., 1989. 13 с. — Деп. в ВИНИТИ 23.01.89, № 540.

Тогда для ненулевых компонент тензора деформации ε получим выражения

$$\varepsilon_{rr} = -\tfrac{1}{2}\Delta L(t)/L - C(t)/r^2, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = -\tfrac{1}{2}\Delta L(t)/L + C(t)/r^2 \tag{3}$$

$$\varepsilon_{z\varphi} = \tfrac{1}{2}\psi(t)\, r/L, \quad \varepsilon_{zz} = \Delta L(t)/L$$

Выражая параметры $L(t)$, $\psi(t)$, $C(t)$ через регистрируемые в эксперименте величины $\varepsilon(t)$, $\gamma(t)$, $\chi(t)$ деформаций на наружной поверхности образца

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{zz}, \quad \gamma(t) = 2\varepsilon_{\varphi z}|_{r=R_2}, \quad \chi(t) = \varepsilon_{\varphi\varphi}|_{r=R_2} \tag{4}$$

получим

$$\varepsilon_{rr} = -\varepsilon(t)/2 - [\varepsilon(t)/2 + \chi(t)]\,(R_2/r)^2$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = -\varepsilon(t)/2 + [\varepsilon(t)/2 + \chi(t)]\,(R_2/r)^2 \tag{5}$$

$$\varepsilon_{z\varphi} = \tfrac{1}{2}\gamma(t)\, r/R_2, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon(t)$$

Таким образом, процесс деформации $\Pi_{r_0}(\varepsilon_{ij}(\tau))$ в любой точке r_0 (в том числе и регистрируемый процесс $\Pi_{R_2}(\varepsilon_{ij}(\tau))$) однозначно определяет весь пучок процессов деформации $\Pi_r(\varepsilon_{ij}(\tau))$, реализуемых в образце.

Ненулевые компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}(r, t)$ удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{\partial}{\partial r}\sigma_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0 \tag{6}$$

граничным условиям

$$\sigma_{rr}|_{r=R_1} = -q_1, \quad \sigma_{rr}|_{r=R_2} = -q_2 \tag{7}$$

к двум интегральным уравнениям, включающим величины регистрируемых в эксперименте параметров P, M и q_i:

$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{zz} r\, dr = P + \pi q_1 R_1^2 - \pi q_2 R_2^2 \tag{8}$$

$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{z\varphi} r^2 dr = M \tag{9}$$

Слагаемые в (8), содержащие q_i, представляют дополнительное осевое усилие, вызванное внутренним давлением q_1 на заглушки образца и внешним гидростатическим давлением q_2.

Кинематические и статические параметры нагружения $\varepsilon(t)$, $\gamma(t)$, $\chi(t)$, $P(t)$, $M(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$ не являются независимыми. Полагая, что полная система нагрузок однозначно определяет процесс деформации в образце, заключаем, что управляющих параметров не может быть больше четырех. Отметим, что в том случае, когда сдвиговые свойства материала не зависят от гидростатического давления, напряженное состояние в образце определяется только тремя из них. В соответствии с постулатом макрофизической определимости (общий постулат изотропии) [3] в этом случае девиатор напряжений S: $S_{ij}(r, t) = \sigma_{ij}(r, t) - \sigma(r, t)\,\delta_{ij}$, $\sigma = \tfrac{1}{3}\sigma_{kk}$ является функционалом тензора деформаций, что с учетом соотношений (5) позволяет записать

$$S_{ij}(r, t) = F_{ij}(r; \varepsilon(\tau), \gamma(\tau), \chi(\tau)), \quad t_0 \le \tau \le t \tag{10}$$

Интегрируя уравнение (6) с граничными условиями (7), получим представление для параметра $q = -q_2 + q_1$:

$$q(t) = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} dr \tag{11}$$

Покажем, что параметры P, M, q выражаются только через параметры ε, γ и χ. Для этого докажем энергетическое тождество

$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} S_{ij} \delta\varepsilon_{ij} r dr = \overline{P}\delta\varepsilon + \overline{M}\delta\gamma + \overline{q}\delta\chi \tag{12}$$

в котором

$$\overline{P} = P + Q_1 - Q_2 + q_1 S, \ \overline{M} = M/R_2$$

$$\overline{q} = q 2\pi R_2^2, \ Q_\alpha = q_\alpha \pi R_\alpha^2, \ S = \pi (R_2^2 - R_1^2) \tag{13}$$

