МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1994

УДК 533.6.013.42

© 1994 г. Ф. Н. ШКЛЯРЧУК

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ДЛЯ ЗАДАЧ О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ ВНУТРИ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Формулировки задач о малых колебаниях упругих оболочек, частично заполненных жидкостью, и различные методы их решения обсуждались в [1, 2] и в ряде других работ.

Для расчета гармонических колебаний упругих оболочек вращения произвольной формы часто используются обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка (после отделения окружной координаты) и численный метод их интегрирования с ортогонализацией решений в ряде точек. Этому вопросу посвящена обширная литература, например, [3]. В [4] этот подход был распространен также на задачи о колебаниях упругих оболочек вращения с жидкостью. При этом гидродинамическая задача вариационным методом сводилась к системе алгебраических уравнений, которые решались совместно с дифференциальными уравнениями оболочки.

В [5, 6] гидродинамическая задача о колебаниях жидкости внутри подвижных и упругих полостей вращения вариационным методом сведена к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка для обобщенных перемещений, представляющих коэффициенты разложения осевых перемещений жидкости в поперечном сечении в ряд по заданным функциям радиальной координаты.

Здесь эти уравнения для неосесимметричных и осесимметричных колебаний преобразуются к дифференциальным уравнениям первого порядка, разрешенным относительно производных (каноническая форма). При этом в качестве неизвестных рассматриваются обобщенные перемещения и соответствующие им обобщенные гидродинамические силы. Оценивается точность решений в первых приближениях. Для решения связанной задачи гидроупругости как задачи Коши полученные уравнения объединяются с обыкновенными дифференциальными уравнениями колебаний упругой оболочки вращения, также разрешенными относительно производных от неизвестных функций — перемещений и соответствующих им упругих обобщенных сил. Полученные таким образом дифференциальные уравнения в канонической форме имеют характерный для самосопряженных систем вид.

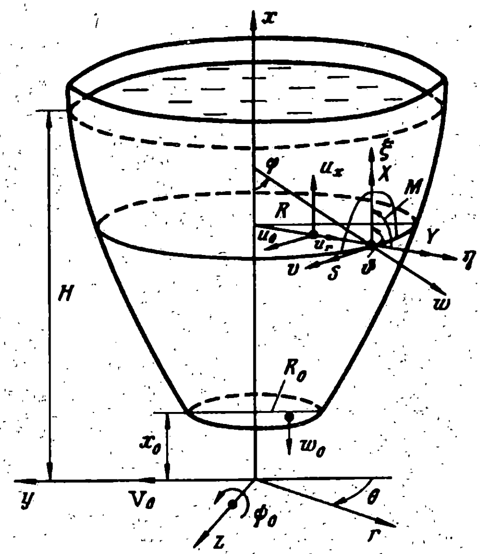
1. Неосесимметричные колебания жидкости в полости вращения. Рассмотрим произвольную полость вращения (фигура), частично заполненную идеальной несжимаемой жидкостью, свободная поверхность которой перпендикулярна оси полости (ускорение g поля массовых сил в невозмущенном состоянии направлено вдоль оси x). Для общности будем считать, что полость имеет плоское дно радиуса R_0; если оно отсутствует, то $R_0 = 0$.

Поставленная задача допускает разделение переменных по окружной координате θ, поэтому нормальные перемещения боковой поверхности и дна будем представлять в виде одного из членов разложений их в ряд Фурье по θ:

$$w = W(x, t)\cos n\theta,\quad w_0 = W_0(r, t)\cos n\theta\quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.1}$$

В качестве основной неизвестной функции гидродинамической задачи рассматриваем осевые перемещения жидкости u_x. Она разыскивается в виде разложения

$$u_x = \cos n\theta \sum_{i=1}^{N} U_i(x, t)\,\varphi_i(\alpha)\quad (\alpha = r/R(x)) \tag{1.2}$$



где $U_i(x, t)$ — неизвестные функции, $\varphi_i(\alpha)$ — заданные функции.

Возмущенное давление в жидкости с плотностью ρ и ее радиальные и окружные перемещения выражаются через функцию $\Phi(x, r, t)$ как

$$p = \rho g(H - x) - \rho\ddot{\Phi}\cos n\theta \tag{1.3}$$

$$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\cos n\theta, \quad u_\theta = -\frac{n}{r}\Phi\sin n\theta$$

Уравнение неразрывности жидкости записывается в виде обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения по r для функции Φ. Точное решение этого уравнения типа Эйлера с учетом ограниченности Φ при $r \to 0$ и кинематического условия $u_r - R'u_x = w/\sin\varphi$ при $r = R$ и представлений (1.1)—(1.3) записывается при $n \geq 1$ в виде [6]:

$$\Phi = \frac{WR}{n\sin\varphi}\alpha^n + \frac{R}{2n}\sum_{i=1}^{N}\Big\{[RU_i' - (n-2)R'U_i]\,\alpha^n\int_\alpha^1 \varphi_i\alpha^{-n+1}\,d\alpha +$$

$$+ [RU_i' + (n+2)R'U_i]\left(\alpha^n\int_0^1 \varphi_i\alpha^{n+1}\,d\alpha + \alpha^{-n}\int_0^\alpha \varphi_i\alpha^{n+1}\,d\alpha\right)\Big\} \tag{1.4}$$

Штрихом обозначается производная по x.

