МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1994

УДК 539.3

© 1994 г. Я. И. БУРАК, Ю. Д. ЗОЗУЛЯК, Т. С. НАГИРНЫЙ

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ В ЛОКАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ ТЕРМОМЕХАНИКЕ

Предлагается математическая модель термодинамического описания механических и тепловых процессов в упругих телах. В определяющих уравнениях модели учитываются градиентные характеристики полей деформации, температуры и химического потенциала. В такой формулировке задач термоупругости имеется возможность исследовать в трехмерной постановке приповерхностные и приконтактные особенности напряженного состояния, что иллюстрируется на конкретных модельных задачах. Обсуждаются общие вопросы математической постановки задач оптимизации напряженно-деформируемого состояния термоупругих тел и основные принципы соответствующих критериев оптимизации.

1. Локально-градиентный подход. При термодинамическом описании физически малой подсистемы термоупругого тела в качестве параметров состояния принимают, обычно [1, 2], энтропию s (температуру T) и тензор деформации $\mathbf{e}$ (тензор напряжений σ), а для открытых систем, дополнительно [3, 4] — плотность массы ρ (химический потенциал η). Значительный научный и практический интерес представляет распространение такого подхода на системы, в которых, наряду с выше перечисленными параметрами учитываются характеристики градиентности механических и тепловых полей.

Рассматривается термоупругое твердое тело, которое находится под воздействием внешних силовых (поверхностных и объемных) нагрузок в условиях теплообмена с внешней средой. Определяющими процессами являются процессы деформирования и теплопроводности. Для плотности полной энергии E_0 имеет место уравнение сохранения в виде [5]

$$\partial E_0/\partial\tau = -\nabla\cdot\mathbf{J}_E^\circ + w_E^\circ \tag{1.1}$$

где ∇ — оператор Гамильтона; $\mathbf{J}_E^\circ$ и w_E° — поток энергии и плотность мощности источников энергии, которые включают составляющие связанные с тепломассопереносом, работой поверхностных и объемных сил на перемещениях точек тела, а также работой внутренних сил, т. е.

$$\mathbf{J}_E^\circ = T\mathbf{J}_s^\circ + \eta\mathbf{J}_m^\circ - \sigma_0\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tau} - \mathbf{q}_0\cdot\frac{\partial\mathbf{e}_0}{\partial\tau}$$

$$w_E^\circ = \mathbf{f}_0\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tau} + \mathbf{p}_0\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\tau} + w^\circ \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{J}_s^\circ$, $\mathbf{J}_m^\circ$ — потоки энтропии и массы; $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — векторы перемещения и скорости; $\mathbf{q}_0$ — тензор внутренних сил, обусловленных градиентностью деформации в физически малой подсистеме; $\mathbf{p}_0$ — импульс поступательного механического движения, который принимается равным $\rho_0\mathbf{v}$; $\mathbf{f}_0$ — вектор плотности массовых сил; w° — плотность источников тепла; τ — время. Здесь и далее индекс нуль указывает на то, что базовые аддитивные параметры нормированы относительно метрических характеристик физически малой подсистемы в начальный момент времени. Они связаны с величинами, введенным относительно актуальной геометрической конфигурации соотношениями

$$\{s_0,\ \rho_0,\ \sigma_s^\circ\}\, dV_0 = \{s,\ \rho,\ \sigma_s\}\, dV,\quad \mathbf{n}_0\cdot\{\mathbf{J}_s^\circ,\ \mathbf{J}_m^\circ,\ \sigma_0\}\, d\Sigma_0 = \mathbf{n}\cdot\{\mathbf{J}_s,\ \mathbf{J}_m,\ \sigma\}\, d\Sigma \quad (1.3)$$

где dV, $d\Sigma$ и dV_0, $d\Sigma_0$ — объем и площадь поверхности элементарной области выделенной подсистемы в актуальный и начальный моменты времени; $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_0$ — внешние нормали к поверхностям $(d\Sigma)$ и $(d\Sigma_0)$ соответственно.