Предварительно с использованием соотношений (5) запишем

$$\int_{R_1}^{R_2} (\sigma_{rr}\delta\varepsilon_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}\delta\varepsilon_{\varphi\varphi}) r dr = -\frac{\delta\varepsilon}{2} \int_{R_1}^{R_2} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) r dr -$$

$$-\left(\frac{1}{2}\delta\varepsilon + \delta\chi\right) \int_{R_1}^{R_2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \frac{R_2^2}{r^2} r dr \tag{14}$$

В правой части этого равенства второй интеграл может быть выражен через q_i согласно (11), а первый — с помощью следующего преобразования:

$$\int_{R_1}^{R_2} \sigma_{rr} r dr = \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} \left[\frac{\partial(\sigma_{rr} r^2)}{\partial r} - \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} r^2\right] dr =$$

$$= \frac{1}{2} Q + \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) r dr$$

$$\int_{R_1}^{R_2} (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) r dr = Q \equiv -q_2 R_2^2 + q_1 R_1^2 \tag{15}$$

Складывая умноженное на $\delta\varepsilon$ выражение (8); умноженное на 2π выражение (14), правая часть которого выражена через q_i по формулам (11) и (15), и выражение $2\pi \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{z\varphi} 2\delta\varepsilon_{z\varphi} r dr = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{z\varphi} \frac{\delta\gamma}{R_2} r^2 dr = M\delta\gamma/R_2$, приходим к тождеству (12). Левая (а, значит, и правая) часть тождества является функционалом только процесса $\Pi(\varepsilon(\tau), \gamma(\tau), \chi(\tau))$. Отсюда ввиду произвольности продолжения $\delta\Pi(\delta\varepsilon, \delta\gamma, \delta\chi)$ получаем требуемый результат

$$\overline{R} = \overline{R}(\Pi), \ \overline{R} \equiv (\overline{P}, M, q), \ \Pi = \Pi(\varepsilon(\tau), \gamma(\tau), \chi(\tau)), \ t_0 \le \tau \le t \tag{16}$$

Обобщенным силам $\overline{P}, \overline{M}, \overline{q}$ можно сопоставить девиатор Σ_{ij}, имеющий размерность напряжения, по формулам

$$\Sigma_{zz} = (\overline{P} - \Sigma)/S, \ \Sigma_{rr} = -\Sigma/S, \ \Sigma_{\varphi\varphi} = (\overline{q} - \Sigma)/S \tag{17}$$

$$\Sigma_{z\varphi} = \overline{M}/S, \ \Sigma = (\overline{P} + \overline{q})/3$$

Если ввести тензор $\overline{\varepsilon}_{ij}$ с соответствующими компонентами ε, $-(\varepsilon + \chi)$, χ, γ, равенство (12) приобретет форму теоремы о среднем значении

$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} S_{ij} \delta\varepsilon_{ij} r dr = S\Sigma_{ij}\delta\overline{\varepsilon}_{ij}|_{r=R_2} \tag{18}$$

В случае сплошного образца ($R_1 = 0$) имеем в соотношениях (5) $C \equiv 0$, т. е. $\chi = -\varepsilon/2$; в выражениях (13), (17) следует положить $q_1 = 0$, $\overline{q} = 0$.

Полагая, что определяющие соотношения материала разрешимы относительно деформаций, естественно потребовать разрешимости соотношений (16) относительно процесса П или любой другой тройки управляющих параметров, в частности,

$$\overline{P} = \overline{P}(\varepsilon, \gamma, q),\ M = M(\varepsilon, \gamma, q),\ \chi = \chi(\varepsilon, \gamma, q) \tag{19}$$

Тот факт, что давления q_i входят в (19) только в виде их разности q, будет использовано далее при формулировке конкретных методик. В дальнейшем будем говорить только о кинематических программах нагружения $\Pi = \Pi(\varepsilon, \gamma, \chi)$, подразумевая при этом программы $\Pi = \Pi(\varepsilon, \gamma, \chi(\varepsilon, \gamma, q))$, которые могут быть осуществлены в реальном эксперименте.