Уравнение динамического равновесия жидкости в направлении оси x, кинематическое граничное условие на дне и динамическое граничное условие на свободной поверхности жидкости, т. е.

$$\partial p/\partial x + \rho(g + \ddot{u}_x) = 0 \tag{1.5}$$

$$u_x + w_0 = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0$$

$$p - \rho g u_x = 0 \quad \text{при} \quad x = H$$

с учетом (1.1)—(1.4) удовлетворяются приближенно по методу Бубнова на совокупности заданных функций $\varphi_i(\alpha)\cos n\theta$. В результате для функций

$U_i(x, t)$, $i = 1, \ldots, N$ получаются обыкновенные дифференциальные уравнения и граничные условия [6]:

$$\sum_{j=1}^{N} [R^2 k_{ij} U_j'' + 2RR' p_{ij} U_j' - (2nb_{ij} + R'^2 q_{ij} - RR'' r_{ij}) U_j] =$$

$$= -2d_i \left[\left(\frac{W}{\sin\varphi} \right)' R - (n-1) \frac{WR'}{\sin\varphi} \right] \tag{1.6}$$

$$\sum_{j=1}^{N} b_{ij} U_j = -\int_0^1 W_0 \varphi_i \alpha \, d\alpha \quad \text{при} \quad x = x_0 \tag{1.7}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \left[Rk_{ij} \ddot{U}_j' + R' r_{ij} \ddot{U}_j + 2n \frac{g}{R} b_{ij} U_j \right] = -2d_i \frac{\ddot{W}}{\sin\varphi} \quad \text{при} \quad x = H \tag{1.8}$$

$$k_{ij} = d_i d_j + c_{ij} + c_{ji}, \quad p_{ij} = 2k_{ij} - n(c_{ij} - c_{ji})$$

$$q_{ij} = 2nd_{ij} + n(2n+1) d_i d_j - (n^2 + 2) k_{ij} + 3n(c_{ij} - c_{ji})$$

$$r_{ij} = p_{ij} + nd_i d_j, \quad b_{ij} = \int_0^1 \varphi_i \varphi_j \alpha \, d\alpha, \quad d_{ij} = \int_0^1 \varphi_i \varphi_j \alpha^3 d\alpha \tag{1.9}$$

$$c_{ij} = \int_0^1 \left(\int_0^\alpha \varphi_i \alpha^{n+1} d\alpha \right) \varphi_j \alpha^{-n+1} d\alpha, \quad d_i = \int_0^1 \varphi_i \alpha^{n+1} d\alpha$$

Для сведения задачи к дифференциальным уравнениям первого порядка в качестве неизвестных наряду с $U_i(x, t)$ будем также рассматривать функции

$$F_i(x, t) = R^2 \int_0^1 \Phi(x, \alpha, t) \varphi_i(\alpha) \alpha \, d\alpha \tag{1.10}$$

При этом $\pi\rho\ddot{F}_i$ является обобщенной гидродинамической силой, соответствующей обобщенному перемещению U_i.

С учетом (1.4) находим

$$F_i = \frac{R^3}{2n} \left[\sum_{j=1}^{N} (k_{ij} RU_j' + r_{ij} R' U_j) + 2d_i \frac{W}{\sin\varphi} \right] \tag{1.11}$$

Далее функции $\varphi_i(\alpha)$ будем выбирать так, чтобы выполнялись условия $k_{ij} = 0$ при $i \neq j$. При этом из уравнения (1.11) находим U_i' и путем дифференцирования — U_i''. Затем, исключая их из уравнения (1.6), получим систему дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенную относительно U_i' и F_i':

$$U_i' = -R^{-1} R' \sum_{j=1}^{N} g_{ij} U_j + R^{-4} g_i F_i - R^{-1} f_i \frac{W}{\sin\varphi}$$

$$F_i' = R^2 \sum_{j=1}^{N} (b_{ij} + R'^2 h_{ij}) U_j + R^{-1} R' \sum_{j=1}^{N} g_{ji} F_j + R^2 R' h_i \frac{W}{\sin\varphi} \tag{1.12}$$

$$g_{ij} = \frac{r_{ij}}{k_{ii}}, \quad g_i = \frac{2n}{k_{ii}}, \quad f_i = \frac{2d_i}{k_{ii}} \quad h_i = \frac{1}{n} \left[(n+2) d_i - \sum_{k=1}^{N} d_k g_{ki} \right]$$

$$h_{ij} = d_{ij} + (n + 2)\, d_i d_j - \frac{n^2 - 4}{2n} k_{ij} - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{N} k_{kk} g_{ki} g_{kj}$$

Граничное условие (1.8) записывается в виде

$$\ddot{F}_i + gR^2 \sum_{j=1}^{N} b_{ij} U_j = 0 \quad \text{при} \quad x = H \tag{1.13}$$

Значение функции (1.4) на боковой поверхности полости при $\alpha = 1$ выражается через U_i, F_i как

$$\Phi|_{\alpha=1} = RR' \sum_{l=1}^{N} h_l U_l + R^{-2} \sum_{l=1}^{N} f_l F_l + k_0 R \frac{W}{\sin\varphi} \tag{1.14}$$

$$k_0 = \frac{1}{n} \left[1 - 2 \sum_{j=1}^{N} \frac{d_j^2}{k_{jj}} \right]$$

Уравнения (1.12) в отличие от (1.6) не содержат $R'' = -(R_1 \sin^3 \varphi)^{-1}$, где R_1 — радиус кривизны меридиана, и поэтому могут быть использованы без привлечения дополнительных условий «склейки» также для полостей, образующая (меридиан) которых имеет изломы.

Если взять $\varphi_i(\alpha) = J_n(\nu_{ni}\alpha)$, где ν_{ni} — i-ый корень уравнения $J_n'(\nu) = 0$, то $b_{ij} = 0$ и $k_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тогда для цилиндрической полости ($R' = 0$) системы уравнений и граничных условий (1.6)—(1.8) и (1.12), (1.13) при $i = 1, 2, \ldots \infty$ распадаются и этот метод позволяет получить точное решение гидродинамической задачи.

Для расчета упругих неосесимметричных колебаний произвольных оболочек вращения с жидкостью, а также — волновых движений свободной поверхности жидкости по низшей форме при $n = 1, 2, \ldots$, приближенное решение с достаточно высокой точностью можно получить, ограничиваясь одной заданной функцией ($N = 1$) в виде $\varphi_1(\alpha) = \alpha^n$. Эта функция с точностью до множителя правильно представляет входящие в точное решение гидродинамической задачи в цилиндрической системе координат функции Бесселя при малых значениях их аргументов: $J_n(z) \sim z^n/(2^n n!)$, $I_n(z) \sim z^n/(2^n n!)$ при $z \ll 4(n + 1)$.

