

УДК 533.6.013.42

© 1994 г. В. А. СВЕТЛИЦКИЙ, С. В. ЯРЕСЬКО

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ АБСОЛЮТНО ГИБКИХ ШЛАНГОВ В ПОТОКЕ ВОЗДУХА ИЛИ ЖИДКОСТИ

Изложен численный метод решения двухточечной краевой задачи для системы шести нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих статическое равновесие гибкого шланга в произвольном пространственном потоке. Для построения итерационного процесса используется метод линеаризации С. А. Чаплыгина, позволяющий контролировать сходимость по величине невязки исходной нелинейной системы. Для ускорения сходимости за исходное приближение принимается достаточно близкая к реальной форма и натяжение шланга под действием постоянной «мертвой» нагрузки, направленной по вектору скорости потока и равной осредненному значению аэродинамической нагрузки. Решение линейной краевой задачи на каждой итерации осуществляется методом конечных разностей.

Приведены результаты решения в виде графиков натяжения и проекций формы шланга на плоскости трехмерной декартовой системы координат.

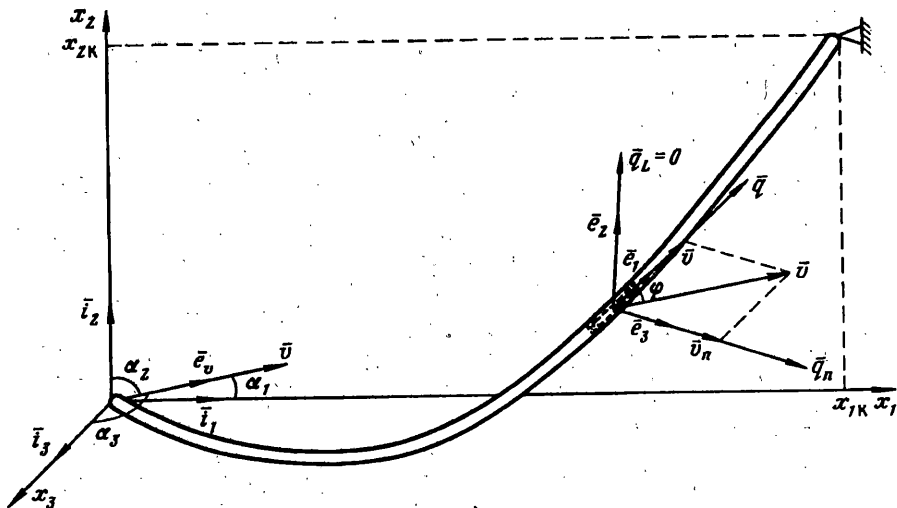
**1. Формулировка задачи.** Рассматривается задача о статическом равновесии гибкого трубопровода или шланга круглого поперечного сечения, который находится во внешнем потоке газа или жидкости в случае, когда вектор скорости потока имеет произвольное направление в пространстве.

На фиг. 1 изображена расчетная схема трубопровода. Начало неподвижной системы координат совмещено с одной из опор, а направления координатных осей  $x_1, x_2, x_3$  выбраны таким образом, чтобы плоскость свободного провисания гибкого трубопровода под действием собственного веса совпадала с координатной плоскостью  $x_1Ox_2$ . Тогда вторая опора трубопровода имеет координаты  $x_{1k}, x_{2k}, 0$ .

Вектор скорости потока газа или жидкости составляет с осями координат  $x_1, x_2, x_3$  углы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , соответственно. Величины этих углов могут изменяться в пределах от 0 до 180 градусов.

На схеме выделен малый элемент трубопровода, центр которого имеет криволинейную координату  $s$ , отсчитываемую вдоль оси трубопровода от опоры, помещенной в начало неподвижной системы координат. Показаны орты естественной системы координат  $e_1, e_2, e_3$ , связанной с осью трубопровода. Вектор скорости потока газа или жидкости  $V$  составляет угол  $\varphi_0$  с ортом  $e_1$ , направленным по касательной к оси трубопровода, и раскладывается на касательную  $V_t$  и нормальную  $V_n$  составляющие. Соответствующие составляющие аэродинамической нагрузки  $q_t$  и  $q_n$  согласно широко распространенным в прикладной аэродинамике допущениям считаются пропорциональными квадратам модулей одноименных составляющих скорости потока жидкости или газа. Подъемная сила  $q_L$  равняется нулю, так как в статике угол атаки для круглого поперечного сечения отсутствует. В целом аэродинамические нагрузки, действующие на пространственно-криволинейный стержень в потоке газа или жидкости, подробно рассмотрены в [1] и [2], а в более общем виде в [3].