Обратимся к методике расшифровки результатов трехосного (P, M, q) — нагружения толстостенного или сплошного (при $q_1 = 0$) образца. Задача определения полного тензора напряжений $\sigma_{ij}(r, t)$, отвечающего процессу деформации $\Pi_r = \Pi_r(\varepsilon_{ij}(r, \tau))$, сводится к решению уравнений (6), (8), (9) с граничными условиями (7). Известно, что для некорректных задач такого типа не существует эффективных методов решения. Отметим те немногочисленные случаи, когда расшифровка эксперимента все же возможна: тонкостенный трубчатый образец при произвольном процессе деформации П (в этом случае напряженное состояние в трубке с точностью до H ($H = (R_2 - R_1)/R_2$ — безразмерная толщина) можно считать однородным $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t)$); тривиальный случай однородного напряженного состояния при нагружении образца только осевой силой P; нагружение образца крутящим моментом; два класса процессов деформации $\Pi = \Pi_\gamma(\varepsilon, \gamma)$ или $\Pi = \Pi_\chi(\varepsilon, \chi)$, когда траектории деформации представляют собой двузвенные ломанные с ортогональным изломом (первое звено — осевая деформация); при этом после точки излома $\sigma_{ij}(r, t)$ представляют собой функции, соответственно, γ или χ. Во всех остальных случаях расшифровка результатов испытаний требует проведения двух согласованных друг с другом экспериментов. Соответствующая методика, предлагаемая ниже, основывается на возможности при различных значениях управляющих параметров реализовать один и тот же пучок процессов деформации в двух образцах, за исключением областей малой толщины, прилегающих к поверхностям образцов.

Введем понятие энергетической эквивалентности процессов в двух образцах, или, сокращенно, энергетической эквивалентности образцов $(\alpha) \overset{e}{\sim} (\beta)$. Будем называть два образца (α) и (β) энергетически эквивалентными, если выполнены условия: граничные процессы $\Pi^\alpha_{\mathcal{P}}(\varepsilon^\alpha, \gamma^\alpha, \chi^\alpha)$ и $\Pi^\beta_{\mathcal{P}}(\varepsilon^\beta, \gamma^\beta, \chi^\beta)$, отвечающие значениям $r^\alpha = R_2^\alpha$ и $r^\beta = R_2^\beta$, $r^\alpha = R_1^\alpha$ и $r^\beta = R_1^\beta$, совпадают. Энергетическая эквивалентность образцов обеспечивается построением однозначного соответствия, по которому каждой точке r^α образца (α) отвечает некоторая точка r^β образца (β) с тем же самым процессом деформации $\Pi(\varepsilon_{ij}(\tau))$; это соответствие задается формулой:

$$r^\beta = r^\alpha R_2^\beta / R_2^\alpha \tag{20}$$

Действительно, по условию $\varepsilon^\alpha = \varepsilon^\beta$, $\gamma^\alpha = \gamma^\beta$ и $\chi^\alpha = \chi^\beta$; тогда с учетом соотношения (20) из выражений (5) сразу следует $\varepsilon^\alpha_{\varphi\varphi}(r^\alpha) = \varepsilon^\beta_{\varphi\varphi}(r^\beta)$, $\varepsilon^\alpha_{rr}(r^\alpha) = \varepsilon^\beta_{rr}(r^\beta)$, $\varepsilon^\alpha_{z\varphi}(r^\alpha) = \varepsilon^\beta_{z\varphi}(r^\beta)$. Подставляя в (20) $r = R_1$, получаем связь между геометрическими размерами энергетически эквивалентных образцов

$$R_1^\beta / R_2^\beta = R_1^\alpha / R_2^\alpha = k \tag{21}$$

Параметр $k = 1 - H$ назовем приведенной толщиной образца. Таким образом, если $(\alpha) \overset{e}{\sim} (\beta)$, то $k^\alpha = k^\beta$.

Можно сформулировать очевидное следствие: если два образца (α) и (β) испытаны по одной и той же программе $\Pi(\varepsilon, \gamma, \chi)$ и $k^\alpha = k^\beta$, то $(\alpha) \overset{e}{\sim} (\beta)$.