В одночленном приближении ($N = 1$) при $\varphi_1(\alpha) = \alpha^n$ постоянные коэффициенты, входящие в уравнения (1.12), в граничные условия (1.7), (1.13) и выражение (1.14), будут

$$g_{11} = 2 + n\varkappa_n, \quad g_1 = 8n(n + 1)^2 \varkappa_n, \quad f_1 = 4(n + 1)\varkappa_n \tag{1.15}$$

$$\varkappa_n = \frac{n + 2}{3n + 4}, \quad b_{11} = \frac{1}{2(n + 1)}, \quad h_{11} = h_1 = k_0 = \frac{1}{3n + 4}$$

В двучленном приближении ($N = 2$; $n \geq 1$) при расчете удобно использовать функции

$$\varphi_1(\alpha) = \alpha^n, \quad \varphi_2(\alpha) = \alpha^n - \frac{(3n + 4)(n + 3)}{3(n + 1)(n + 2)} \alpha^{n+2} \tag{1.16}$$

которые удовлетворяют условию $k_{12} = k_{21} = 0$.

Для оценки точности решения гидродинамической задачи в одночленном приближении ($N = 1$; $\varphi_1 = \alpha^n$) рассмотрим цилиндрическую полость радиуса R и глубины H. Форма нормальных перемещений боковой поверхности цилиндра задана в виде $W = W_{mn} = \sin(\alpha_m x/R)\cos n\theta$, где $\alpha_m = m\pi R/H$, $m = 1, 2, \ldots$; торцевые поверхности цилиндрического столба жидкости $x = 0$ и $x = H$ свободны

Таблица 1

n	1	2	3	4
μ_{1n}	0,806325	0,462258	0,320157	0,243951
μ_{1n}^*	0,806452	0,462264	0,320158	0,243951
μ_{2n}	0,535832	0,382032	0,287612	0,227926
μ_{2n}^*	0,538461	0,382353	0,287671	0,227941

(гравитация не учитывается, $g = 0$). Обобщенные массы жидкости, соответствующие заданной форме нормальных перемещений W_{mn}, определяются по следующим формулам: на основании точного решения для потенциального движения жидкости

$$m_{mn} = \frac{\pi\rho R^2 H}{2}\,\frac{I_n(\alpha_m)}{\alpha_m I_n'(\alpha_m)}$$

и на основании приближенного метода (при $N = 1$, $\varphi_1 = \alpha^n$):

$$m_{mn}^* = \frac{\pi\rho R^2 H}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{\alpha_m^2\beta_n^2}{2n^2(n+1)(\alpha_m^2+\beta_n^2)}\right], \quad \beta_n^2 = \frac{4n(n+1)(n+2)}{3n+4}$$

В табл. 1 для сравнения приведены значения коэффициентов $\mu_{mn} = 2m_{mn}/(\pi\rho R^2 H)$ и $\mu_{mn}^* = 2m_{mn}^*/(\pi\rho R^2 H)$ при $H = \pi R$. Эти результаты показывают на высокую точность аппроксимации осевых перемещений жидкости в поперечном сечении по закону α^n.

Использование этой аппроксимации при определении низших собственных частот гравитационных колебаний свободной поверхности жидкости в цилиндрической полости приводит к формуле $\omega_{n1}^2 = (g\beta_n/R)\,\mathrm{th}\,(\beta_n H/R)$. Точное решение дает такую же формулу, где вместо β_n стоит ν_{n1}; для сравнения при $n = 1$ $\beta_1 = \sqrt{24/7} = 1{,}8516$, а $\nu_{11} = 1{,}8412$.

2. Осесимметричные колебания жидкости в полости. При осесимметричных колебаниях ($n = 0$) осевое перемещение жидкости вместо (1.2) ищется в виде

$$u_x = U_0(x, t) + \sum_{i=1}^{N} U_i(x, t)\,\varphi_i(\alpha) \tag{2.1}$$

$$U_0 = -\frac{2}{R^2}\left[\int_{x_0}^{x}\frac{WR}{\sin\varphi}\,dx + \int_0^{R_0} W_0 r\,dr\right] \tag{2.2}$$

осевое перемещение жидкости за счет вытеснения при условии, что ее поперечные сечения остаются плоскими; функции $U_i(x, t)$ при $i = 1, \ldots, N$ представляют депланации поперечных сечений жидкости по формам $\varphi_i(\alpha)$, которые подчиняются условиям

$$\int_0^1 \varphi_i\,\alpha\,d\alpha = 0 \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{2.3}$$

Из уравнения неразрывности с учетом (2.1)—(2.3), удовлетворяя уравнение и граничные условия (1.5) в среднем, получаем

$$\Phi = -\int_x^H\left(U_0 - \frac{RR'}{4}U_0'\right)dx - U_0'\frac{R^2}{8}(2\alpha^2 - 1) - g\int_0^t\int_0^t U_0(H, t)\,dt\,dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left[-d_{0i}\int_{x}^{H}(R^4U_i)'\frac{R'}{R^3}\,dx+(R^2U_i)'\left(\frac{d_{0i}}{2}+\int_{\alpha}^{1}\chi_i\frac{d\alpha}{\alpha}\right)+\right.$$

$$\left.+RR'U_i\,(d_{0i}+\chi_i(\alpha))\right] \tag{2.4}$$

$$d_{0i}=\int_0^1\varphi_i\alpha^3\,d\alpha,\quad \chi_i(\alpha)=\int_0^{\alpha}\varphi_i\alpha\,d\alpha$$

Затем, удовлетворяя (1.5) по методу Бубнова на совокупности заданных функций $\varphi_i(\alpha)$, $i=1,\ldots,N$, получаем обыкновенные дифференциальные уравнения и граничные условия для функций $U_i(x,t)$ [5]:

$$\sum_{j=1}^{N}\{a_{ij}(R^2U_j)''-2R^{-1}R'c_{ij}(R^2U_j)'-[b_{ij}+R'^2d_{ij}+$$

$$+(RR''-R'^2)\,c_{ij}]\,U_j\}=\frac{1}{4}\,d_{0i}R^2U_0'' \tag{2.5}$$

$$\sum_{j=1}^{N}b_{ij}U_j=-\int_0^1 W_0\varphi_i\alpha\,d\alpha\quad \text{при}\quad x=x_0 \tag{2.6}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\{a_{ij}(R^2\ddot{U}_j)'-RR'c_{ij}\ddot{U}_j+gb_{ij}U_j\}=\frac{1}{4}\,d_{0i}R^2U_0'$$

$$\text{при}\quad x=H\quad (i=1,\ldots,N) \tag{2.7}$$

$$a_{ij}=\int_0^1\chi_i(\alpha)\,\chi_j(\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha},\quad b_{ij}=\int_0^1\varphi_i\varphi_j\alpha\,d\alpha \tag{2.8}$$

$$d_{ij}=\int_0^1\varphi_i\varphi_j\alpha^3\,d\alpha,\quad c_{ij}=-c_{ji}=\int_0^1\chi_i(\alpha)\,\varphi_j\alpha\,d\alpha$$

