

УДК 539.3

© 1994 г. Е. З. КОРОЛЬ

К ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ И РАЗРУШЕНИЮ ТОНКИХ ПОКРЫТИЙ ИЗМЕНЯЕМОЙ ТОЛЩИНЫ

Тонкие слои широко используются как покрытие в высокотемпературных композициях. Наносятся они на подложку (керамику, углеграфит, металл) в условиях высокотемпературного нагрева и ненапряженном, но термомеханически деформированном состоянии, и вследствие различия термомеханических свойств слоев при остывании в такой слоистой полиматериальной композиции, как правило, возникают межфазные (межслойные) остаточные термотехнологические напряжения σ^0 . При дальнейшей обработке или использовании композиции в конструкции эти напряжения могут быть причиной разрушения композиции или искажения ее формы. Например, при шлифовке и полировке поверхности покрытий, в которых остаточные напряжения сжимающие, может быть достигнуто такое соотношение изгибной жесткости D (δ/δ_0), податливости подложки (по Винклеру) k_0 , изменяющихся вследствие уменьшения толщины от δ_0 до δ^* , и величины σ^0 , при котором возможна потеря статической устойчивости тонкого покрытия. В покрытиях с растягивающими остаточными напряжениями изменяющаяся частота собственных колебаний ω может быть сравнима с частотой ω^* движения обрабатывающего инструмента и возможно резонансное состояние. В обоих случаях в закритическом состоянии хрупкий тонкий слой, обладающий малой несущей способностью при растяжении, разрушается и покрывается упорядоченной сеткой поверхностных трещин. Ниже дается анализ условий достижения критического состояния — статической потери устойчивости тонких изменяемой толщины покрытий на балке конечной длины L и на прямоугольной пластине ($a \times b$). И в том, и в другом случаях покрытие связано с подложкой (основанием) по Винклеру; нормальная составляющая реакции основания пропорциональна прогибу w тонкого слоя: $q = -k_0 w$; касательная составляющая реакции основания при изгибе слоя пренебрежимо мала $q \gg \tau$; влияние краев (краевой эффект) не учитывается; число волн целое и достаточно велико, а длины волн (l_x, l_y) $< [L, (a, b)]$ значительно меньше размеров балки или пластины. Края слоя на подложке свободны от нагрузки (перерезывающие силы Q_x, Q_y или обобщенные перерезывающие силы R_x и R_y [1, 2], а также углы поворота $w_{,x}$ и $w_{,y}$ равны нулю). Толщина основания — подложки такова, что деформация слоя вызывает только локальную деформацию подложки вблизи линии раздела.

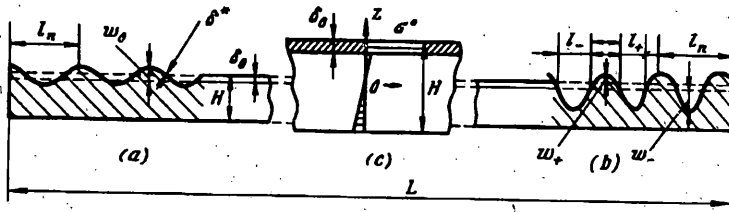
Процесс изменения (утонения) толщины — это смена равновесных состояний, сопровождающихся изменением остаточных нормальных усилий N_x и N_y , а также изгибной жесткости D по известным зависимостям $N = N_0 \Phi(\delta/\delta_0)$; $D = D_0 \Psi(\delta/\delta_0)$, где N_0 и D_0 — начальные значения усилия и жесткости, а $\Phi(\delta/\delta_0)$ и $\Psi(\delta/\delta_0)$ — функции изменения.

Рассматривается состояние, предшествующее потере статической устойчивости тонкого слоя линейно-упругого слоя на линейно-упругом винклеровом основании, и используются положения из [1–7].