Сформулируем некоторые утверждения для энергетически эквивалентных образцов:

1. Если $(\alpha) \overset{e}{\sim} (\beta)$, то $P^{v\alpha} = P^{v\beta}$, $M^{v\alpha} = M^{v\beta}$, $q^{v\alpha} = q^{v\beta}$; $P^v = \overline{P}/S$, $M^v = \overline{M}/S$, $q^v = \overline{q}/S$. Докажем, например, первое утверждение, используя соотношение (20):

$$P^{v\alpha} = \frac{2}{(R_2^\alpha)^2 - (R_1^\alpha)^2} \int_{R_1^\alpha}^{R_2^\alpha} (\sigma_{zz}^\alpha + q_1^\alpha)\, rdr =$$

$$= \frac{2}{(R_2^\beta)^2 - (R_1^\beta)^2} \int_{R_1^\beta}^{R_2^\beta} (\sigma_{zz}^\beta + q_1^\beta)\, rdr = P^{v\beta}$$

2. Если $(\alpha) \overset{e}{\sim} (\beta)$, то справедливо:

$$\overline{P}^\alpha/\overline{P}^\beta = (R_2^\alpha/R_2^\beta)^2 = (R_1^\alpha/R_1^\beta)^2 = k^2$$

$$M^\alpha/M^\beta = k^3, \quad q^\alpha = q^\beta \tag{22}$$

Исходя из (18), легко понять происхождение термина «энергетическая эквивалентность»: мощность в единице объема образца в таких образцах одинакова.

3. Все сплошные образцы, испытанные по одинаковой программе, энергетически эквивалентны.

Пример. Рассмотрим двухосное (P, M) — нагружение сплошных цилиндрических образцов (α) и (β) с $R_2^\beta = R_2^\alpha (1 + h)$, $0 < h \ll 1$ по программам $\Pi^\alpha = \Pi(\varepsilon, \gamma)$ и $\Pi^\beta = \Pi(\varepsilon, \gamma(1 + h))$. В этом случае часть образца (β), обозначаемая (β') и определяемая как $0 \le r \le R_2^\alpha$, представляет собой виртуальный образец, нагружаемый по программе Π^α и, следовательно, энергетически эквивалентный образцу (α).

Учитывая, что $\overline{P}^\beta = 2\pi \int_{R_1^\beta}^{R_2^\beta} \sigma_{zz}^\beta rdr = \overline{P}^{\beta'} + 2\pi \int_{R_2^\alpha}^{R_2^\beta} \sigma_{zz}^\beta rdr$ для $\Delta\overline{P} = \overline{P}^\beta - \overline{P}^\alpha$ получаем $\Delta\overline{P} = 2\pi\sigma_{zz}^\beta (R_2^\alpha)^2 h + o(h)$.

Проводя аналогичные преобразования для M^β и M^α, окончательно получаем известные формулы для расшифровки результатов экспериментов со стандартной условной трубкой

$$\sigma_{zz} = \Delta\overline{P}/(2\pi R^2 h), \quad \sigma_{z\varphi} = \Delta M/(2\pi R^3 h) \tag{23}$$

Рассмотрим теперь задачу о расшифровке напряженного состояния в толстостенном трубчатом образце при полной системе нагрузок (P, M, q) — эксперимент с обобщенной условной трубкой. Пусть два образца (α) и (β), $k^\alpha/k^\beta = 1 + h$, $0 < h \ll 1$ нагружаются по программам $\Pi^\alpha = \Pi^\alpha(\varepsilon^\alpha, \gamma^\alpha, \chi^\alpha)$ и $\Pi^\beta = \Pi^\beta(\varepsilon^\beta, \gamma^\beta, \chi^\beta)$ таким, что

$$\varepsilon^\alpha = \varepsilon^\beta, \; \gamma^\beta = \gamma^\alpha (1 + h) \tag{24}$$

$$\chi^\beta = \chi^\alpha (1 - 2h) - \varepsilon^\alpha h + o(h), \quad q^\beta = q^\alpha + \Delta q$$

Без ограничения общности внутренние или внешние радиусы у образцов можно считать одинаковыми. Пусть, например, $R_1^\alpha = R_1^\beta$; тогда $R_2^\beta = R_2^\alpha (1 + h)$. В соответствии с программами (24) внутри образца (β) образован виртуальный образец (β'), энергетически эквивалентный образцу (α), причем $R_1^{\beta'} = R_1^\alpha$, $R_2^{\beta'} = R_2^\alpha$. У этих образцов

$$\overline{P}^{\beta'} = \overline{P}^\alpha, \; M^{\beta'} = M^\alpha, \; q^{\beta'} = q^\alpha$$

$$\overline{P}^\beta = 2\pi \int_{R_1^\beta}^{R_2^\beta} (\sigma_{zz}^\beta + q_1^\beta)\, rdr = \overline{P}^{\beta'} + 2\pi \int_{R_2^\alpha}^{R_2^\beta} (\sigma_{zz}^\beta + q_1^\beta)\, rdr$$

$$M^{\beta} = 2\pi \int_{R_1^{\beta}}^{R_2^{\beta}} \sigma^{\beta}_{z\varphi} r^2 dr = M^{\beta'} + 2\pi \int_{R_2^{\alpha}}^{R_2^{\beta}} \sigma^{\beta}_{z\varphi} r^2 dr$$

$$\Delta q = \int_{R_2^{\alpha}}^{R_2^{\beta}} \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{r} dr$$