Принимая

$$L_0 = E_0 - \mathbf{p}_0\cdot\mathbf{v} \quad (1.4)$$

уравнение баланса энергии (1.1) преобразуем к виду

$$\frac{\partial L_0}{\partial\tau} = T\frac{\partial s_0}{\partial\tau} + \eta\frac{\partial\rho_0}{\partial\tau} + (\sigma_0+\nabla\cdot\mathbf{q}_0)\cdot\frac{\partial\mathbf{e}_0}{\partial\tau} + \mathbf{q}_0\cdot\frac{\partial\varkappa_0}{\partial\tau} - T\left(\frac{\partial s_0}{\partial\tau}+\nabla\cdot\mathbf{J}_s^\circ - \frac{w^\circ}{T} - \sigma_s^\circ\right) -$$

$$(1.5)$$

$$-\eta\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial\tau}+\nabla\cdot\mathbf{J}_m^\circ\right) + \mathbf{v}\cdot\left(-\frac{\partial\mathbf{p}_0}{\partial\tau}+\nabla\cdot\sigma_0+\mathbf{f}_0\right) + (-\nabla T)\cdot\mathbf{J}_s^\circ + (-\nabla\eta)\cdot\mathbf{J}_m^\circ - T\sigma_s^\circ$$

Здесь $\varkappa_0$ — тензор градиентности деформации, который определяется через тензор деформации $\mathbf{e}_0$ соотношением

$$\varkappa_0 = \mathbf{e}_0\otimes\nabla \equiv \frac{\partial\mathbf{e}_0}{\partial\xi^i}\otimes\mathbf{э}_0^i \quad (1.6)$$

где $\mathbf{э}_0^i$ — контравариантные базисные орты лагранжевой системы координат, σ_s° — производство энтропии, ξ^i — лагранжевы координаты (по индексу i проводится суммирование от 1 до 3), $\otimes$ — диадное произведение. Отметим также, что

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{u}\otimes\nabla \equiv \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\xi^i}\otimes\mathbf{э}_0^i \quad (1.7)$$

Векторы $\mathbf{J}_s^\circ$, $\mathbf{J}_m^\circ$ представим в виде суммы «упругой» и диссипативной составляющих [6]:

$$\mathbf{J}_s^\circ = -\partial\Pi_s^\circ/\partial\tau + \mathbf{J}_{s0}^d,\quad \mathbf{J}_m^\circ = -\partial\Pi_m^\circ/\partial\tau + \mathbf{J}_{m0}^d \quad (1.8)$$

В рамках рассматриваемой модели термоупругого тела принимаем, что диссипация энергии обусловлена только процессом теплопроводности. Следовательно

$$d\sigma_s^\circ = \mathbf{F}_s^\circ\cdot\mathbf{J}_{s0}^a,\quad \mathbf{J}_{m0}^d = 0 \quad (1.9)$$

где $\mathbf{F}_s^\circ$ — термодинамическая сила, сопряженная необратимой составляющей $\mathbf{J}_{s0}^d$ потока энтропии

$$\mathbf{F}_s^\circ = -\nabla T/T \quad (1.10)$$

С учетом соотношений (1.7)—(1.9), уравнение баланса энергии (1.1) приобретает вид

$$\frac{\partial L_0}{\partial\tau} = T\frac{\partial s_0}{\partial\tau} + \eta\frac{\partial\rho_0}{\partial\tau} + (-\nabla T)\cdot\frac{\partial\Pi_s^\circ}{\partial\tau} + (-\nabla\eta)\cdot\frac{\partial\Pi_m^\circ}{\partial\tau} + (\sigma_0+\nabla\cdot\mathbf{q}_0)\cdot\frac{\partial\mathbf{e}_0}{\partial\tau} + \mathbf{q}_0\cdot\frac{\partial\varkappa_0}{\partial\tau} -$$

$$-T\left(\frac{\partial s_0}{\partial\tau}+\nabla\cdot\mathbf{J}_s^\circ - \frac{w^\circ}{T} - \sigma_s^\circ\right) - \eta\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial\tau}+\nabla\cdot\mathbf{J}_m^\circ\right) -$$

$$-\mathbf{v}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{p}_0}{\partial\tau} - \nabla\cdot\sigma_0 - \mathbf{f}_0\right) \quad (1.11)$$

В силу балансовых уравнений для энтропии, массы и импульса [7]

$$\partial s_0/\partial\tau = -\nabla\cdot\mathbf{J}_s^\circ + w^\circ/T + \sigma_s^\circ,\quad \partial\rho_0/\partial\tau = -\nabla\cdot\mathbf{J}_m^\circ$$

$$\partial \rho_0/\partial \tau = \nabla \cdot \sigma_0 + \mathbf{f}_0 \qquad (1.12)$$