1. Тонкий упругий слой на прямой линейно-упругой балке прямоугольного сечения ($B \times H$). Связывая прогиб тонкого слоя w с декартовой системой координат, ось координат (x) которой совпадает со срединной линией (фиг. 1), а ось абсцисс (y) — по внешней нормали к ней, запишем уравнение изгиба [1] в виде

$$Dw^{IV} + Nw'' + k_0 w = 0 \quad (1.1)$$

и соответственно краевые (граничные) условия с учетом связей изгибающего



Фиг. 1

момента M и изменения кривизны срединной линии κ , перерезывающей силы Q и прогиба w и выражения для кривизны $\kappa = -w''$, а также закона плоских сечений

$$w'(0) = w'(L) = w'''(0) = w'''(L) = 0 \quad (1.2)$$

В результате имеем однородную краевую задачу с неопределенными собственными значениями D^* и N^* или, в конечном счете, толщины δ^* . Вводя коэффициенты $2\lambda^2 = N/D$ и $k^4 = k_0/D$ и принимая форму прогиба в симметричном виде

$$w(x) = w_0 \cos 2\pi x/l_n; \quad l_n = L/n \quad (1.3)$$

получаем решение соответствующей задачи Штурма — Лиувилля о собственных значениях

$$\lambda^2 = 1/2 [(2\pi/l_n)^2 + k^4 (2\pi/l_n)^{-2}] \quad (1.4)$$

при которых удовлетворяется однородное уравнение (1.1) и однородные краевые условия (1.2). Длина волны l_n (или число волн n) определяется из условия минимума величины N , чему соответствует

$$d\lambda/dl_n = 0, \quad d^2\lambda/dl_n^2 < 0 \quad \text{при} \quad l_n = l_n^* \quad (1.5)$$

После подстановки (1.4) в (1.5) и соответствующего решения имеем

$$\lambda_{\min} = \lambda^* = k^*, \quad k^* = (k_0/D^*)^{1/4} \quad (1.6)$$

откуда следует зависимость критической длины волны

$$l_n^* = 2\pi/k^* = 2\pi(D^*/k_0)^{1/4} \quad (1.7)$$

от критической толщины δ^* тонкого слоя. Из первого равенства (1.6) для значения δ^* получим обыкновенное алгебраическое уравнение

$$N_0^2 \Phi^2(\delta^*/\delta_0) = 4k_0 D_0 \Psi(\delta^*/\delta_0) \quad (1.8)$$

Таким образом, зная зависимости жесткости D и остаточных усилий N тонкого упругого слоя изменяющейся толщины, значение критической толщины δ^* определяется из уравнений (1.8), соответствующая длина волны l_n^* — выражением (1.7), а число волн n равно

$$n = L/l_n = Lk^*/2\pi = (L/2\pi) (k_0/D^*)^{1/4} \quad (1.9)$$

Для ряда покрытий функции изменения усилий $\Phi(\delta/\delta_0)$ и жесткости $\Psi(\delta/\delta_0)$ могут быть представлены степенными функциями, например, $\Phi(\delta/\delta_0) = (\delta/\delta_0)^p$ и $\Psi(\delta/\delta_0) = (\delta/\delta_0)^s$. Тогда по (1.7) и (1.8) получаем для критической толщины

$$\delta^* = \delta_0 (4k_0 D_0 / N_0^2)^{\xi}, \quad \xi = 1/(2p - s) \quad (1.10)$$

и для длины волны

$$l_n^* = 2\pi (D_0/k_0)^{1/4} (4k_0 D_0/N_0^2)^{1/4} \quad (1.11)$$

В частном случае при $p = 1$, $s = 3$, $k_0 = E_0/H$ и $D_0 = \sqrt{12} E \delta_0^3$

$$\delta^* = 3 (N_0/\delta_0)^2 (H/E_0 E), \quad l_n^* = 2\pi \left(\sqrt[4]{\frac{H^4}{\delta_0^6} \frac{N_0^6}{E_0^4 E^2}} \right)^{1/4} \quad (1.12)$$

и для значений $N_0 = 10$ кг/см; $\delta_0 = 0,1$ см; $H = 0,5$ см; $L = 20$ см; $E_0 = 10^4$ МПа и $E = 10^7$ МПа имеем $\delta^* = 1,5 \cdot 10^{-2}$ мм; $l_n^* = 4,659$ мм; $n = 42,983 = 43$ ($l_n^* = 4,651$ мм).

Итак, если сжимающее остаточное усилие N в тонком линейноупругом слое изменяемой толщины линейной жесткости D достигает такого значения, что выполняется равенство $N^{*2} = 4k_0 D^*$ при толщине δ^* , определяемой по (1.8), то слой может потерять статическую устойчивость с волнообразованием после устойчивости с длиной волны

$$l_n^* = 2\pi (D^*/k_0)^{1/4} \quad (1.13)$$

Следует отметить, что приведенные оценки для балки конечной длины L мало отличаются (практически совпадают) от оценок для бесконечной балки, что объясняется игнорированием краевого эффекта в формулировке постановки рассматриваемой задачи.