Уравнения статического равновесия гибкого трубопровода в потоке газа или жидкости при наличии внутреннего потока жидкости имеют наиболее простой



Фиг. 1

и удобный для решения вид в проекциях на оси неподвижной декартовой системы координат (см. [2]):

$$(Q_0 x_i')' = \delta_{2i} - q_{10} x_i' \cos^2 \varphi_a + q_{n0} \sin \varphi_a (x_i' \cos \varphi_a - \gamma_i) \quad (i = 1 \div 3) \quad (1)$$

$$\cos \varphi_a = x_1' \gamma_1 + x_2' \gamma_2 + x_3' \gamma_3, \quad \sin \varphi_a = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_a}$$

Здесь  $\gamma_i = \cos \alpha_i$  — направляющие косинусы вектора скорости потока газа или жидкости;  $x_i$  — декартовы координаты точек осевой линии;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера ( $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$  и  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ );  $Q_0 = Q - (p_0 + c_m w^2)$  — приведенное натяжение;  $Q$  — натяжение гибкого трубопровода;  $c_m = m^*/m_0$ ;  $m_0 = m^* + m_T$ ;  $m^*$  — погонная масса жидкости, движущейся внутри трубопровода;  $m_T$  — погонная масса трубопровода;  $w$  — скорость движущейся жидкости;  $p_0$  — давление движущейся жидкости;  $q_{10} = 1/2 c_1 \rho d V^2 \text{sign}(\cos \varphi_a)$ ;  $q_{n0} = 1/2 c_n \rho d V^2$  — показатели касательной и нормальной составляющих аэродинамической нагрузки, соответственно;  $c_1, c_n$  — соответствующие аэродинамические коэффициенты;  $d$  — наружный диаметр трубопровода;  $\rho$  — плотность газа или жидкости, обтекающей трубопровод;  $V$  — модуль скорости наружного потока; штрих обозначает дифференцирование по криволинейной координате  $s$ .

Уравнения (1) являются безразмерными. Координаты и другие длины отнесены к длине трубопровода  $l$ , усилия — к общему весу трубопровода и заполняющей его жидкости  $m_0 g l$ , скорости — к масштабу скоростей  $V_m = \sqrt{gl}$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести.

Уравнения (1) геометрически нелинейны, так как они учитывают взаимозависимость между формой осевой линии трубопровода и действующей на него аэродинамической нагрузкой.

Существующие методы решения уравнений (1) основаны на сочетании метода последовательных нагружений и метода последовательных приближений на каждой ступени нагружения (см., например, [2]). Такой алгоритм позволяет получить точное численное решение уравнений (1), но требует, чтобы приращение нагрузки на каждой ступени нагружения было достаточно малым для достижения сходимости. В сочетании с тем, что за исходное приближение выбирается форма свободного провисания трубопровода при отсутствии аэродинамической нагрузки, этот алгоритм требует большого числа ступеней нагружения и, соответственно,

значительных затрат машинного времени, особенно при высоких значениях скоростей наружного потока газа или жидкости.

В настоящей работе разрабатывается более эффективный алгоритм решения уравнений (1). Совершенствование существующего алгоритма достигается тремя путями (или ведется по трем направлениям):

1. Выбор исходного приближения более близкого к действительной форме трубопровода в наружном потоке путем учета интегральной оценки действующей аэродинамической нагрузки.

2. Построение более эффективного итерационного процесса на основе линеаризации уравнений (1) в окрестности исходного приближения по методу С. А. Чаплыгина.

3. Применение более эффективного алгоритма интегрирования линеаризованных дифференциальных уравнений с использованием метода конечных разностей.

2. Выбор исходного приближения. Традиционная методика расчета статического равновесия гибких трубопроводов во внешнем потоке жидкости или газа, использует в качестве исходного приближения, как было сказано выше, форму свободного провисания трубопровода под действием собственного веса при отсутствии аэродинамической нагрузки. Это объясняется сравнительной простотой определения формы статического равновесия под действием «мертвой», то есть постоянной по направлению и интенсивности, нагрузки. Постоянство направления сокращает количество уравнений в системе (1), а то обстоятельство, что интенсивность нагрузки не зависит от продольной криволинейной координаты  $s$ , позволяет аналитически проинтегрировать эти уравнения. Недостатком такого выбора исходного приближения является его существенное отличие от формы статического равновесия гибкого трубопровода во внешнем потоке, особенно при значительных скоростях потока, вследствие чего переход от исходного приближения к искомой форме статического равновесия необходимо осуществлять за несколько ступеней нагружения, каждая из которых должна быть достаточно малой для обеспечения сходимости итерационного процесса.