Наряду с $U_i(x,t)$ в качестве неизвестных будем рассматривать функции $F_i(x,t)$, которые при осесимметричных колебаниях ($n=0$; $i=0,1,\ldots,N$) также вводятся по формуле (1.10); $\varphi_0(\alpha)=1$. В данном случае ($n=0$) обобщенному перемещению U_i соответствует обобщенная гидродинамическая сила $2\pi\rho\ddot{F}_i$. С учетом (2.4), (2.3) и (2.8) находим

$$F_0=-\frac{R^2}{2}\int_x^H\left(U_0-\frac{RR'}{4}\,U_0'\right)dx-g\frac{R^2}{2}\int_0^t\int_0^t U_0(H,t)\,dt\,dt-$$

$$-\frac{R^2}{2}\sum_{i=1}^{N}d_{0i}\int_x^H(R^4U_i)'\frac{R'}{R^3}\,dx \tag{2.9}$$

$$F_i=-\frac{d_{0i}}{4}R^4U_0'+R^2\sum_{j=1}^{N}[a_{ij}(R^2U_j)'-c_{ij}RR'U_j] \tag{2.10}$$

Далее, подчиняя функции $\varphi_i(\alpha)$ наряду с (2.3) условиям $a_{ij}=0$ при $i\neq j$, также как и для неосесимметричных колебаний систему (2.5) с учетом (2.2) сводим к дифференциальным уравнениям первого порядка, аналогичным уравнениям (1.12)

$$U_i' = -R^{-1}R' \sum_{j=1}^{N} g_{ij}U_j + R^{-4}g_iF_i - R^{-1}f_i \left(R'U_0 + \frac{W}{\sin\varphi} \right)$$

$$F_i' = R^2 \sum_{j=1}^{N} (b_{ij} + R'^2 h_{ij})\, U_j + R^{-1}R' \sum_{j=1}^{N} g_{ji}F_j +$$

$$+ R^2R'h_i\,(R'U_0 + W/\sin\varphi) \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{2.11}$$

Здесь постоянные коэффициенты для удобства обозначены так же как и в уравнениях (1.12), однако в отличие от (1.12) они определяются по формулам

$$g_{ij} = 2\delta_{ij} - c_{ij}/a_{ii}, \quad g_i = 1/a_{ii}, \quad f_i = \tfrac{1}{2}d_{0i}/a_{ii} \tag{2.12}$$

$$h_{ij} = d_{ij} - \sum_{k=1}^{N} \frac{c_{ik}c_{jk}}{a_{kk}}, \quad h_i = d_{0i} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \frac{d_{0k}}{a_{kk}}\, c_{ik}$$

$$\delta_{ij} = 0 \ \text{при} \ i \neq j, \quad \delta_{ij} = 1 \ \text{при} \ i = j$$

Граничные условия (2.7) с учетом (2.10) записываются в таком же виде как и (1.13), т. е.

$$\ddot{F}_i + gR^2 \sum_{j=1}^{N} b_{ij}U_j = 0 \ \text{при} \ x = H \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{2.13}$$

Значение функции (2.4) при $\alpha = 1$ с учетом (2.9)—(2.11) записывается как

$$\Phi|_{\alpha=1} = RR' \sum_{i=1}^{N} h_iU_i + 2R^{-2}F_0 + R^{-2} \sum_{i=1}^{N} f_iF_i + k_0R \left(R'U_0 + \frac{W}{\sin\varphi} \right) \tag{2.14}$$

где в отличие от (1.14) коэффициент k_0 определяется по формуле

$$4k_0 = 1 - \sum_{j=1}^{N} \frac{d_{0j}^2}{a_{jj}} \tag{2.15}$$

При решении задачи об осесимметричных колебаниях жидкости в деформируемой полости вращения при заданных нормальных перемещениях ее стенки сначала определяются функции $U_0(x, t)$ и $F_0(x, t)$ в виде интегралов (2.2), (2.9) и затем интегрируются дифференциальные уравнения (2.11) с граничными условиями (2.6), (2.13). Однако для удобства решения по единообразному алгоритму, особенно связанной задачи гидроупругости, интегралы (2.2), (2.9) можно заменить соответствующими дифференциальными уравнениями

$$U_0' = -2R^{-1}R'U_0 - 2R^{-1}(W/\sin\varphi) \tag{2.16}$$

$$F_0' = R^2(\tfrac{1}{2} + k_0R'^2)\, U_0 + R^2R'k_0(W/\sin\varphi) + 2R^{-1}R'F_0 +$$

$$+ R^2R'^2 \sum_{j=1}^{N} h_jU_j + R^{-1}R' \sum_{j=1}^{N} f_jF_j$$

с граничными условиями

$$U_0 = -2\int_0^1 W_0\alpha\, d\alpha \qquad \text{при} \quad x = x_0 \tag{2.17}$$

Таблица 2

m	1	2	3
μ_m	8,247436	1,11832	0,52288
μ_m^*	8,247436	1,11834	0,52318
$\bar{\mu}_m$	8,250000	1,13889	0,57000

$$\ddot{F}_0 + (g/2)\,R^2 U_0 = 0 \qquad \text{при} \quad x = H$$

Они добавляются соответственно к уравнениям (2.11) и граничным условиям (2.6), (2.13).