откуда находим формулы, подобные формулам для тонкостенной трубки при данном виде нагружения (с точностью $O(h)$):

$$\sigma_{zz} = \Delta\overline{P}/(2\pi R_2^2 h) - q_1, \quad \sigma_{z\varphi} = \Delta M/(2\pi R_2^3 h) \tag{25}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \Delta q/h - q_2, \quad \sigma_{rr} = -q_2$$

По процедуре, аналогичной описанной выше, может быть определено напряженное состояние в образце на внутренней границе.

Когда отношение $k^{\alpha}/k^{\beta} = 1$, методика условной трубки непосредственно не применима. Этот случай будем называть вырожденной условной трубкой.

Рассмотрим сначала два одинаковых сплошных образца (α) и (β) радиуса R в условиях (P, M, q) — нагружения, по программам Π^{α} и Π^{β} таким, что $\varepsilon^{\alpha} = \varepsilon^{\beta}$, $\gamma^{\beta} = \gamma^{\alpha}(1 + h)$, $q_2^{\alpha} = q_2^{\beta}$. При этом в образце ($\beta$) появляется виртуальный образец (β'), $R^{\beta'} = R(1 - h)$ такой, что $(\beta') \overset{c}{\sim} (\alpha)$. В силу соотношений (22) имеем

$$\overline{P}^{\beta'} = \overline{P}^{\alpha}(1 - h)^2 = \overline{P}^{\alpha} - 2h\overline{P}^{\alpha} + o(h) \tag{26}$$

$$M^{\beta'} = M^{\alpha}(1 - h)^3 = M^{\alpha} - 3hM^{\alpha} + o(h)$$

$$\overline{P}^{\beta} - \overline{P}^{\alpha} \equiv \Delta\overline{P} = 2\pi \int_{R(1-h)}^{R} \sigma^{\beta}_{zz} r dr - 2h\overline{P}^{\alpha} + o(h)$$

$$M^{\beta} - M^{\alpha} \equiv \Delta M = 2\pi \int_{R(1-h)}^{R} \sigma^{\beta}_{z\varphi} r^2 dr - 3hM^{\alpha} + o(h)$$

$$\sigma_{zz}(\Pi) = \Delta\overline{P}/(2\pi R^2 h) + 2\overline{P}/(2\pi R^2) + o(h)$$

$$\sigma_{z\varphi}(\Pi) = \Delta M/(2\pi R^3 h) + 3M/(2\pi R^3) + o(h)$$

$$\sigma_{rr}(\Pi) = \sigma_{\varphi\varphi}(\Pi) = -q_2$$

В выражениях для напряжений виртуальный параметр h удобно заменить на измеряемый параметр $\Delta\gamma = \gamma^{\beta} - \gamma^{\alpha}$, учитывая, что

$$h = \Delta\gamma/\gamma^{\alpha} \tag{27}$$

Подставляя (27) в (26), окончательно получим

$$\sigma_{zz}(\Pi) = \frac{1}{2\pi R^2}\left(\gamma \frac{\Delta\overline{P}}{\Delta\gamma} + 2\overline{P}\right), \quad \sigma_{z\varphi}(\Pi) = \frac{1}{2\pi R^3}\left(\gamma \frac{\Delta M}{\Delta\gamma} + 3M\right)$$

$$\sigma_{rr}(\Pi) = \sigma_{\varphi\varphi}(\Pi) = -q_2 \tag{28}$$

Если сплошные образцы (α) и (β) имеют различные радиусы $R^{\alpha}/R^{\beta} = m$, то формулы (28) сохраняют силу при замене $R = R^{\alpha}$, $\Delta\overline{P} = m^2\overline{P}^{\beta} - \overline{P}^{\alpha}$, $\Delta M = m^3 M^{\beta} - M^{\alpha}$.