Для устранения указанного недостатка необходимо, чтобы исходное приближение было достаточно близким к действительной форме статического равновесия гибкого трубопровода во внешнем потоке, обеспечивая сходимость итерационного процесса. Этого можно добиться, если исходное приближение будет учитывать направление и интенсивность аэродинамической нагрузки. При этом желательно сохранить простоту определения исходного приближения.

Поставленных целей можно достигнуть, заменив аэродинамическую нагрузку, переменную как по величине, так и по направлению, некоторой «мертвой» нагрузкой, направленной по вектору скорости наружного потока жидкости или газа. Интенсивность этой мертвой нагрузки принимаем равной модулю векторной суммы максимальных значений нормальной и касательной составляющих аэродинамической нагрузки, умноженному на понижающий коэффициент  $c_a$ , учитывающий то обстоятельство, что эти максимумы достигаются в различных точках:

$$q_M = e \cdot c_a \sqrt{q_{10}^2 + q_{n0}^2} \quad (2)$$

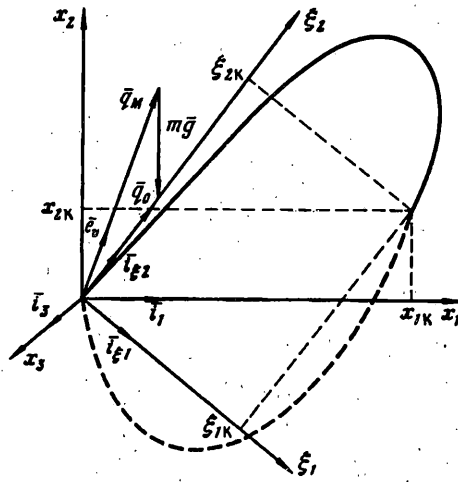
Суммарная нагрузка, определяющая исходное приближение, является векторной суммой собственного веса трубопровода и мертвой нагрузки, заменяющей аэродинамическую

$$q_0 = q_M - mg \mathbf{i}_2 = q_{01} \mathbf{i}_1 + q_{02} \mathbf{i}_2 + q_{03} \mathbf{i}_3 \quad (3)$$

Под действием такой нагрузки, постоянной по величине и направлению, криволинейная ось гибкого трубопровода располагается в плоскости, проходящей через вектор нагрузки и вектор, соединяющий точки закрепления трубопровода

$$x_k = x_{1k} \mathbf{i}_1 + x_{2k} \mathbf{i}_2 \quad (4)$$

Введем в этой плоскости прямоугольную систему координат  $\xi_1 O \xi_2$ , ось  $O \xi_2$  которой



Фиг. 2

направлена по вектору  $q_0$ . Тогда для определения единичного вектора  $i_{\xi_1}$  оси  $O\xi_1$  (см. фиг. 2) имеем следующие условия:

$$i_{\xi_1} (q_0 \times x_k) = 0 \quad (5)$$

$$\bar{i}_{\xi_1} q_0 = 0, \quad |i_{\xi_1}| = 1$$

Первое из этих условий выражает тот факт, что вектора  $i_{\xi_1}$ ,  $q_0$  и  $x_k$  лежат в одной плоскости. Второе — это условие ортогональности векторов  $i_{\xi_1}$  и  $q_0$ . Третье — условие нормировки вектора  $i_{\xi_1}$ . Расписав условия (5) через компоненты входящих в них векторов в системе координат  $x_1, x_2, x_3$  и разрешив полученную систему относительно компонентов вектора  $i_{\xi_1}$  —  $x_{1\xi}, x_{2\xi}, x_{3\xi}$  получим

$$\begin{aligned} x_{1\xi} &= x_{2k}q_{01}q_{02} - x_{1k}(q_{02}^2 + q_{03}^2)/(q_0\Delta) \\ x_{2\xi} &= x_{1k}q_{01}q_{02} - x_{2k}(q_{01}^2 + q_{03}^2)/(q_0\Delta) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} x_{3\xi} &= q_{03}(x_{1k}q_{01} + x_{2k}q_{02})/(q_0\Delta) \\ q_0 &= \sqrt{q_{01}^2 + q_{02}^2 + q_{03}^2} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Delta = \sqrt{(x_{1k}q_{02} - x_{2k}q_{01})^2 + q_{03}^2(x_{1k}^2 + x_{2k}^2)} \quad (8)$$