Если принять $\varphi_i(\alpha) = J_0(\nu_i\alpha)$, где ν_i — i-ый корень уравнения $J_0'(\nu) = 0$, то $a_{ij} = 0$, $b_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

В одночленном приближении при расчете осесимметричных колебаний ($N = 1$; $n = 0$) в качестве заданной функции депланации поперечных сечений жидкости удобно использовать функцию $\varphi_1(\alpha) = 2\alpha^2 - 1$, удовлетворяющую условию (2.3). Для нее коэффициенты (2.8), (2.12) и (2.15) будут

$$a_{11} = 1/96, \;\; b_{11} = 1/6, \;\; d_{11} = d_{01} = 1/12, \;\; c_{11} = 0 \tag{2.18}$$

$$g_{11} = 2, \;\; g_1 = 96, \;\; f_1 = 4, \;\; h_{11} = h_1 = k_0 = 1/12$$

Рассмотрим цилиндрическую полость радиуса R с неподвижным плоским дном, на глубину H заполненную жидкостью со свободной поверхностью ($g = 0$). Нормальное перемещение боковой стенки задается в виде $W = \cos(\lambda_m x/R)$, $\lambda_m = (2m - 1)\pi R/2H$, $m = 1, 2, \ldots$. Обобщенная масса жидкости, соответствующая данной форме перемещений, на основании точного решения для потенциального движения жидкости будет

$$m_m = \pi\rho R^2 H \frac{I_0(\lambda_m)}{\lambda_m I_1(\lambda_m)}$$

При учете депланации по форме $\varphi_1(\alpha) = 2\alpha^2 - 1$, т. е. при $u_x = U_0 + U_1\varphi_1(\alpha)$, а также при использовании гипотезы плоских сечений жидкости ($u_x = U_0$) на основании приближенного метода вместо m_m получаем соответственно следующие выражения для обобщенной массы:

$$m_m^* = \pi\rho R^2 H \left(\frac{2}{\lambda_m^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\,\frac{\lambda_m^2}{16 + \lambda_m^2}\right)$$

$$\overline{m}_m = \pi\rho R^2 H \left(\frac{2}{\lambda_m^2} + \frac{1}{4}\right)$$

В табл. 2 для сравнения приведены значения коэффициентов $\mu_m = m_m/(\pi\rho R^2 H)$, $\mu_m^* = m_m^*/(\pi\rho R^2 H)$ и $\bar{\mu}_m = \overline{m}_m/(\pi\rho R^2 H)$ при $H = \pi R$; $m = 1, 2, 3$. Как видно, решение при учете одной функции $\varphi_1(\alpha) = 2\alpha^2 - 1$ имеет весьма высокую точность.

3. Неосесимметричные колебания оболочки вращения с жидкостью. Рассмотрим вынужденные гармонические колебания упругой оболочки вращения, частично заполненной жидкостью, под действием поверхностных нагрузок

$$q_x = q_{xn}(s) \cos n\theta \sin \omega t, \;\; q_r = q_{rn}(s) \cos n\theta \sin \omega t \tag{3.1}$$

$$q_\theta = q_{\theta n}(s) \sin n\theta \sin \omega t$$

Перемещения и внутренние погонные усилия в оболочке (фигура) определяются в виде

$$\{\xi, \eta, \vartheta, X, Y, M\} = \{\xi_n, \eta_n, \vartheta_n, X_n, Y_n, M_n\} \cos n\theta \sin \omega t \tag{3.2}$$

$$\{v, S\} = \{v_n, S_n\} \sin n\theta \sin \omega t$$

Далее, рассматривая в качестве неизвестных функции $\xi_n(s)$, $\eta_n(s), \ldots, S_n(s)$, индекс n будем опускать.

Для неосесимметричных колебаний ($n = 1, 2, \ldots$) осевые перемещения жидкости и гидродинамическое давление в одночленном приближении при $N = 1$, $\varphi_1(\alpha) = \alpha^n$ согласно (1.2), (1.3) будут

$$u_x = U_1(s)\,\alpha^n \cos n\theta \sin \omega t, \quad p = \rho\omega^2\Phi(s, \alpha) \cos n\theta \sin \omega t \tag{3.3}$$

В качестве неизвестной наряду с $U_1(s)$ будем рассматривать $P_1(s) = -\rho\omega^2 F_1(s)$, где F_1 определяется по формуле (1.10). Учитывая, что

$$W/\sin\varphi = \eta - R'\xi, \quad R' = \operatorname{ctg}\varphi, \quad dx = \sin\varphi\, ds$$

$$\cos\varphi = \varkappa, \quad \sin\varphi = \sigma \tag{3.4}$$

уравнения движения жидкости (1.12) при $N = 1$ запишем в виде

$$dU_1/ds = -\varkappa R^{-1} g_{11} U_1 - g_1 (\rho\omega^2)^{-1} \sigma R^{-4} P_1 - f_1 \sigma R^{-1} \eta + f_1 \varkappa R^{-1} \xi \tag{3.5}$$

$$dP_1/ds = -\rho\omega^2 (b_{11} + \varkappa^2\sigma^{-2} h_{11})\, \sigma R^2 U_1 + g_{11} \varkappa R^{-1} P_1 - \rho\omega^2 \varkappa R^2 \eta + \rho\omega^2 \varkappa^2 \sigma^{-1} \xi$$

Функция $\Phi(s, \alpha)$, представляющая распределение гидродинамического давления (3.3), на основании (1.4) с учетом первого уравнения (3.5) в рассматриваемом случае ($N = 1$, $\varphi_1 = \alpha^n$) приводится к виду

$$\Phi = (k_0\eta - k_0\varkappa\sigma^{-1}\xi + h_1\varkappa\sigma^{-1}U_1)\, R\alpha^n \,[1 - (n + 2)(1 - \alpha^2)] - \tag{3.6}$$

$$- (\rho\omega^2)^{-1} f_1 R^{-2} \alpha^n \,[1 + (n/2)(1 - \alpha^2)]\, P_1$$

Введем для n-й гармоники ($n = 1, 2, \ldots$) векторы обобщенных перемещений и соответствующих им с точностью до множителя π обобщенных сил:

$$\mathbf{z} = [\xi \;\; \eta \;\; R\vartheta \;\; v \;\; U_1]^T, \quad \mathbf{Z} = [RX \;\; RY \;\; M \;\; RS \;\; P_1]^T \tag{3.7}$$

Дифференциальные уравнения колебаний ортотропной оболочки вращения с учетом ее предварительного осесимметричного напряженного состояния и действующего на нее гидродинамического давления, которое определяется по формулам (3.3) и (3.6) при $\alpha = 1$, объединяются с дифференциальными уравнениями колебаний жидкости (3.5) и записываются в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} d\mathbf{z}/ds \\ d\mathbf{Z}/ds \end{Bmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{\Gamma} & -\mathbf{A}^T \end{Vmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{Z} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

где $\mathbf{A} = \|\alpha_{ij}\|$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T = \|\beta_{ij}\|$, $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^T = \|\gamma_{ij}\|$ $(i, j = 1 \div 5)$, $\mathbf{Q} = R\,[q_{xn} \;\; q_{rn} \;\; 0 \;\; q_{\theta n} \;\; 0]^T$.