Если основание — подложка или (и) тонкое покрытие деформируется нелинейно упруго, то задача анализа условий потери статической устойчивости осложняется, однако, используя такие упрощения, как аппроксимация жесткости слоя и податливости подложки кусочно-постоянными или кусочно-линейными зависимостями, можно применять изложенные выше оценки основных характерных величин по средним их значениям — длины волнообразования и критической толщины слоя.

2. Тонкий слой кусочно-постоянной жесткости на прямой балке кусочно-постоянной податливости. Если тонкое покрытие имеет цилиндрическую жесткость, нелинейно зависящую от величины прогиба так, что зависимость можно аппроксимировать кусочно-постоянной функцией

$$D = \begin{cases} D_+ & \text{при } w > 0 \\ D_- & \text{при } w < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

и подложка имеет податливость, определяемую выражением

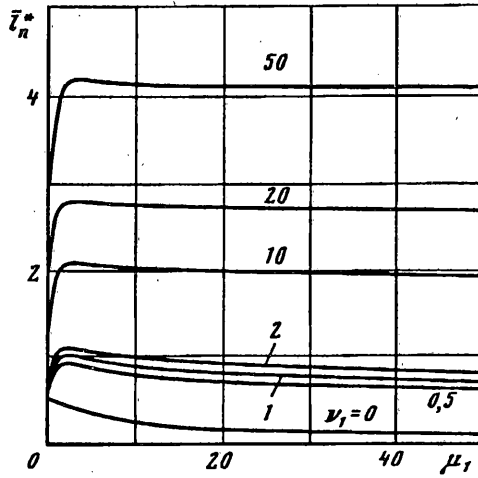
$$k_0 = \begin{cases} k_+ & \text{при } w > 0 \\ k_- & \text{при } w < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

то уравнение (1.1) с кусочно-постоянными коэффициентами и однородными краевыми условиями (1.2) имеет периодическое решение (фиг. 1) в симметричном виде, удовлетворяющее условию уравнивания реактивной нагрузки

$$w(x) = \begin{cases} w_- \cos(\pi x/L_-) & \text{при } 0 \leq x \leq 1/2 L_-, L - 1/2 L_- \leq x \leq L \\ & 1/2 L_- + l_+ + i l_n \leq x \leq 1/2 L_- + (i+1) l_n \\ w_+ \cos(\pi x/L_+) & \text{при } 1/2 L_- + i l_n \leq x \leq 1/2 L_- + l_+ + i l_n \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь приведено выражение для случая, когда краевые профили — впадины (фиг. 1, б).

Решению в форме (2.1) соответствуют две полусинусоиды (фиг. 1), причем в первом случае краевая волна вспучена, а во втором — впадая; полусинусоиды имеют соответствующие длины + (знак плюс соответствует вспучине, знак минус — впадине) и амплитуды, связанные соотношением $w_+/l_+ = w_-/L_-$.



Фиг. 2

Решение характеристической задачи дает выражение для продольного усилия

$$N = D_{\pm} (\pi/l_{\pm})^2 + k_{\pm} (\pi/l_{\pm})^{-2} \quad (2.4)$$

минимум которого достигается при

$$l_{\pm} = \pi (D_{\pm}/k_{\pm})^{1/4}, \quad l_n^* = l_+^* + l_-^* = \pi \left(\sqrt[4]{D_+/k_+} + \sqrt[4]{D_-/k_-} \right) \quad (2.5)$$

и равен

$$N^* = 2 (k_{\pm} D_{\pm}^*)^{1/2} \quad (2.6)$$

Из последних равенств следует, что потеря статической устойчивости слоя кусочно-постоянной жесткостью D_{\pm} на подложке с кусочно-постоянной податливостью k_{\pm} может наступить в том случае, когда произведения жесткостей и податливостей равны, т. е.

$$D_+ k_+ = D_- k_- \quad (2.7)$$

и при этом длина волны $l_n^* = L/n = l_+^* + l_-^*$ — и число волн определяются выражениями

$$n = L/l_n^*, \quad l_n^* = \pi \left(\sqrt[4]{D_+/k_+} + \sqrt[4]{D_-/k_-} \right) \quad (2.8)$$

На фиг. 1, а показаны симметричные формы потери устойчивости тонкого слоя изменяемой толщины на упругом основании одинаково сопротивляющегося; 1, б — разно сопротивляющегося; 1, с — эпюра остаточных напряжений.