Таким образом, имеем

$$i_{\xi_1} = x_{1\xi}i_1 + x_{2\xi}i_2 + x_{3\xi}i_3 \quad (9)$$

$$\bar{i}_{\xi_2} = \frac{q_{01}}{q_0} i_1 + \frac{q_{02}}{q_0} i_2 + \frac{q_{03}}{q_0} i_3$$

Аналогично

$$\xi_1 = x_{1\xi}x_1 + x_{2\xi}x_2 + x_{3\xi}x_3 \quad (10)$$

$$\xi_2 = \frac{q_{01}}{q_0} x_1 + \frac{q_{02}}{q_0} x_2 + \frac{q_{03}}{q_0} x_3$$

В системе координат  $\xi_1 O\xi_2$  определение формы равновесия гибкого трубопровода под действием распределенной нагрузки  $q_0$  полностью аналогично определению

формы равновесия под действием собственного веса в системе координат  $x_1, O, x_2$ , которое подробно изложено в [2]. Поэтому пересчитав координаты точек закрепления по формулам (10), несложно получить выражения для координат осевой линии трубопровода. После этого осуществляется обратный переход в систему координат  $x_1, x_2, x_3$  по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 x_{1\xi} + \xi_2 q_{01} / q_0 \\ x_2 &= \xi_1 x_{2\xi} + \xi_2 q_{02} / q_0 \\ x_3 &= \xi_1 x_{3\xi} + \xi_2 q_{03} / q_0 \end{aligned} \quad (11)$$

Полученные результаты используются в качестве исходного приближения при решении системы уравнений (1).

3. **Линеаризация уравнений равновесия трубопровода.** Выбранное указанным выше образом исходное приближение является достаточно близким к действительной форме равновесия гибкого трубопровода во внешнем потоке. Таким образом применение метода последовательных нагружений для решения системы нелинейных уравнений статики (1) не требуется. Из числа других методов решения большие возможности, достаточно изученную сходимости и, как следствие, широкий диапазон применения имеет, как указывается в [4], метод линеаризации С. А. Чаплыгина.

Перепишем систему (1) в виде системы шести дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} x_i' &= Q_i / Q_0 \quad (Q_0 = Q_1 x_1' + Q_2 x_2' + Q_3 x_3') \quad (i = 1 \div 3) \\ Q_i' &= \delta_{2i} - q_{10} x_i' \cos^2 \varphi_a + q_{n0} \sin \varphi_a (x_i' \cos \varphi_a - \gamma_i) \end{aligned} \quad (12)$$

Введя вектор неизвестных  $Z$  и вектор правых частей  $f$ :

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$f_i = \frac{z_{i+3}}{z_1' z_4 + z_2' z_5 + z_3' z_6} = \frac{z_{i+3}}{Q_0} \quad (i = 1 \div 3)$$

$$f_{i+3} = \delta_{2i} - q_{10} z_i' \cos^2 \varphi_a + q_{n0} \sin \varphi_a (z_i' \cos \varphi_a - \gamma_i) \quad (14)$$

систему (12) можно представить в векторной форме записи

$$z' = f(z, z', V) \quad (15)$$

Скорость потока  $V$  входит в выражения для функций через показатели аэродинамической нагрузки  $q_{10}$  и  $q_{n0}$ .

Предположим, что  $(k+1)$  приближение итерационного процесса, который мы намерены построить, является точным решением системы (15), т. е.

$$z'_{(k+1)} = f(z_{(k+1)}, z_{(k+1)}, V) \quad (16)$$

и при этом оно мало отличается от  $k$ -го приближения

$$z_{(k+1)} = z_{(k)} + \Delta z_{(k+1)}, \quad z'_{(k+1)} = z'_{(k)} + \Delta z'_{(k+1)} \quad (17)$$

где  $\Delta z_{(k+1)}$  — малая поправка. Тогда, раскладывая правую часть системы (16) в

ряд Тейлора по степеням  $\Delta z_{(k+1)}$  и сохраняя только линейную часть этого разложения, с учетом выражений (17) получим

$$\Delta z_{(k+1)} = A_s(z^{(k)}, z'^{(k)}, V) \Delta z_{(k+1)} + f(z^{(k)}, z'^{(k)}, V) - z^{(k)} \quad (18)$$

$$A_s = \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_6} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_6}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_6}{\partial z_6} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Учитывая выражения (14) получим выражения для производных, входящих в состав матрицы  $A_s$ . Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial f_i}{\partial z_j} = 0 \text{ при } i = 1 \div 6, j = 1 \div 3 \quad (20)$$

