

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. Е. А. ЛОПАНИЦЫН

НЕСИММЕТРИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОЛОГОЙ АРКИ

Изучается геометрически нелинейное поведение пологой шарнирно опертой синусоидальной арки под действием равномерно распределенного поперечного давления. Решение строится в виде ряда Фурье, в котором для получения аналитического описания процесса симметричного и кососимметричного прощелкивания удерживается два первых члена. Показано, что для однозначного описания траектории нагружения арки ее надо рассматривать в четырехмерном пространстве параметров, единственным образом характеризующих напряженно-деформированное состояние равновесия арки.

В работах, рассматривающих прощелкивание пологих арок с учетом их несимметричного деформирования [1, 2], диаграмма нагружения арки изображается так, как показано на фиг. 1. Здесь w_0^* и q^* — безразмерные прогиб в центре пролета арки и приложенная к ней распределенная поперечная нагрузка. Осесимметричное поведение арки описывается кривой $O-A-B-C-D-E-F$, а бифуркационное решение (прощелкивание по несимметричным формам) — прямой $A-E$, которая пересекает кривую осесимметричного поведения арки в трех точках: A, C, E . При этом точками бифуркации решения считаются две из них: A и E .

Такое представление бифуркационного поведения отражает суть процесса, но не является полным. В [1, 2] это отчасти компенсировано изображением траектории нагружения в плоскости N_0^* и q^* , где N_0^* — усилие распора в арке.

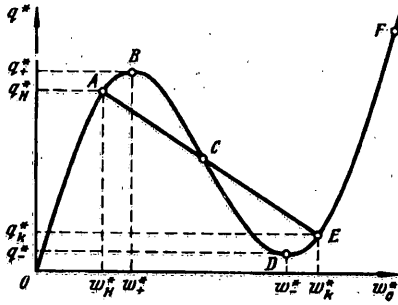
В [3] изображение траектории бифуркационного поведения арки уточнено. Она изображена так, как это показано на фиг. 2, где параметр θ_0^* обозначает меру несимметричности деформации арки — безразмерный угол поворота нормали к упругой линии арки в центре ее пролета. На этом рисунке бифуркационная траектория изображается эллипсом $A-M-E-N$ и фиг. 1 оказывается проекцией траектории нагружения арки из трехмерного пространства переменных w_0^*, θ_0^* и q^* на плоскость w_0^* и q^* .

В действительности изображение бифуркационного решения в [3] также является только проекцией реальной траектории нагружения пологой арки в трехмерное пространство w_0^*, θ_0^* и q^* и не обладает всей полнотой отображения деформирования арки.

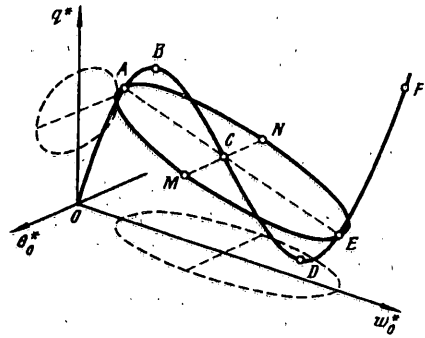
Для обоснования этого утверждения рассмотрим пологую арку, которая шарнирно оперта обоими концами и нагружена равномерно распределенной поперечной нагрузкой. Ее схема приведена на фиг. 3. Для описания поведения арки воспользуемся уравнениями, полученными в [1]. В безразмерной форме они записываются в виде

$$\frac{dN^*}{d\xi} = 0, \quad \frac{d^4 w^*}{d\xi^4} - N^* \left(\frac{d^2 w^*}{d\xi^2} + \frac{d^2 W^*}{d\xi^2} \right) = q^* \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (1)$$

где N^*, w^*, W^*, q^* и ξ — безразмерные усилие распора в арке, ее прогиб, функция, описывающая упругую линию арки, равномерно распределенная поперечная



Фиг. 1



Фиг. 2

нагрузка и продольная координата. Они связаны с реальными характеристиками арки следующими соотношениями $\xi = x/l$, $w^* = w/H$, $W^* = W/H$, $N^* = Nl^2/(EJ)$, $q^* = ql^4/(EJH)$. Здесь N — усилие распора в арке, w — прогиб арки, W — функция, описывающая ее упругую линию, E — модуль упругости материала арки, J — момент инерции ее поперечного сечения, l — длина пролета арки, H — стрела ее подъема, q — равномерно распределенная поперечная нагрузка, x — продольная координата.