уравнение (1.11) запишется так

$$\frac{\partial L_0}{\partial \tau} = T\frac{\partial s_0}{\partial \tau} + \eta\frac{\partial \rho_0}{\partial \tau} + (\nabla T)\cdot\frac{\partial \mathbf{\Pi}_s^\circ}{\partial \tau} + (\nabla \eta)\cdot\frac{\partial \mathbf{\Pi}_m^\circ}{\partial \tau} +$$

$$+ (\sigma_0 + \nabla\cdot\mathbf{q}_0)\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_0}{\partial \tau} + \mathbf{q}_0\cdot\frac{\partial \varkappa_0}{\partial \tau} \qquad (1.13)$$

Из полученного соотношения следует, что при потенциальном описании локальной ситуации функцией состояния является функция L_0, которая задана на фазовом пространстве параметров состояния s_0, ρ_0, $\mathbf{\Pi}_s^\circ$, $\mathbf{\Pi}_m^\circ$, $\mathbf{e}_0$ и $\varkappa_0$. В этом случае, согласно уравнению (1.13), имеем следующее обобщенное уравнение Гиббса:

$$dL_0 = Tds_0 + \eta d\rho_0 + \nabla T\cdot d\mathbf{\Pi}_s^\circ + \nabla\eta\cdot d\mathbf{\Pi}_m^\circ +$$

$$+ (\sigma_0 + \nabla\cdot\mathbf{q}_0)\cdot d\mathbf{e}_0 + \mathbf{q}_0\cdot d\varkappa_0 \qquad (1.14)$$

которое позволяет устанавливать связи между базисными s_0, ρ_0, $\mathbf{\Pi}_s^\circ$, $\mathbf{\Pi}_m^\circ$, $\mathbf{e}_0$, $\varkappa_0$ и сопряженными T, η, ∇T, $\nabla\eta$, $\sigma_0^* \equiv \sigma_0 + \nabla\cdot\mathbf{q}_0$ параметрами состояния:

$$T = \partial L_0/\partial s_0, \quad \eta = \partial L_0/\partial \rho_0, \quad \nabla T = \partial L_0/\partial \mathbf{\Pi}_s^\circ, \quad \nabla\eta = \partial L_0/\partial \mathbf{\Pi}_m^\circ$$

$$\sigma_0^* = \partial L_0/\partial \mathbf{e}_0, \quad \mathbf{q}_0 = \partial L_0/\partial \varkappa_0 \qquad (1.15)$$

На основании выражения (1.9) для производства энтропии, в рамках теории Онзагера [7, 8] получаем следующую структуру кинетического уравнения модели:

$$\mathbf{J}_{s0}^d = \mathbf{J}_{s0}^d(\mathbf{F}_s^\circ;\ L_0) \qquad (1.16)$$

Зависимость (1.16) должна подчиняться условию

$$\mathbf{J}_{s0}^d(0;\ L_0) = 0 \qquad (1.17)$$

Параметрическая зависимость потока энтропии от функции состояния L_0 в соотношении (1.16) указывает на то, что диссипативные процессы в физически малой подсистеме в общем случае зависят от параметров состояния этой подсистемы.

Для линейной зависимости между термодинамическим потоком $\mathbf{J}_{s0}^d$ и силой $\mathbf{F}_s^\circ$ имеем такое явное выражение

$$\mathbf{J}_{s0}^d = -\lambda_s\nabla T/T \qquad (1.18)$$

где λ_s — кинетический коэффициент (коэффициент теплопроводности).

Для получения замкнутой системы уравнений необходимо дополнительно сконкретизировать соответствующие начальные и граничные условия.

Сформулированная выше система уравнений может быть использована для исследования термомеханических процессов в локально неоднородных системах при высокоградиентном нагружении. Она позволяет также описывать особенности напряженно-деформированного состояния в приповерхностных и приконтактных областях тела [6]. Ниже приведены решения таких задач полученных в изотермической постановке и линейном приближении.

1.1. Приповерхностные явления в слое. Рассматривается свободный от силового нагружения изотропный упругий слой, отнесенный к прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z), который занимает область $0 \le x \le l$. Считаем, что слой выделен из бесконечной среды, химический потенциал которой в естественном состоянии равен M_*. Для времени $\tau > 0$ на поверхностях $x = 0$, $x = l$ слоя поддерживается постоянное значение этого потенциала $\eta = \alpha M_*$ $(\alpha > 0)$, отличное от начального M_*.