Уравнения ортотропной оболочки симметричной относительно срединной поверхности структуры здесь получены по аналогии с уравнениями работы [3], в которой оболочка считалась изотропной и не учитывалось ее предварительное напряженное состояние. Уравнения (3.8) имеют характерную для самосопряженных систем форму [3].

Коэффициенты уравненений (3.8) для неосесимметричных колебаний определяются по следующим формулам:

$$\alpha_{12} = -\mu_2 R^{-1}\sigma,\quad \alpha_{13} = R^{-1}\varkappa,\quad \alpha_{14} = -\mu_2 n R^{-1}\sigma,\quad \alpha_{22} = -\mu_2 R^{-1}\varkappa$$

$$\alpha_{23} = -R^{-1}\sigma,\quad \alpha_{24} = -\mu_2 n R^{-1}\varkappa,\quad \alpha_{31} = \mu_2 n^2 R^{-1}\varkappa,\quad \alpha_{32} = -\mu_2 n^2 R^{-1}\sigma$$

$$\alpha_{33} = (1-\mu_2) R^{-1}\varkappa,\quad \alpha_{34} = -\mu_2 n R^{-1}\sigma,\quad \alpha_{41} = nR^{-1}\sigma,\quad \alpha_{42} = nR^{-1}\varkappa$$

$$\alpha_{44} = R^{-1}\varkappa,\quad \alpha_{51} = f_1 R^{-1}\varkappa,\quad \alpha_{52} = -f_1 R^{-1}\sigma,\quad \alpha_{55} = -g_{11} R^{-1}\varkappa$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{15} = \alpha_{21} = \alpha_{25} = \alpha_{35} = \alpha_{43} = \alpha_{45} = \alpha_{53} = \alpha_{54} = 0$$

$$\beta_{11} = (1-\mu_1\mu_2) B_1^{-1} R^{-1}\sigma^2,\quad \beta_{12} = (1-\mu_1\mu_2) B_1^{-1} R^{-1}\sigma\varkappa$$

$$\beta_{22} = (1-\mu_1\mu_2) B_1^{-1} R^{-1}\varkappa^2,\quad \beta_{33} = (1-\mu_1\mu_2) D_1^{-1} R$$

$$\beta_{44} = (RGh)^{-1},\quad \beta_{55} = -g_1 (\rho\omega^2 R^4)^{-1}\sigma,$$

$$\beta_{13} = \beta_{14} = \beta_{15} = \beta_{23} = \beta_{24} = \beta_{25} = \beta_{34} = \beta_{35} = \beta_{45} = 0,\quad \beta_{ij} = \beta_{ji}$$

$$\gamma_{11} = n^2 D_{12} R^{-3} + (n^4 D_2 R^{-3} + n^2 R^{-1} N_2^\circ)\varkappa^2 - k_0\rho\omega^2 R^2\varkappa^2\sigma^{-1} - \rho_0\omega^2 hR$$

$$\gamma_{12} = -(n^4 D_2 R^{-3} + n^2 R^{-1} N_2^\circ)\varkappa\sigma + k_0\rho\omega^2 R^2\varkappa,\quad \gamma_{13} = -n^2 R^{-3}(D_{12} + D_2\varkappa^2)$$

$$\gamma_{14} = -(n^2 D_2 R^{-3} + nR^{-1} N_2^\circ)\varkappa\sigma,\quad \gamma_{15} = h_1\rho\omega^2 R^2\varkappa^2\sigma^{-1}$$

$$\gamma_{22} = B_2 R^{-1} + (n^4 D_2 R^{-3} + n^2 R^{-1} N_2^\circ)\sigma^2 - k_0\rho\omega^2 R^2\sigma - \rho_0\omega^2 hR$$

$$\gamma_{23} = n^2 D_2 R^{-3}\sigma\varkappa,\quad \gamma_{24} = nB_2 R^{-1} + (n^3 D_2 R^{-3} + nR^{-1} N_2^\circ)\sigma^2$$

$$\gamma_{25} = -h_1\rho\omega^2 R^2\varkappa,\quad \gamma_{33} = (n^2 D_{12} + D_2\varkappa^2) R^{-3} + R^{-1} N_1^\circ$$

$$\gamma_{34} = nD_2 R^{-3}\varkappa\sigma,\quad \gamma_{44} = (n^2 B_2 + N_2^\circ\sigma^2) R^{-1} - \rho_0\omega^2 hR$$

$$\gamma_{55} = -\rho\omega^2 (b_{11} + \varkappa^2\sigma^{-2} h_{11}) R^2\sigma,\quad \gamma_{35} = \gamma_{45} = 0,\quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}$$

$$B_1 = E_1 h,\quad B_2 = E_2 h,\quad D_1 = E_1 h^3/12,\quad D_2 = E_2 h^3/12,\quad D_{12} = Gh^3/3 \tag{3.9}$$

$h(s)$, ρ_0, E, G, μ — толщина, плотность, модуль нормальной упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала оболочки; $N_1^\circ(s)$, $N_2^\circ(s)$ — погонные усилия в срединной поверхности оболочки в предварительном напряженном состоянии; индексы *1* и *2* у E, μ и $N^\circ(s)$ указывают на меридиональное и окружное направления ($E_1\mu_2 = E_2\mu_1$). Коэффициенты g_{11}, g_1, f_1, b_{11}, h_{11}, h_1, k_0 при $n = 1, 2, \ldots$ определяются по формулам (1.15).

Уравнения (3.8) пригодны также для составных оболочек, когда толщина $h(s)$, угол $\varphi(s)$, усилия $N_1^\circ(s)$, $N_2^\circ(s)$ и характеристики материала могут изменяться скачкообразно.