Далее

$$\frac{\partial f_i}{\partial z_{j+3}} = \frac{1}{Q_0^2} \left( \delta_{ij} Q_0 - \frac{\partial Q_0}{\partial z_{j+3}} z_{i+3} \right) \quad (i = 1 \div 3; j = 1 \div 3) \quad (21)$$

Так как  $Q_0^2 = z_4^2 + z_5^2 + z_6^2$ , то  $2Q_0 \frac{\partial Q_0}{\partial z_{j+3}} = 2z_{j+3}$ , откуда

$$\frac{\partial Q_0}{\partial z_{j+3}} = z_{j+3}/Q_0 = z_j' \quad (22)$$

Подставив (22) в (21), получим

$$\frac{\partial f_i}{\partial z_{j+3}} = \frac{1}{Q_0} (\delta_{ij} - z_i' \cdot z_j') = a_{ij} \quad (i = 1 \div 3; j = 1 \div 3) \quad (23)$$

Затем рассмотрим оставшиеся производные:

$$\frac{\partial f_{i+3}}{\partial z_{j+3}} = \frac{\partial (\cos \varphi_a)}{\partial z_{j+3}} \left[ \frac{q_{n0}}{\sin \varphi_a} (\gamma_i \cos \varphi_a - z_i' \cos 2\varphi_a) - q_{10} 2z_i' \cos \varphi_a \right] + \quad (24)$$

$$+ \frac{\partial z_i'}{\partial z_{j+3}} \cos \varphi_a (q_{n0} \sin \varphi_a - q_{10} \cos \varphi_a) \quad (i = 1 \div 3, j = 1 \div 3)$$

Так как

$$\frac{\partial (\sin^2 \varphi_a + \cos^2 \varphi_a)}{\partial z_{j+3}} = 2 \sin \varphi_a \frac{\partial (\sin \varphi_a)}{\partial z_{j+3}} + 2 \cos \varphi_a \frac{\partial (\cos \varphi_a)}{\partial z_{j+3}} = 0$$

то

$$\frac{\partial (\sin \varphi_a)}{\partial z_{j+3}} = - \frac{\cos \varphi_a}{\sin \varphi_a} \frac{\partial (\cos \varphi_a)}{\partial z_{j+3}} \quad (25)$$

Подставив (25) в (24), получим

$$\frac{\partial f_{i+3}}{\partial z_{j+3}} = \frac{\partial (\cos \varphi_a)}{\partial z_{j+3}} \left[ \frac{q_{n0}}{\sin \varphi_a} (\gamma_i \cos \varphi_a - z_i' \cos 2\varphi_a) - q_{10} 2z_i' \cos \varphi_a \right] + \quad (26)$$

$$+ \frac{\partial z_i'}{\partial z_{j+3}} \cos \varphi_a (q_{n0} \sin \varphi_a - q_{10} \cos \varphi_a) \quad (i = 1 \div 3, j = 1 \div 3)$$

Далее учтем, что

$$\frac{\partial (\cos \varphi_a)}{\partial z_{j+3}} = \gamma_1 \frac{\partial z_1'}{\partial z_{j+3}} + \gamma_2 \frac{\partial z_2'}{\partial z_{j+3}} + \gamma_3 \frac{\partial z_3'}{\partial z_{j+3}} \quad (27)$$

и принимая во внимание выражения (23), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{i+3}}{\partial z_{j+3}} = a_{Qij} = a_{xij} \left\{ \gamma_1 \left[ \frac{q_{n0}}{\sin \varphi_a} (\gamma_i \cos \varphi_a - z_i' \cos 2\varphi_a) - q_{i0} 2 \cos \varphi_a z_i' \right] + \right. \\ \left. + \delta_{i1} \cos \varphi_a (q_{n0} \sin \varphi_a - q_{i0} \cos \varphi_a) \right\} + a_{x2j} \left\{ \gamma_2 \left[ \frac{q_{n0}}{\sin \varphi_a} (\gamma_i \cos \varphi_a - \right. \right. \\ \left. \left. - z_i' \cos 2\varphi_a) - q_{i0} 2 \cos \varphi_a z_i' \right] + \delta_{i2} \cos \varphi_a (q_{n0} \sin \varphi_a - q_{i0} \cos \varphi_a) \right\} + \\ + a_{x3j} \left\{ \gamma_3 \left[ \frac{q_{n0}}{\sin \varphi_a} (\gamma_i \cos \varphi_a - z_i' \cos 2\varphi_a) - q_{i0} 2 \cos \varphi_a z_i' \right] + \right. \\ \left. + \delta_{i3} \cos \varphi_a (q_{n0} \sin \varphi_a - q_{i0} \cos \varphi_a) \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