Используя зависимости жесткостей D_{\pm} и остаточные усилия от толщины слоя δ , получаем из (2.6) формулу типа (1.8). Сравнивая полученные значения l_n^{V*} и рассмотренные в п. 1 ($l_n^* = 2\pi (D_c/k_c)^{1/4}$), отметим, что если средняя жесткость D_c и податливость k_c равны соответственно

$$D_c = 1/2 (D_+ + D_-), \quad k_c = 1/2 (k_+ + k_-) \quad (2.9)$$

то отношение длин волн равно

$$l_n^{v**} = l_n^{v*} / l_n^* = 1/2 [1 + (\mu_1 v_1)^{1/4}] / [(1 + \mu_1)/(1 + v_1)]^{1/4}$$

$$\mu_1 = D_- / D_+, \quad v_1 = k_- / k_+$$

Характерная зависимость $l_n^{v**}(\mu_1, v_1)$ представлена на фиг. 2, из которой видно, что с изменением величин μ_1 и v_1 в два раза в диапазоне $0,5 < (\mu_1, v_1) < 2,0$ отношение заключено в интервале $0,843 < l_n^{v**} < 1,207$, т. е. для определения длины волны с погрешностью, не превышающей $\sim 21\%$, можно использовать приближенную формулу для $l_n^* = 2\pi (D_c / k_c)^{1/4}$.

В рассмотренных задачах приведены оценки условий потери статической устойчивости и параметров деформации тонкого слоя на балке после потери устойчивости. При аналогичных оценках условий потери устойчивости тонких покрытий на пластинах число параметров увеличивается и для их однозначного определения необходимы дополнительные условия. Ниже рассмотрены такие оценки для однородного изотропного покрытия на однородной изотропной подложке — прямоугольной пластине ($a \times b$), когда отличны от нуля только продольные остаточные усилия ($N_x = N_y = N$), а усилия сдвига $T_{xy} = 0$, при условии минимальности суммы квадратов составляющих длин волн ($l_n^{**2} = l_x^2 + l_y^2 = 2l_x^2$).

3. Тонкий слой на прямоугольной пластине ($a \times b$). Полагая подложку линейно-упругой с коэффициентом постели (по Винклеру) k_0 , тонкий слой — линейно-упругим с изгибной жесткостью D и начальными усилиями $N_x = \sigma_x \delta_0$ и $N_y = \sigma_y \delta_0$, изменяющимися с изменением толщины слоя в соответствии с приведенными выше выражениями, используем уравнение изгиба тонкого слоя на упругом основании [3]

$$D \nabla^4 w + N_x w_{,xx} + N_y w_{,yy} + k_0 w = 0 \quad (3.1)$$

и краевые условия, соответствующие свободным краям, когда угол поворота и обобщенные перерезывающие усилия $R_x = -D [w_{,xxx} + (2 - \nu) w_{,xyy}]$ и $R_y = -D [w_{,yyy} + 2(1 - \nu) w_{,xxy}]$ равны нулю, т. е.

$$w_{,x}(0, y) = w_{,x}(a, y) = w_{,xxx}(0, y) = w_{,xxx}(a, y) = 0$$

$$w_{,y}(x, 0) = w_{,y}(x, b) = w_{,yyy}(x, 0) = w_{,yyy}(x, b) = 0 \quad (3.2)$$

$$w_{,xyy}(0, y) = w_{,xyy}(a, y) = w_{,xxy}(x, 0) = w_{,xxy}(x, b) = 0$$

Справедливость равенств третьей строки следует из равенств первой строки. При $N_x = N_y = N$ решение краевой задачи (3.1—3.2) может быть представлено в симметричном виде, так как прогиб удовлетворяет условию

$$\int_0^a \int_0^b k_0 w(x, y) dx dy = 0$$

$$w(x, y) = w_0 \cos(2\pi x / l_x) \cos(2\pi y / l_y) \quad (3.3)$$

где число волн в направлении $x - n = a / l_x$ и в направлении $y - m = b / l_y$. Из характеристического уравнения

$$D [(2\pi / l_x)^2 + (2\pi / l_y)^2]^2 - N [(2\pi / l_x)^2 + (2\pi / l_y)^2] + k_0 = 0 \quad (3.4)$$

величина критического остаточного продольного усилия N^* равна

$$N^* = D^* [(2\pi / l_x)^2 + (2\pi / l_y)^2] + k_0 [(2\pi / l_x)^2 + (2\pi / l_y)^2]^{-1} \quad (3.5)$$