Равновесное состояние слоя описывается соотношениями

$$\eta = \alpha M_* + (1 - \alpha) M_* \left[1 - \frac{\operatorname{ch} bl (x/l - 0{,}5)}{\operatorname{ch} (0{,}5\, bl)} \right] \tag{1.19}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = A (1 - \alpha) M_* \frac{\operatorname{ch} bl (x/l - 0{,}5) - 2 (bl) \operatorname{sh} (0{,}5\, bl)}{\operatorname{ch} (0{,}5\, bl)} \tag{1.20}$$

где A, b — постоянные, определяемые характеристиками материала.

Из формулы (1.19) видно, что на поверхностях $x = 0$, $x = l$ упругого слоя приведенный потенциал $m = (\eta - M_*)/[(\alpha - 1) M_*]$ равен единице и уменьшается вглубь тела, достигая своего наименьшего значения на срединной поверхности $x = l/2$. При больших толщинах l $(bl \gg 1)$ значение η на этой поверхности практически равно значению химического потенциала для исходной неограниченной среды.

1.2. Акустическая эмиссия при образовании поверхности. Сформулированную систему уравнений используем для оценки амплитуды механических колебаний, которые возникают при внезапном возникновении свободной поверхности в упругом теле. В качестве модельной задачи рассматривается задача для упругого полупространства $(x \geq 0)$, которое мгновенно выделяется из неограниченной среды, характеризуемой в естественных условиях постоянным химическим потенциалом M_* и плотностью ρ_*. В момент времени $\tau = 0$ в теле мгновенно возникает свободная поверхность $x = 0$, химический потенциал которой принимается постоянным и равным αM_*. В результате, в теле мгновенно устанавливается неоднородное поле химического потенциала, которое индуцирует возникновение упругих волн. Пренебрегая влиянием механических колебаний на химический потенциал, получим

$$\eta = M_* [1 + (\alpha - 1) \exp(-bx)] \tag{1.21}$$

$$\begin{gathered} \sigma_x (x, \tau) = \alpha_m M_* E \frac{\alpha - 1}{1 - 2\nu} \operatorname{sh} (bx) \exp (-bc_1\tau)\, \theta (\tau - x/c_1) \\ \sigma_y (x, \tau) = \alpha_m M_* E \frac{\alpha - 1}{1 - \nu} \left[\frac{\nu}{1 - 2\nu} \operatorname{sh}(bx) \exp(-bc_1\tau)\, \theta (\tau - x/c_1) - \exp(-bx) \right] \end{gathered} \tag{1.22}$$

где E, ν, α_m, c_1 — характеристики материала, $\theta(\zeta)$ — единичная функция Хевисайда.

Из формул (1.22) видно, что фронт сжимающей волны расширения распространяется со скоростью продольной волны c_1. При прохождении через фронт волны напряжения σ_x, σ_y, σ_z претерпевают скачок, величина которого монотонно возрастает от нуля (на поверхности полупространства $x = 0$) к своим предельным значениям

$$[\sigma_x] = \frac{1}{2} \frac{1 - \alpha}{1 - 2\nu} \alpha_m M_* E, \quad [\sigma_y] = [\sigma_z] = \frac{1}{1 - \nu} [\sigma_x] \tag{1.23}$$

2. Критерии оптимизации. Исследования по оптимизации напряженного состояния в термоупругих телах берут свое начало от работ [9—11], в которых сформулирована математическая постановка и методика решения соответствующих неклассического вида экстремальных задач термомеханики об определении оптимальных режимов и схем локального нагрева тонких оболочек и пластин. В качестве критерия оптимизации здесь принимается энергетическая мера напряженного состояния — функционал энергии упругой деформации. Дальнейшее развитие исследований в этой области во многом стимулировано использованием прикладных результатов в инженерной практике построения режимов технологии изготовления и упрочняющей термообработки элементов сварных тонкостенных конструкций и приборов. Полученные научные результаты в этом направлении систематизированы в монографиях [12, 13].

Одним из важных этапов теории оптимизации является выбор критериев. Здесь остановимся на некоторых общих вопросах методики рационального выбора функциональных критериев оптимизации напряженного состояния термоупругих тел. Применительно к механическим системам с распределенными параметрами в качестве критериев оптимизации напряженного состояния, обычно, принимают функциональные критерии вида

$$K_0 = \int_0^{\tau_1} \int_{X_0}^{\tau_1} W_0 \, dV_0 \, d\tau \tag{2.1}$$

где $W_0 = W_0(\sigma_0)$ – плотность локального критерия оптимизации, $X_0 \equiv X(\tau_0)$ – область пространства, занятого телом в начальный момент времени.