Вводя в рассмотрение матрицы размерности  $3 \times 3$ :

$$A_x = \{a_{xij}\} \text{ и } A_Q = \{a_{Qij}\} \quad (29)$$

из соотношений (23) и (28) нетрудно установить, что

$$A_Q = -A_E A_x \quad (30)$$

где компоненты матрицы  $A_E$  имеют вид

$$\begin{aligned} a_{Eij} = \left[ q_{i0} 2x_i' \cos \varphi_a - \frac{q_{n0}}{\sin \varphi_a} (\gamma_i \cos \varphi_a - x_i' \cos 2\varphi_a) \right] \gamma_j + \\ + \delta_{ij} \cos \varphi_a (q_{i0} \cos \varphi_a - q_{n0} \sin \varphi_a) \quad (i = 1 \div 3, j = 1 \div 3) \end{aligned} \quad (31)$$

Согласно (20), (23), (28), (29) можно записать матрицу  $A_s$  в блочном виде

$$A_s = \begin{vmatrix} 0 & A_x \\ 0 & A_Q \end{vmatrix} \quad (32)$$

Представляя и вектор неизвестных  $Z$  в блочном виде

$$z = \begin{vmatrix} x \\ Q \end{vmatrix} \quad (33)$$

а также вводя два трехмерных вектора  $N_x$  и  $N_Q$ , компоненты которых определяются по формулам

$$n_{xi} = Q_i / Q_0 - x_i' \quad (i = 1 \div 3) \quad (34)$$

$$n_{Qi} = \delta_{2i} - q_{i0} x_i' \cos^2 \varphi_a + q_{n0} \sin \varphi_a (x_i' \cos \varphi_a - \gamma_i) - Q_i'$$

систему уравнений итерационного процесса (18) можно записать в виде двух матричных уравнений

$$\Delta X'_{(k+1)} = A_{x(k)} \Delta Q_{(k+1)} + N_{x(k)}, \quad \Delta Q_{(k+1)} = A_{Q(k)} \Delta Q_{(k+1)} + N_{Q(k)} \quad (35)$$

В итоге итерационный процесс решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (12), построенный на основе метода линеаризации С. А. Чаплыгина, описывается следующим образом. Зная  $k$ -е приближение  $x^{(k)}$ ,  $Q^{(k)}$ , по формулам (23), (31), (30), (34) определяем коэффициенты  $A_{x(k)}$ ,  $A_{Q(k)}$  и нагрузочные члены  $N_{x(k)}$ ,  $N_{Q(k)}$  системы линейных дифференциальных уравнений (2.35). Проинтегрировав эту систему при краевых условиях

$$\Delta x(0) = 0, \quad \Delta x(1) = 0 \quad (36)$$

находим приращения  $(k+1)$ -го приближения  $\Delta x_{(k+1)}$  и  $\Delta Q_{(k+1)}$ . После чего находим само  $(k+1)$ -е приближение

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x_{(k+1)}, \quad Q^{(k+1)} = Q^{(k)} + \Delta Q_{(k+1)} \quad (37)$$

и можно переходить к следующей итерации.

Следует отметить, что построение итерационного процесса на основе уравнений (35), (36), (37) обладает тем преимуществом, что вектора  $N_x$  и  $N_0$ , входящие в систему (35) и определяемые формулами (34), представляют собой невязку исходной системы нелинейных дифференциальных уравнений равновесия (12). Это позволяет использовать в качестве критерия сходимости итерационного процесса условие близости к нулю (то есть достижения заданной степени малости) нормы этих векторов. Тем самым достигается непосредственное удовлетворение исходных нелинейных дифференциальных уравнений равновесия, что является достаточным условием сходимости итерационного процесса.

4. Решение краевой задачи методом конечных разностей. Реализация изложенного выше итерационного процесса требует на каждой итерации решения двухточечной краевой задачи для системы линейных дифференциальных уравнений (35) при граничных условиях (36). В силу переменности коэффициентов системы (35) решение может быть получено только численными методами, основанными на применении ЭВМ. Эти методы подразделяются на два класса. Первый класс составляют методы, посредством которых краевая задача сводится к задаче Коши. Это метод начальных параметров, метод ортогонализации С. К. Годунова, метод прогонки в форме факторизации и метод прогонки А. А. Абрамова. Эти методы подробно описаны в [4]. Все они требуют нескольких последовательных решений задачи Коши при различных начальных условиях с последующим определением коэффициентов, входящих в начальные условия, из решения системы линейных алгебраических уравнений. Это создает определенные сложности при алгоритмизации процессов вычислений, усугубляемые существенными осложнениями, присущими более совершенным из этих методов. Значительными оказываются и затраты машинного времени. Поэтому в нашем случае при осуществлении итерационного процесса более предпочтительными являются методы, относящиеся ко второму классу и связанные с заменой дифференциальных уравнений разностными [5].