Граничные условия на краях оболочки $s = s_0$ и $s = l$ записываются для соответствующих компонент вектора $\mathbf{z}$ или вектора $\mathbf{Z}$, или же как условия ее сопряжения с кольцом.

Граничные условия для жидкости на дне (1.7) и на свободной поверхности (1.13) в рассматриваемом случае имеют вид

$$b_{11}U_1 = -\int_0^1 W_0(\alpha)\,\alpha^{n+1}\,d\alpha \quad \text{при} \quad s = s_0 \tag{3.10}$$

$$P_1 + \rho g b_{11} R^2 U_1 = 0 \quad \text{при} \quad s = s_H$$

При частичном заполнении оболочки для ее несмоченной части ($s_H < s < l$) в системе (3.8) следует опустить уравнения (3.5) для $U_1(s)$, $P_1(s)$ и члены, представляющие гидродинамические нагрузки.

4. Осесимметричные колебания оболочки вращения с жидкостью. Для этого случая ($n = 0$) в разложении (2.1) ограничимся одной функцией $\varphi_1(\alpha) = 2\alpha^2 - 1$:

$$u_x = [U_0(s) + U_1(s)(2\alpha^2 - 1)] \sin \omega t \tag{4.1}$$

Рассматривая в качестве неизвестных наряду с $U_0(s)$, $U_1(s)$ функции $P_0(s) = -\rho\omega^2 F_0(s)$ и $P_1(s) = -\rho\omega^2 F_1(s)$, запишем уравнения (2.11), (2.16) с учетом (3.4) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
dU_0/ds &= -2R^{-1}\varkappa U_0 - 2R^{-1}(\sigma\eta - \varkappa\xi)\\
dU_1/ds &= -g_{11}R^{-1}\varkappa U_1 - g_1(\rho\omega^2R^4)^{-1}\sigma P_1 - f_1R^{-1}(\varkappa U_0 + \sigma\eta - \varkappa\xi)\\
dP_0/ds &= -\rho\omega^2R^2\sigma(1/2 + k_0\varkappa^2\sigma^{-2})U_0 - k_0\rho\omega^2R^2\varkappa(\eta - \varkappa\sigma^{-1}\xi) +\\
&+ 2R^{-1}\varkappa P_0 - h_1\rho\omega^2R^2\varkappa^2\sigma^{-1}U_1 + f_1R^{-1}\varkappa P_1\\
dP_1/ds &= -\rho\omega^2R^2\sigma(b_{11} + h_{11}\varkappa^2\sigma^{-2})U_1 + g_{11}R^{-1}\varkappa P_1 -\\
&- h_1\rho\omega^2R^2\varkappa\sigma^{-1}(\varkappa U_0 + \sigma\eta - \varkappa\xi)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Соответственно представлению (4.1) при $n = 0$, $N = 1$ и $\varphi_1(\alpha) = 2\alpha^2 - 1$ функция (2.4) с учетом первых двух уравнений (4.2) и (3.4) приводится к виду

$$\begin{aligned}
\Phi &= -2(\rho\omega^2R^2)^{-1}P_0 - f_1(\rho\omega^2R^2)^{-1}[1 - 3(1 - \alpha^2)^2]P_1 +\\
&+ R[k_0\sigma^{-1}(\varkappa U_0 + \sigma\eta - \varkappa\xi) + h_1\varkappa\sigma^{-1}U_1]\cdot[1 - 6\alpha^2(1 - \alpha^2)]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Для осесимметричных колебаний ($n = 0$) векторы обобщенных перемещений и соответствующих им с точностью до множителя 2π обобщенных сил будут

$$\mathbf{z} = [\xi \;\; \eta \;\; R\vartheta \;\; U_0 \;\; U_1]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{Z} = [RX \;\; RY \;\; M \;\; P_0 \;\; P_1]^{\mathrm{T}} \tag{4.4}$$

В дифференциальных уравнениях оболочки в этом случае необходимо положить $n = 0$, а при вычислении гидродинамического давления $p = \rho\omega^2\Phi(1, \alpha)\sin \omega t$ на поверхности оболочки использовать выражение (4.3) при $\alpha = 1$. К уравнениям оболочки добавляются уравнения осесимметричных колебаний жидкости (4.2). В результате получается система типа (3.8), где в данном случае $\mathbf{Q} = R\,[q_{x0}\; q_{y0}\; 0\; 0\; 0]^T$.

Для осесимметричных колебаний в уравнениях (3.8) необходимо заменить следующие из коэффициентов (3.9), вычислив их как

$$\begin{gathered}
\alpha_{41} = 2R^{-1}\varkappa, \quad \alpha_{42} = -2R^{-1}\sigma, \quad \alpha_{44} = -2R^{-1}\varkappa, \quad \alpha_{54} = -f_1R^{-1}\varkappa\\
\beta_{44} = 0; \quad \gamma_{14} = k_0\rho\omega^2R^2\varkappa^2\sigma^{-1}, \quad \gamma_{24} = -k_0\rho\omega^2R^2\varkappa\\
\gamma_{44} = -\rho\omega^2(1/2 + k_0\varkappa^2\sigma^{-2})R^2\sigma, \quad \gamma_{45} = -h_1\rho\omega^2R^2\varkappa^2\sigma^{-1}
\end{gathered} \tag{4.5}$$

В выражениях для остальных коэффициентов (3.9), кроме замененных на (4.5), необходимо положить $n = 0$. Параметры g_{11}, g_1, f_1, b_{11}, h_{11}, h_1, k_0 для осесимметричных колебаний в выражениях (3.9) с учетом замен (4.5) берутся в виде (2.18).