а ее минимум достигается при

$$(2\pi/l_x)^2 + (2\pi/l_y)^2 = (k_0/D^*)^2 \quad (3.6)$$

и равен

$$N^* = 2 (k_0 D^*)^{1/2} \quad (3.7)$$

что совпадает с (2.6). В этой формуле критическому значению D^* соответствует множество пар (l_x^*, l_y^*) значений длин волн, заключенных в криволинейном четырехугольнике $2\pi (D^*/k_0)^{1/4} \leq l_x \leq a$ и $2\pi (D^*/k_0)^{1/4} \leq l_y \leq b$. Из множеств пар выбираем такую, для которой отношение числа длин волн l_x^* и l_y^* минимально, что соответствует $l_x^* = l_y^*$. В результате имеем длины волн

$$l_x^* = 2\pi \sqrt{2} (D^*/k_0)^{1/4} \quad (3.8)$$

и соответствующее им число волн

$$n = a/l_x = \frac{a}{2\pi \sqrt{2}} (k_0/D^*)^{1/4}, \quad m = b/l_y = \frac{b}{2\pi \sqrt{2}} (k_0/D^*)^{1/4} \quad (3.9)$$

а также уравнение для определения критической толщины δ^* слоя, при которой возможна потеря статической устойчивости покрытия изменяемой толщины $\delta^* \leq \delta < \delta_0$:

$$N_0^2 \Phi^2 (\delta^*/\delta_0) = 4k_0 D_0 \Psi (\delta^*/\delta_0) \quad (3.10)$$

при наличии мембранных сжимающих усилий $N^* = N_0 \Phi (\delta^*/\delta_0)$. В частном случае при $\Phi (\delta/\delta_0) = \delta/\delta_0$ и $\Psi (\delta/\delta_0) = (\delta/\delta_0)^3$ получаем для пластины ту же критическую толщину, что и для балки, а длина волны для пластины l_n^{v**} , равная $l_n^{v**2} = l_x^{*2} + l_y^{*2}$, больше соответствующей длины волны для балки l_n^* .

В частности, для квадратной пластины длина волны l_n^{v**} в два раза больше l_n^* для балки, а соответствующая составляющая $l_x^* = l_y^*$ больше в $\sqrt{2}$ раз и для приведенных в п. 1 числовых данных имеем $l_x^* = 6,589$ мм.

Таким образом, приведенные оценки дают возможность установить условия, при которых тонкое покрытие изменяемой толщины может потерять устойчивость и какие параметры формы может принять тонкий слой после потери устойчивости. На практике при обработке (полировке, шлифовке) поверхностей тонких хрупких покрытий на композитных материалах при достижении толщины определенной величины происходит мгновенное трещинообразование, которое может быть связано с потерей статической устойчивости тонкого слоя и принятием им синусоидальной формы; а поскольку несущая способность хрупких материалов низка при растяжении, то в местах вспучин могут образоваться трещины. Поэтому при обработке тонких покрытий, в которых остаточные, технологические или эксплуатационные напряжения достигают значений, соответствующих потере статической устойчивости, необходимо для безопасности не доводить толщину до критической. Особенно это важно для элементов конструкций зеркал с тонким покрытием для защиты от химически агрессивных сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. Киев: Наук. думка, 1979. 364 с.
2. Огибалов П. М. Изгиб, устойчивость и колебания пластинок. М.: Изд. Моск. универс., 1958. 389 с.
3. Динник А. Н. Избранные труды. Киев: Изд. АН УССР. 1955. 232 с.

4. *Король Е. З.* О механизме отслаивания структурнонестабильных высокотемпературных материалов при нагреве // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 2. 186 с.
5. *Зейгарник Ю. А., Ковалев С. А., Король Е. З., Рыбчинская Г. Б.* Анализ деформированного состояния тонкого слоя многослойной пластины при ее нагреве // Теплообмен и термические деформации в охлаждаемых многослойных системах. Ин-т высоких температур РАН, 1982. С. 3—65.
6. *Король Е. З., Зейгарник Ю. А., Рыбчинская Г. Б.* О расчете деформации наружной поверхности многослойных пластин с наполнителем // Проблемы прочности. 1987. № 6. С. 121—122.
7. *Тимошенко С. П.* О продольном изгибе стержней в упругой среде // Изв. С.-Петербургского политехн. ин-та. Отд. техники, естествознания и математики. 1907. Вып. 1. С. 145—157.

Москва

Поступила в редакцию
10.I.1994