Граничные условия в безразмерной форме для случая шарнирного опирания арки ее концами будут следующие

$$u^* = w^* = M^* = 0 \text{ при } \xi = 0, \quad u^* = w^* = M^* = 0 \text{ при } \xi = 1 \quad (2)$$

$$u^* = (l/H)(u/H), \quad M^* = Ml^2/(EJH)$$

где u^* и M^* — безразмерные продольное смещение точек упругой линии арки и изгибающий момент.

Решение первого уравнения (1) показывает, что усилие распора арки есть величина постоянная по ее длине и, с учетом квадратичного закона для продольной деформации арки, определяется как

$$N^* = \frac{4}{m} \left[\frac{du^*}{d\xi} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^*}{d\xi} \right)^2 + \frac{dw^*}{d\xi} \frac{dW^*}{d\xi} \right] = N_0^* \quad (3)$$

где $m = 4J/(FH^2)$ — безразмерный параметр геометрии арки, а F — площадь поперечного сечения арки. Разрешение соотношения (3) относительно продольного перемещения u^* позволяет записать его в виде

$$u^* = \frac{m}{4} N_0^* \xi - \frac{1}{2} \int_0^\xi \left(\frac{dw^*}{d\xi} \right)^2 d\xi - \int_0^\xi \frac{dw^*}{d\xi} \frac{dW^*}{d\xi} d\xi + u_0^* \quad (4)$$

а учет несмещаемости концов арки из граничных условий (2) для перемещения u^* дает усилие распора в явном виде

$$N^* = N_0^* = \frac{4}{m} \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dw^*}{d\xi} \right)^2 + \frac{dw^*}{d\xi} \frac{dW^*}{d\xi} \right] d\xi \quad (5)$$

Краевая задача (1) и (2) с учетом (5) допускает точное решение в виде ряда Фурье [1, 2], которое для синусоидальной арки с описанием ее упругой линии одним членом ряда Фурье по синусам

$$W^* = -\sin \pi \xi \quad (6)$$

предполагает описание прогиба арки в виде

$$w^* = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin n\pi \xi \quad (7)$$

Граничные условия при таком выборе прогиба выполняются точно, а второе уравнение равновесия (1) сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно составляющих безразмерного прогиба (δ_{1n} — символ Кронекера):

$$\begin{aligned} 2\delta_{1n}w_1 + mn^4w_n - \delta_{1n} \sum_{i=1}^{\infty} i^2w_i^2 - 2n^2w_1w_n + n^2w_n \sum_{i=1}^{\infty} i^2w_i^2 = \\ = \frac{2m}{n\pi^5} q^* [1 - (-1)^n] \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (8)$$

Геометрические и силовые параметры арки в центре ее пролета представляются соотношениями

$$w_0^* = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} w_{2n-1}, \quad \theta_0^* = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n w_{2n} \quad (9)$$

$$u_0^* = -2\pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k w_{2k}}{4k^2 - 1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(4k^2 - 1)(2n - 1)^2}{4k^2 - (2n - 1)^2} w_{2n-1} \right]$$

$$M_0^* = \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (2n - 1)^2 w_{2n-1}, \quad N_0^* = -\frac{\pi^2}{m} \left(2w_1 - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 w_n^2 \right)$$

где $\theta_0^* = dw^*/d\xi$ — безразмерный угол поворота нормали к упругой линии арки в центре ее пролета.

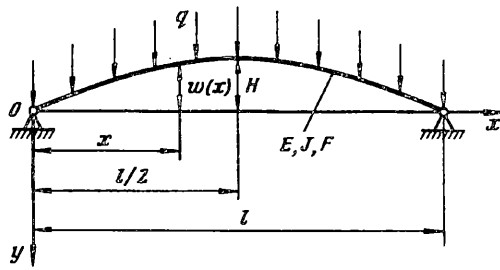
Система нелинейных алгебраических уравнений (8) может быть решена численно при удержании в ней первых n уравнений, необходимых для получения заданной точности решения. Траектория нагружения, которую будет описывать это решение, представляется некоторой кривой в $(n + 1)$ -мерном пространстве переменных w_1, \dots, w_n, q^* . Однако количество переменных, достаточных для однозначного описания напряженно-деформированного состояния арки в любой точке ее траектории нагружения может быть существенно сокращено.