Пусть теперь имеются два трубчатых образца (α) и (β) с равными значениями параметров $k^{\alpha} = k^{\beta} = k$, испытываемые по полной программе (P, M, q_1, q_2). Без потерь общности будем считать, что образцы имеют одинаковые размеры R_1 и R_2. Пусть программы испытаний Π^{α} и Π^{β} задаются в виде $\varepsilon^{\beta} = \varepsilon^{\alpha}$, $\gamma^{\beta} = \gamma^{\alpha}(1 - h)$, $\chi^{\beta} = \chi^{\alpha} + 2h\chi^{\alpha} + h\varepsilon^{\alpha} + o(h)$, $q^{\beta} = q^{\alpha} + \Delta q$.

При этом в образцах (α) и (β) возникают виртуальные образцы (α') и (β'), так что (α') $\overset{e}{\sim}$ (β') с размерами $R_1^{\alpha'} = R_1$, $R_2^{\alpha'} = R_2'$, $R_1^{\beta'} = R_1'$, $R_2^{\beta'} = R_2$, причем $R_1' = R_1(1+h)$, $R_2' = R_2(1-h)$. Тогда имеем

$$\overline{P}^{\beta'} = \overline{P}^{\alpha'}(1+h)^2 = \overline{P}^{\alpha} + 2h\overline{P}^{\alpha} + o(h) \tag{29}$$

Учитывая, что

$$\overline{P}^{\beta} = 2\pi\int_{R_1}^{R_2}(\sigma_{zz}^{\beta} + q_1^{\beta})\,r\,dr = 2\pi\int_{R_1}^{R_1'}(\sigma_{zz}^{\beta} + q_1^{\beta})\,r\,dr + \overline{P}^{\beta'}$$

$$\overline{P}^{\alpha} = \overline{P}^{\alpha'} + 2\pi\int_{R_2'}^{R_2}(\sigma_{zz}^{\alpha} + q_1^{\alpha})\,r\,dr$$

имеем для $\Delta\overline{P} = \overline{P}^{\beta} - \overline{P}^{\alpha}$:

$$\Delta\overline{P} = 2\pi R_1^3 h(\sigma_{zz}(\Pi') + q_1) + 2h\overline{P} - 2\pi R_2^2 h(\sigma_{zz}(\Pi) + q_1)$$

Аналогично найдем

$$\Delta M = 2\pi R_1^3 h\sigma_{z\varphi}(\Pi') + 3hM - 2\pi R_2^3 h\sigma_{z\varphi}(\Pi)$$

$$\Delta q = \int_{R_2'}^{R_2}\frac{\sigma_{rr}^{\alpha} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\alpha}}{r}\,dr - \int_{R_1}^{R_1'}\frac{\sigma_{rr}^{\beta} - \sigma_{\varphi\varphi}^{\beta}}{r}\,dr =$$

$$= [-q_2 + q_1 - \sigma_{\varphi\varphi}(\Pi) + \sigma_{\varphi\varphi}(\Pi')]\,h$$

Здесь Π' — процесс деформации на внутренней границе образца такой, что $\Pi' = (\varepsilon, \gamma/k, -\varepsilon/2 + (\chi + \varepsilon/2)k^2)$. Окончательно найдем

$$\sigma_{zz}(\Pi') = \left(\frac{1}{k}\right)^2(\sigma_{zz}(\Pi) + q_1) - q_1 + \frac{\Delta\overline{P}}{2\pi R_1^2 h} - \frac{2\overline{P}}{2\pi R_1^2} \tag{30}$$

$$\sigma_{z\varphi}(\Pi') = \left(\frac{1}{k}\right)^3\sigma_{z\varphi}(\Pi) + \frac{\Delta M}{2\pi R_1^3 h} - \frac{3M}{2\pi R_1^3}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\Pi') = \sigma_{\varphi\varphi}(\Pi) + \frac{\Delta q}{h} + q,\quad \sigma_{rr}(\Pi') = -q_1,\quad \sigma_{rr}(\Pi) = -q_2$$