Граничные условия на дне и на свободной поверхности жидкости (2.6), (2.13)

Таблица 3

H/a	0,1	0,5	1,0	1,4	1,8
$(\Omega_1^2)_1$	1,03471	1,20935	1,56682	2,12076	3,55542
$(\Omega_1^2)_2$	1,03466	1,20772	1,56014	2,12290	3,93715
$(\Omega_1^2)_*$	1,04	1,208	1,560	2,12	3,97

Таблица 4

3	4	5	6	7	8	10
100,0	76,0	—	—	51,0	54,0	69,8
101,0	78,7	63,6	54,4	50,8	52,8	67,3
101,76	79,29	63,99	54,64	51,02	52,87	67,51

и (2.17) в рассматриваемом случае ($N=1$, $\varphi_1(\alpha) = 2\alpha^2 - 1$, $b_{11} = 1/6$) для уравнений (4.2) будут

$$U_0 = -2 \int_0^1 W_0(\alpha)\, \alpha\, d\alpha, \quad U_1 = -6 \int_0^1 W_0(\alpha)(2\alpha^2 - 1)\, \alpha\, d\alpha \quad \text{при} \quad s = s_0 \tag{4.6}$$

$$P_0 + (\rho g/2) R^2 U_0 = 0, \quad P_1 + (\rho g/6) R^2 U_1 = 0 \quad \text{при} \quad s = s_H$$

5. Численное решение уравнений. Общее решение полученных обыкновенных дифференциальных уравнений строится путем их численного интегрирования как в задаче Коши в виде суммы решения неоднородных уравнений и линейно независимых решений однородных уравнений, удовлетворяя при этом начальные граничные условия при $x = x_0$ ($s = s_0$), [3]. Константы для линейно независимых решений однородных уравнений определяются из граничных условий при $x = H$ ($s = s_H$).

Для замкнутой снизу оболочки (полости) можно считать, что вместо полюса она имеет при $x = x_0$ недеформируемое плоское дно достаточно малого радиуса R_0, жестко связанное с оболочкой. Решение гидродинамической задачи о колебаниях жидкости в подвижной полости можно получить путем численного интегрирования уравнений по методу Рунге — Кутта.

При поперечных колебаниях ($n = 1$) недеформируемой полости вращения, частично заполненной жидкостью, в плоскости Oxy (фигура):

$$W/\sin\varphi = -V_0(t) - \psi_0(t)(x + RR')$$

Коэффициенты уравнений (1.12) в одночленном приближении ($N = 1$, $\varphi_1(\alpha) = \alpha$) берутся в виде (1.15) при $n = 1$. В двучленном приближении ($N = 2$, $\varphi_1(\alpha) = \alpha$, $\varphi_2(\alpha) = \alpha - (14/9)\alpha^3$), которое соответствует (1.16) при $n = 1$, эти коэффициенты будут $g_{11} = 17/7$, $g_{12} = 2/21$, $g_{21} = -1080/119$, $g_{22} = 243/119$, $g_1 = 96/7$, $g_2 = 116\,640/119$, $f_1 = 24/7$, $f_2 = g_{21}$, $b_{11} = 1/4$, $b_{12} = b_{21} = -1/108$, $b_{22} = 11/324$, $h_{11} = 1/17$, $h_{12} = h_{21} = -10/306$, $h_{22} = 100/5508$, $h_1 = k_0 = h_{11}$, $h_2 = h_{12}$.

В табл. 3 для сравнения приведены значения квадрата безразмерной низшей частоты гравитационных колебаний жидкости $\Omega_1^2 = \omega_1^2 a/g$ в неподвижной сферической полости радиуса a при некоторых глубинах заполнения H, отсчитываемых от нижнего полюса. Значения $(\Omega_1^2)_1$ и $(\Omega_1^2)_2$ получены на основе численного решения уравнений (1.12) для одночленного ($N = 1$) и двучленного ($N = 2$) приближений, соответственно, при $x_0/a = 5 \cdot 10^{-4}$; значения $(\Omega_1^2)_*$ получены по методу Ритца [7].

Большим удобством использования обыкновенных дифференциальных уравнений для решения гидродинамической задачи при заданных перемещениях w стенки полости, является то, что решение получается в один «заход» сразу для всех глубин заполнения: при интегрировании уравнений граничные условия при $x = H$ можно ставить на любом шаге, последовательно увеличивая H.

При численном интегрировании уравнений колебаний тонких упругих оболочек с жидкостью (3.8) используется метод ортогонализации С. К. Годунова [3].

В качестве примера приведем низшие собственные частоты неосесимметричных колебаний (в герцах) усеченной изотропной конической оболочки ($E = 6{,}9 \cdot 10^6$ Н/см^2, $\rho_0 = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ кг/см^3, $\mu = 0{,}29$, $\varphi = 105°$, $h = 0{,}053$ см, $R_0 = 30$ см, $s_0 = 0$, $l = 58$ см), которая на торцах жестко приварена к толстым плитам и полностью заполнена жидкостью ($\rho = 10^{-3}$ кг/см^3, $s_H = l$).

В табл. 4 в первой строке даны значения n, во второй и третьей строках соответственно представлены экспериментальные и расчетные результаты, полученные в [8], а в четвертой строке — результаты численного интегрирования уравнений (3.8) с граничными условиями (3.10) при $W_0 = 0$ и $g = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93.013.16509).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григолюк Э. И.* Проблемы взаимодействия оболочек с жидкостью//Тр. VII Всес. конф. по теории пластин и оболочек. М.: Наука, 1970. С. 755—778.
2. *Григолюк Э. И., Шклярчук Ф. Н.* Уравнения возмущенного движения тела с тонкостенной упругой оболочкой, частично заполненной жидкостью. ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 3. С. 401—411.
3. *Бидерман В. Л.* Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 489 с.
4. *Шмаков В. П., Мельникова Л. М., Яблоков В. А.* Применение численных методов к задачам о колебаниях упругих оболочек вращения, заполненных идеальной несжимаемой жидкостью//Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирск: Изд-во Новосиб. электротехн. ин-та, 1973. С. 271—290.
5. *Шклярчук Ф. Н.* О вариационных методах расчета осесимметричных колебаний оболочек вращения, частично заполненных жидкостью//Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1966. С. 921—926.
6. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г., Шклярчук Ф. Н.* Об одном методе расчета колебаний жидкости, частично заполняющей упругую оболочку вращения. Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 3. С. 74—80.
7. *Фещенко С. Ф. и др.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. Киев: Наук. думка, 1969, 252 с.
8. *Горбунов Ю. А., Новохатская Л. М., Шмаков В. П.* Теоретическое и экспериментальное исследование спектра собственных неосесимметричных колебаний конической оболочки с жидкостью при наличии внутреннего давления//Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1975. С. 47—52.

Москва

Поступила в редакцию
16.XII.1993