Задача о прощелкивании пологой арки в вариационной постановке имеет три независимо варьируемых функции: u^* , w^* и θ^* . Она следует из принципа Лагранжа и записывается в безразмерной форме в следующем виде:

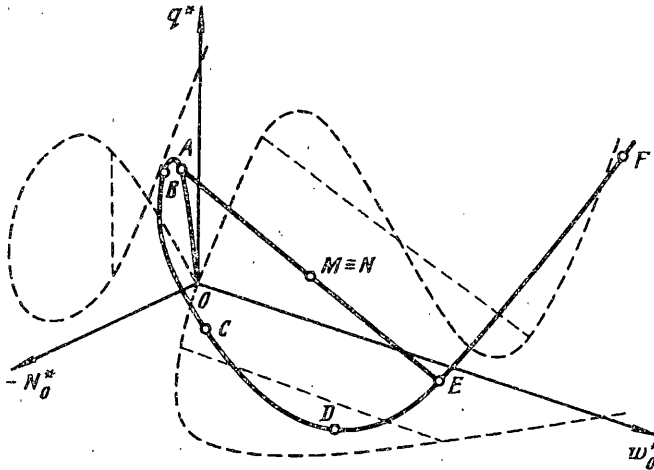
$$N^* \delta u^*|_0 - M^* \delta \theta^*|_0 + Q^* \delta w^*|_0 - \quad (10)$$

$$- \int_0^1 \left\{ \frac{dN^*}{d\xi} \delta u^* - \left[\frac{d^4 w^*}{d\xi^4} - N^* \left(\frac{d^2 w^*}{d\xi^2} + \frac{d^2 W^*}{d\xi^2} \right) - q^* \right] \delta w^* \right\} d\xi = 0$$

где Q^* — безразмерная перерезывающая сила. Остальные характеристики арки — продольная сила, перерезывающая сила и изгибающий момент однозначно опи-



Фиг. 3



Фиг. 4

ссылаются вышеупомянутыми независимо варьируемыми функциями, в связи с чем потенциальная энергия деформации арки единственным способом задается любой тройкой функций, взятых из следующих пар: $u^* - N^*$, $w^* - Q^*$ и $\theta^* - M^*$. При этом напряженно-деформированное состояние арки для заданной нагрузки неоднозначно за счет возможности ее прощелкивания. Для одной и той же величины нагрузки арка может иметь более одного состояния равновесия. Поэтому, можно утверждать, что каждое напряженно-деформированное состояние для данной нагрузки может быть однозначно задано именно тремя независимыми, с точки зрения вариационной постановки характеристиками арки, которыми могут быть любые три, взятые из вышеупомянутых трех пар. Они вместе с величиной приложенной нагрузки будут однозначно описывать напряженно-деформированное состояние арки в любой точке траектории нагружения. Каждая из этих функций однозначно определена в каждой точке по длине арки для каждого напряженно-деформированного состояния. Значит, для данной нагрузки можно их и, следовательно, напряженно-деформированное состояние, задавать величинами трех независимых с точки зрения вариационной постановки параметров арки, взятых в какой-либо ее характерной точке. В качестве характерной точки арки традиционно принято брать центр ее пролета, а в качестве параметров состояния арки — w^* , θ^* , N^* . Иными словами, для того, чтобы траектория нагружения арки однозначно описывала ее любое напряженно-деформированное состояние при любом способе и любой степени дискретизации задачи, достаточно ее описание и построение в четырехмерном пространстве переменных w_0^* , θ_0^* , N_0^* и q^* .

Построим траекторию нагружения полой синусоидальной арки, пользуясь

решением в виде (7) с учетом первых двух слагаемых ряда. В этом случае решение будет приближенным, совпадающим с двухчленным решением задачи о прощелкивании арки методом Бубнова. Первое слагаемое двухчленного решения соответствует осесимметричному деформированию арки, а второе — кососимметричному. При этом система уравнений (8) сводится к двум нелинейным уравнениям, допуская аналитическое решение [1]:

$$\begin{aligned} (2+m)w_1 - 3w_1^2 - 4w_2^2 + w_1^3 + 4w_1w_2^2 &= 4mq^*/\pi^6 \\ 16mw_2 - 8w_1w_2 + 4w_1^2w_2 + 16w_2^3 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Перемещения и усилия (9) упрощаются до следующих соотношений:

$$\begin{aligned} w_0^* &= w_1, \quad \theta_0^* = -2\pi w_2, \quad u_0^* = 2\pi w_2(1-w_1)/3 \\ M_0^* &= \pi^2 w_1, \quad N_0^* = \pi^2(2w_1 - w_1^2 - 4w_2^2)/m \end{aligned} \quad (12)$$

Аналитическое решение системы (11) распадается на два. Первое отражает осесимметричное деформирование арки и записывается в виде

$$(2+m)w_1 - 3w_1^2 + w_1^3 = 4mq^*/\pi^5, \quad w_2 = 0 \quad (13)$$

Ему соответствуют следующие описания прогиба, угла поворота нормали и распора:

$$w_0^* = w_1, \quad \theta_0^* = 0, \quad N_0^* = -\pi^2 w_0^*(2-w_0^*)/m \quad (14)$$