Для изотропных тел $W_0(\sigma_0)$ является функцией скалярных инвариантов тензора σ_0:

$$W_0 = W_0(\{I_k^\circ\}) \tag{2.2}$$

В случае симметричного тензора напряжений

$$I_1^\circ = \sigma_{0i}^i, \quad I_2^\circ = \sigma_{0j}^i \sigma_{0i}^j, \quad I_3^\circ = \sigma_{0j}^i \sigma_{0k}^j \sigma_{0i}^k \tag{2.3}$$

В тех задачах оптимизации, в которых требуется обеспечить в теле напряженное состояние, оптимально близкое к заданному, в качестве локального критерия естественно принять

$$W_0 = W_0(\sigma_0^*), \quad \sigma_0^* = \sigma_0 - \sigma_0^{(0)} \tag{2.4}$$

где $\sigma_0^{(0)}$ — заданный тензор напряжений. В соответствии с (2.1), (2.3) можно записать

$$W_0 = W_0(\{I_k^{\circ *}\}) \tag{2.5}$$

$$I_1^{\circ *} = \sigma_{0i}^{i*}, \quad I_2^{\circ *} = \sigma_{0j}^{i*} \sigma_{0i}^{j*}, \quad I_3^{\circ *} = \sigma_{0j}^{i*} \sigma_{0k}^{j*} \sigma_{0i}^{k*}$$

$$\sigma_0^{ij*} = \sigma_0^{ij} - \sigma_0^{ij(0)} \tag{2.6}$$

При сопоставлении напряжений по энергетической норме (энергетические критерии) функцию W_0 следует представить в виде

$$W_0 = W_0(\sigma_0 \otimes e_0^{(e)}) \tag{2.7}$$

где $e_0^{(e)}$ — тензор упругих деформаций.

Отметим, что тензор $\sigma_0 \otimes e_0^{(e)}$ имеет два независимых скалярных инварианта второго порядка, которые пропорциональны плотности энергии упругого изменения объема и энергии упругой деформации.

Если требуется оптимизировать только девиаторную составляющую напряженного состояния, то локальный критерий должен зависеть от тензора $\sigma_0' \otimes e_0'^{(e)}$, скалярный инвариант которого $I^{\circ\prime} = \sigma_{0j}^{i\prime} e_{0i}^{j\prime(e)}$ пропорционален энергии формоизменения. Здесь σ_0', $e_0'^{(e)}$ — девиаторы тензоров напряжений и упругих деформаций соответственно.

Для решения задач оптимизации, в которых требуется максимально понизить уровень напряженного состояния в отдельных подобластях и обеспечить наименьшее по отклонениям приближение напряженного состояния к заданному, можно исходить из функционального критерия вида

$$K_0^* = \int_0^{\tau_1} \int_{X_0}^{\tau_1} (\varphi W_0 + \varphi_* W_0^*)\, dV_0\, d\tau \tag{2.8}$$

где $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, \tau)$, $\varphi_* = \varphi_*(\mathbf{r}, \tau)$ — функции веса критериев W_0 и W_0^* соответственно; W_0^* — локальная мера изменяемости напряженного состояния по координатам и времени, которая в общем виде может быть представлена так

$$W_0^* = W_0^* \Big(\nabla \otimes \sigma_0,\ \nabla \times \sigma_0,\ \frac{\partial}{\partial \tau}\sigma_0;\ \nabla \otimes \nabla \otimes \sigma_0,\ \nabla \times \sigma_0 \times \nabla,\ \frac{\partial}{\partial \tau}(\nabla \otimes \sigma_0),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\nabla \times \sigma_0),\ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\sigma_0, \ldots \Big) \tag{2.9}$$

Для изотропных тел функция W_0^* может быть записана как функция от скалярных инвариантов совокупности указанных тензоров. Если учитывать только тензоры $\nabla \otimes \sigma_0$, $\nabla \times \sigma_0$, $(\partial/\partial\tau)\,\sigma_0$ и ограничиться скалярными инвариантами не выше второго порядка, то функция W_0^* является функцией следующих инвариантов:

$$I_1^{(1)} = \mu_l^{jk}\mu_{jk}^l, \quad I_2^{(1)} = \mu_l^{jk}\mu_{kj}^l, \quad I_3^{(1)} = \mu_l^{lk}\mu_{kj}^j$$

$$I_4^{(1)} = \mu_l^{ik}\mu_{jk}^j, \quad I_5^{(1)} = \mu_{lj}^j\mu_k^{lk}; \quad I_1^{(2)} = v_l^l$$