Рассмотрим один из наиболее простых вариантов метода конечных разностей. Для этого вернемся к форме записи итерационных уравнений в виде (18) с учетом новых матричных обозначений

$$\Delta z' = A_s \Delta z + N \quad (38)$$

Граничные условия (36) также запишем в матричном виде

$$A_k^{(1)} \Delta z(0) = C_k^{(1)} = 0; \quad A_k^{(2)} \Delta z(1) = C_k^{(2)} = 0 \quad (39)$$

$$A_k^{(1)} = A_k^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Введем равномерную сетку значений аргументов системы (38), имеющую  $n$  узлов. Шаг такой сетки равен

$$h = 1/(n-1) \quad (41)$$

Обозначим через  $\Delta z^{(m)}$ ,  $A_s^{(m)}$ ,  $N^{(m)}$  значения  $\Delta z$ ,  $A_s$ ,  $N$  в  $m$ -м угле этой сетки. Тогда, записывая производную через центральные конечные разности [5], а значения матрицы системы, вектора неизвестных и вектора правых частей в середине интервала между узлами сетки путем линейной интерполяции узловых значений, получим

$$\frac{\Delta z^{(m+1)} - \Delta z^{(m)}}{h} = \frac{A_s^{(m+1)} + A_s^{(m)}}{2} \frac{\Delta z^{(m+1)} + \Delta z^{(m)}}{2} + \frac{N^{(m+1)} + N^{(m)}}{2}$$



или ( $E$  — единичная матрица):

$$F_m \Delta z^{(m)} + G_m \Delta z^{(m+1)} = C_m \quad (42)$$

$$F_m = R_m + E, \quad G_m = R_m - E \quad (43)$$

$$R_m = 1/4h (A_s^{(m)} + A_s^{(m+1)}) \quad (44)$$

$$C_m = -1/2h (N^{(m)} + N^{(m+1)}) \quad (45)$$

Записав уравнения (42) для каждого из  $(n - 1)$  отрезков сетки и дополнив систему краевыми условиями (39), приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$BY = C \quad (46)$$

где вектор  $Y$  составлен из узловых значений вектора неизвестных  $\Delta z$ :

$$Y = \begin{pmatrix} \Delta z^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta z^{(n)} \end{pmatrix} \quad (47)$$

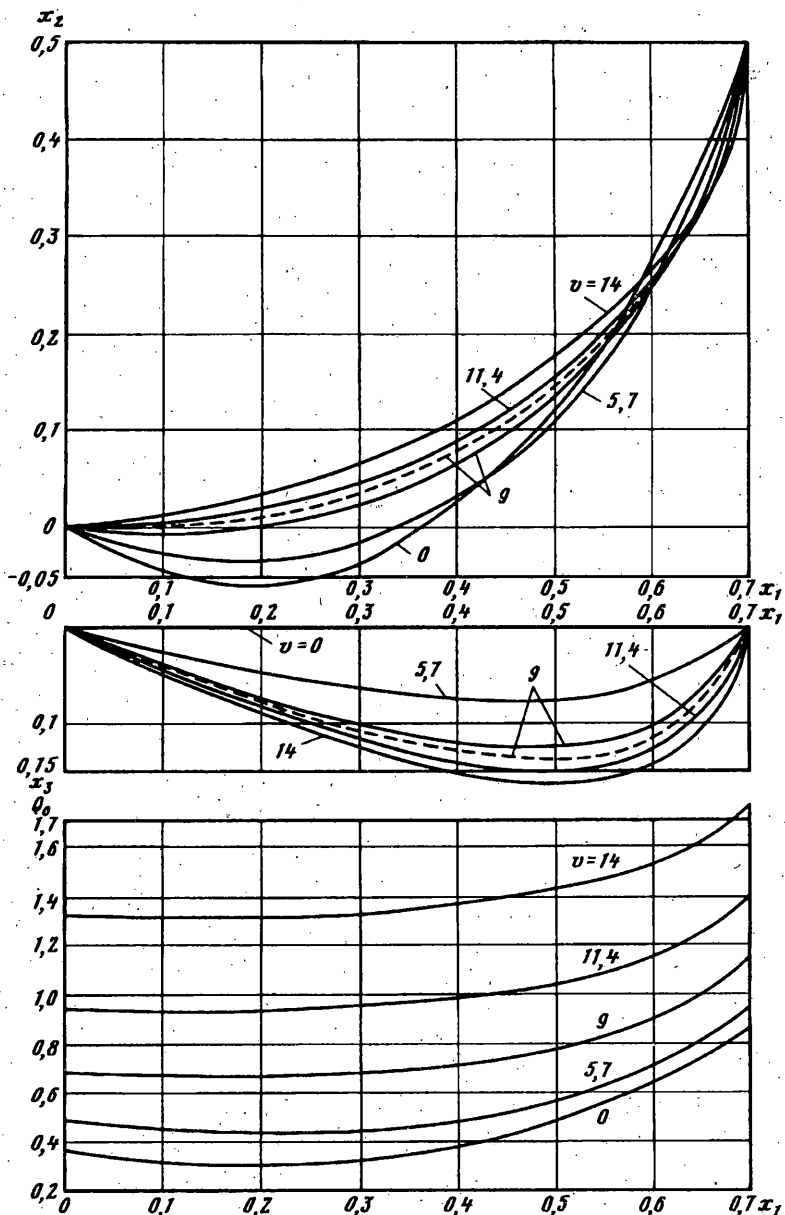
матрица  $B$  и вектор правых частей имеют вид соответственно