Виртуальный параметр h иногда удобно выразить через значения $\Delta\gamma = \gamma^{\beta} - \gamma^{\alpha}$ или $\Delta\chi = \chi^{\beta} - \chi^{\alpha}$. С учетом этой замены соотношения (30) примут вид

$$\sigma_{zz}(\Pi') = \left(\frac{1}{k}\right)^2\sigma_{zz}(\Pi) - q_1\frac{k^2-1}{k^2} - \left(\gamma\frac{\Delta\overline{P}}{\Delta\gamma} + 2\overline{P}\right)\frac{1}{2\pi R_1^2}$$

$$\sigma_{z\varphi}(\Pi') = \left(\frac{1}{k}\right)^3\sigma_{z\varphi}(\Pi) - \left(\gamma\frac{\Delta M}{\Delta\gamma} + 3M\right)\frac{1}{2\pi R_1^3} \tag{31}$$

Отметим, что хотя полученные формулы в общем случае не позволяют определить напряженное состояние в образце только из двух экспериментов, они могут оказаться эффективными для расшифровки некоторых частных процессов нагружения. В качестве примера рассмотрим процессы деформации в виде двузвенников с ортогональным изломом в плоскостях (ε, γ) или (ε, χ), упомянутые выше. В предположении склерономности свойств материала для расшифровки напряженного состояния в образце требуется только один эксперимент. Действительно, вырожденную условную трубку при (α') $\overset{e}{\sim}$ (β') в этом случае составляют два любых смежных по параметру нагружения состояния образца, характеризуемых приращениями $\Delta\gamma'$ или $\Delta\chi'$; соответственно, можно показать, что справедливо свойство инвариантности приращений $\Delta\gamma = \gamma^{\beta} -$

$- \gamma^\alpha = \Delta\gamma'$, $\Delta\chi = \chi^\beta - \chi^\alpha = \Delta\chi'$. Последнее вместе с (31) приводит к формулам, аналогичным предложенным в цитированной работе А. В. Муравлева (см. сноску с. 177), которые вместе с описанной там же рекуррентной процедурой определяют полный тензор напряжений.

Все рассмотренные выше методики условных трубок предполагают проведение двух согласованных экспериментов. При экспериментальном исследовании определяющих соотношений и критериев разрушения обычно приходится проводить серию экспериментов, в которых реализуются процессы из определенного класса (семейства траекторий деформаций в виде двузвенных ломанных, многозвенных ломанных, постоянной кривизны и т. д.). Отметим, что для практически важного класса однопараметрических траекторий деформаций для реализации N траекторий деформаций по методу условной трубки требуется проведение $(N+1)$ эксперимента. В качестве примера укажем семейство плоских процессов $\Pi(\varepsilon(\tau), \gamma(\tau), a_i) = \Pi_i(\varepsilon_i(\tau), \gamma_i(\tau))$ таких, что $\varepsilon_i(\tau) = \varepsilon(\tau)$, $\gamma_i(\tau) = a_i\gamma(\tau)$, где a_i — числовой параметр, задающий конкретный процесс из заданного семейства, форма которого определяется процессом Π_0. В частности, если Π представляет собой двузвенную ломанную с углом излома $0 < \vartheta_0 < \pi/2$, семейство Π_i составляет весь «веер» двузвенных ломанных с углами излома $\vartheta_0 \leq \vartheta < \pi/2$. Первую условную трубку образуют процессы Π_0 и Π_1, вторую — Π_1 и Π_2 и так далее.

Предложенный подход накладывает слабые ограничения на свойства исследуемых материалов и допускает естественное обобщение на случай конечных деформаций. Он применим в экспериментальных исследованиях с большими давлениями; для него может быть сформулирован итерационный процесс, позволяющий учесть (в тех случаях, когда это существенно) сжимаемость материала.

В заключение следует оговорить, что предлагаемый подход имеет те же ограничения при исследовании тонких эффектов (типа «зуба текучести» на диаграмме деформирования), что и аналогичные методики, требующие дифференцирования экспериментальных кривых, например, методика построения диаграммы сдвига из эксперимента на кручение сплошного образца.

Работа выполнена при финансовой поддержке Конкурсного центра при Санкт-Петербургском государственном университете (шифр проекта 2.41.2.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 1. М.: ИЛ, 1954. 648 с.
2. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
3. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. 3-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
4. *Максак В. И., Дощинский Г. А.* Методика и исследование больших пластических деформаций при простом нагружении//Изв. Томск. политехн. ин-та. 1970. Т. 173. С. 3—9.
5. *Максак В. И., Дощинский Г. А.* Исследование больших пластических деформаций при сложном нагружении//Изв. Томск. политехн. ин-та. 1970. Т. 173. С. 10—12.

Москва

Поступила в редакцию
27.XII.1993