$$I_2^{(2)} = v_l^j v_j^l, \quad I_3^{(2)} = v^{lj}v_{lj}; \quad I_1^{(3)} = \partial\sigma_{0l}^l/\partial\tau$$

$$I_2^{(3)} = \frac{\partial\sigma_{0j}^l}{\partial\tau}\,\frac{\partial\sigma_{0l}^j}{\partial\tau}, \quad I^{(2,3)} = \epsilon_{nkl}g_0^{1/2}\mu^{nkj}\frac{\partial\sigma_{0j}^l}{\partial\tau} \tag{2.10}$$

Здесь ϵ_{nkl} — символ Леви — Чивита, $g_0 = \mathrm{Det}\,\|g_{ij}^\circ\|$, g_{ij}° — ковариантные компоненты метрического тензора, $\mu_l^{jk} \equiv \partial\sigma_0^{lk}/\partial x^l + \sigma_0^{nk}\Gamma_{nl}^j + \sigma_0^{jn}\Gamma_{nl}^k$, $v_l^j \equiv (\nabla \times \sigma_0)_l^j = \epsilon_{nkl}g_0^{1/2}\mu^{nkj}$, $\mu^{nkj} = \mu_m^{kj}g_0^{mn}$, Γ_{nl}^k — символы Кристоффеля, $I_1^{(1)}$, $I_2^{(2)}$, $I_1^{(3)}$ — скалярные инварианты тензоров $\nabla \otimes \sigma_0$, $\nabla \times \sigma_0$ и $\partial\sigma_0/\partial\tau$ соответственно, а $I^{(2,3)}$ — скалярный инвариант общий для тензоров $\nabla \times \sigma_0$ и $\partial\sigma_0/\partial\tau$.

Напряженное состояние тонких оболочек и пластин описывается усредненными по толщине тензором напряжений $\mathbf{N}$ и моментной характеристикой $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \sigma_0\, d\gamma, \quad \mathbf{M} = \frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h} \gamma\sigma_0\, d\gamma \tag{2.11}$$

В соответствии с этим, критерий оптимизации (2.8) относительно базисной поверхности $\partial X_0^*(\tau_0)$ запишется в виде

$$K_0^* = \int_0^{\tau_1}\int_{\partial X_0^*}^{\tau_1} \Big(\varphi W_0(\mathbf{N}, \mathbf{M}) + \varphi_* W_0^* \Big(\nabla \otimes \mathbf{N},\ \nabla \otimes \mathbf{M},\ \nabla \times \mathbf{N},\ \nabla \times \mathbf{M},$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\mathbf{N},\ \frac{\partial}{\partial \tau}\mathbf{M}\Big); \ldots\Big)\, d\Sigma_0\, d\tau \tag{2.12}$$

Отметим, что дальнейшая конкретизация критериев W и W^* должна осуществляться с учетом специфики решаемых задач оптимизации напряженного состояния, а также заданных ограничений на функции внешней силовой нагрузки и условий нагрева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. Киев: Наук. думка, 1975. 215 с.
2. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наук. думка, 1978. 344 с.
3. *Бурак Я. И.* Термодинамические процессы в твердых телах с учетом поля химического потенциала//Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 7. С. 36—39.
4. *Гиббс Дж.* Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука, 1982. 584 с.
5. *Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Гнідець Б. М.* Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. Київ: Наук. думка, 1978. 230 с.
6. *Бурак Я. И., Нагирный Т. С.* Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах//Прикл. механика. 1992. 28. № 12. С. 3—23.
7. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973. 280 с.
8. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1974. 190 с.
9. *Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С.* Об одной экстремальной задаче термоупругости для бесконечной цилиндрической оболочки//Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 3. С. 534—537.
10. *Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С.* Постановка и решение некоторых вариационных задач термоупругости тонких оболочек применительно к выбору оптимальных режимов местной термообработки//ПМТФ. 1968. № 4. С. 47—54.
11. *Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С.* О постановке и решении одного класса экстремальных задач термоупругости для оболочек вращения//Теория пластин и оболочек. Киев: Наук. думка, 1971. С. 66—73.
12. *Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин. Киев: Наук. думка, 1979. 364 с.
13. *Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д., Гера Б. В.* Оптимизация переходных процессов в термоупругих оболочках. Киев: Наук. думка, 1984. 160 с.

Львов

Поступила в редакцию
4.XI.1993