Траектория осесимметричного деформирования определена для любого значения прогиба w_0^* и имеет две предельные точки с координатами

$$\begin{aligned} w_{\pm}^* &= 1 \mp \left(\frac{1-m}{3}\right)^{1/2}, \quad N_{\pm}^* = -\frac{\pi^2}{m} \frac{2+m}{3} \\ q_{\pm}^* &= \frac{\pi^5}{4} \left[1 \pm \frac{2}{3} \frac{1-m}{m} \left(\frac{1-m}{3}\right)^{1/2} \right], \quad \theta_{\pm}^* = 0 \end{aligned}$$

Второе решение системы (11) описывает кососимметричное поведение арки, которое может появиться в процессе осесимметричного деформирования:

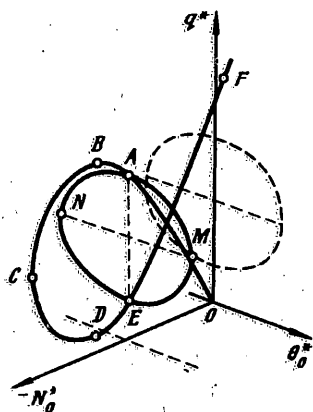
$$4 - 3w_1 = 4q^*/\pi^5, \quad (w_1 - 1)^2 + 4w_2^2 = 1 - 4m \quad (15)$$

Это решение существует при $w_H^* \leq w_0^* \leq w_K^*$ и в диапазоне нагрузок $q_H^* \leq q^* \leq q_K^*$, где $w_H^*/K = 1 \mp (1-4m)^{1/2}$, $q_H^*/K = \pi^5 [1 \pm 3(1-4m)^{1/2}]/4$. Перемещения и необходимые усилия определяются следующими соотношениями, определяющимися (12):

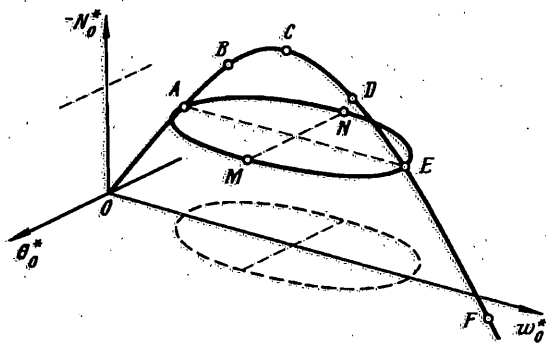
$$w_0^* = 4(1 - q^*/\pi^5)/3, \quad N_0^* = -4\pi^2 \quad (16)$$

$$\theta_0^* = \pm \pi [1 - 4m - (w_0^* - 1)^2]^{1/2}$$

На основе решения (13)—(16) построим траекторию нагружения арки. Поскольку изобразить кривую в четырехмерном пространстве координат w_0^* , θ_0^* , N_0^* и q^* не представляется возможным, ограничимся проекциями этой кривой в трехмерные пространства: w_0^* , θ_0^* и q^* ; w_0^* , N_0^* и q^* ; θ_0^* , N_0^* и q^* ; w_0^* , θ_0^* и N_0^* . Они показаны на фиг. 2, 4—6. Видно, что изображение траектории нагружения из [3] является одной из этих проекций. Причем той проекцией, которая отражает только изгиб арки. Деформации растяжения —



Фиг. 5



Фиг. 6

сжатия ею не описываются. Их описание включено в проекции, показанные на фиг. 4—6. Использование четырехмерного пространства переменных достаточно для полного описания поведения арки. Наличие координат w_0^* и θ_0^* позволяет проиллюстрировать ее изгиб, а N_0^* — ее растяжение-сжатие. В этом пространстве каждая точка траектории нагружения соответствует одному единственному напряженно-деформированному состоянию равновесия арки. Поэтому не требуется увеличения числа координат даже в случае прощелкивания арки по более высоким формам и появления петель на ее диаграмме нагрузка-прогиб.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э. И. К расчету устойчивости пологих арок. // Инж. сб. 1951. Т. 9. С. 178—201.
2. Григолюк Э. И., Андрианов Н. Н. Нелинейное статическое поведение пологих стержней. // В сб.: Неот. прикл. задачи теории пластин и оболочек. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. С. 3—83.
3. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивость и катастрофы в науке и технике. М.: Мир. 1985, 254 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.I.1994