$$B = \begin{pmatrix} A_k^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ F_1 & G_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & G_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & F_{n-1} & G_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_k^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (48)$$

$$C = \begin{pmatrix} C_k^{(1)} \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{n-1} \\ C_k^{(2)} \end{pmatrix}$$

Решение системы (46) осуществляется методом исключения Гаусса с выбором главного элемента по столбцу. При этом учитывается ленточная структура матрицы  $B$  согласно (48), что позволяет сократить необходимую оперативную память и затраты машинного времени.

Таким образом, в настоящей работе представлен более эффективный по сравнению с существующими алгоритм определения формы равновесия гибкого трубопровода во внешнем потоке жидкости или газа произвольного пространственного направления. Усовершенствования алгоритма касаются выбора начального приближения, построения итерационного процесса решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, метода решения краевой задачи на каждой итерации. Изложенный алгоритм программно реализован на языке «Фортран».



Фиг. 3

5. Примеры расчета. Рассматривается гибкий трубопровод (шланг) длиной  $l = 1$  м с наружным диаметром  $d_0 = 10$  мм и погонной массой  $0,040$  кг/м, находящийся в потоке воздуха, вектор скорости которого имеет направляющие косинусы  $\gamma_1 = \gamma_3 = \sqrt{2}/2$ ,  $\gamma_2 = 0$ . Аэродинамические коэффициенты приняты равными для нормальной составляющей  $C_n = 1, 2$ , для касательной составляющей  $C_t = 0,04$ .

Фиг. 3 демонстрирует выбор начального приближения по предлагаемой методике при скорости потока воздуха  $V = 9$  м/сек. Штриховой линией показана форма, выбранная в качестве исходного приближения по предлагаемой методике расчета так, как это описано в подразделе 2.2. Сплошной линией показана действительная форма шланга в потоке, рассчитанная по предлагаемой методике. Для достижения заданной относительной точности по невязке исходной системы нелинейных дифференциальных уравнений статики шланга в потоке потребовалось три итерации. При этом достигнутая точность по невязке составила  $6,2 \cdot 10^{-7}$  при заданной точности  $1 \cdot 10^{-5}$ . Из рассмотрения фиг. 3

наглядно видно преимущество выбора исходного приближения по предлагаемой методике, заключающееся в его существенной близости к реальной форме шланга в потоке, что подтверждается и быстрой сходимостью итерационного процесса.

На фиг. 3 представлены форма и натяжение шланга в потоке для случая взаимного расположения опор при  $x_{1k} = 0,7$  и  $x_{2k} = 0,5$ , полученные при значениях скорости потока  $V = 0; 5,7; 9; 11,4$  и  $14$  м/с. Во всех этих случаях сходимость при заданной относительной точности по невязке  $1 \cdot 10^{-5}$  достигалась не более чем за три итерации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Светлицкий В. А. Механика стержней. Ч. I. Статика. М.: Высшая школа, 1987. 320 с.
2. Светлицкий В. А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
3. Ярьско С. В. Аэродинамические нагрузки, действующие на стержневые элементы конструкций// ИВУЗ. Машиностроение, 1988. № 1. С. 33—37.
4. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 280 с.
5. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973. 400 с.

Москва

Поступила в редакцию  
2.XI.1993