

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. Е. Б. КУЗНЕЦОВ, Э. Н. КНЯЗЕВ, В. А. ПУХЛИЙ,
В. И. ШАЛАШИЛИН

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К АНАЛИЗУ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРОЩЕЛКИВАЮЩИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Явление прощелкивания оболочки может быть изучено при помощи уравнений теории пологих оболочек К. Маргерра. При этом проблема сводится к решению связанной системы двух нелинейных уравнений в частных производных (см., например, [1]), что, как видно, является довольно сложной задачей. В то же время известны упрощенные подходы к анализу нелинейно деформирующихся, в том числе и прощелкивающих систем, которые позволяют с использованием ряда упрощающих допущений существенно облегчить анализ их деформирования при сохранении приемлемой точности. Такие подходы нам кажутся особенно эффективными при использовании их для критериальных оценок минимальных динамических нагрузок прощелкивания [2, 3].

1. Еще в 1902 году И. Г. Бубнов рассмотрел задачу о цилиндрическом изгибе длинной прямоугольной пластины под действием равномерного давления [4, 5]. Полагая усилие N_x постоянным по ширине пластины a ($N_x = \text{const}$, $0 \leq x \leq a$), И. Г. Бубнов получил уравнение

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - k^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{q}{D}, \quad k^2 = \frac{N_x}{D}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (1)$$

где q — распределенная нагрузка, μ — коэффициент Пуассона.

Параметр продольного усилия k^2 определяется из условий закрепления краев пластины. Если эти края закреплены от перемещений по оси x , то

$$k^2 = \frac{6}{ah^2} \int_0^a \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \quad (2)$$

Уравнение (1) является линейным относительно поперечного прогиба. Проинтегрировав его, легко получить прогиб w как функцию координаты x и параметров распора k^2 и поперечной нагрузки q ($w = w(x, k, q)$). После подстановки этого решения в уравнение (2) и интегрирования, задача сводится к трансцендентному уравнению относительно k и q

$$F(k, q) = 0 \quad (3)$$

Этот подход был в дальнейшем обобщен в [6, 7] на задачи нелинейного деформирования арок. В [4] И. Г. Бубнов также рассмотрел изгиб круговой пластины в предположении, что мембранные напряжения постоянны по площади срединной поверхности. Обобщающий эту идею подход предложен Бергером [9]. На основе анализа известных точных решений задач нелинейного деформирования, в частности решения [10] об изгибе круговых пластин, Бергер приходит к выводу, что второй инвариант тензора деформаций в выражении для энергии деформации можно не учитывать. Поэтому уравнение для прогиба можно записать в виде

$$\nabla^2 \nabla^2 w - \alpha^2 \nabla^2 w = q/D \quad (4)$$

Это уравнение можно рассматривать как аналог уравнения Бубнова (1). Так как оно линейно, то можно легко получить его решение вида

$$w = w(x, y, \alpha, q) \quad (5)$$

Для получения нелинейного уравнения, связывающего α и q , необходимо учесть условия на контуре пластины, наложенные на тангенциальные перемещения или усилия. Так в [11—13] для прямоугольной пластины, полагая тангенциальные перемещения по нормали к контуру равными нулю, получено следующее выражение:

$$\alpha^2 = \frac{6}{abh^2} \int_0^b \int_0^a \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

которое аналогично соотношению (2). После подстановки в него общего решения (5) уравнения (4) нетрудно получить нелинейное трансцендентное уравнение, связывающее α и q .

Дальнейшие исследования показали, что подход Бергера дает достаточную точность для задач изгиба пластин с краями, закрепленными от нормальных к контуру тангенциальных перемещений и когда усилия N_x и N_y близки друг к другу и могут быть приняты постоянными. Обзор таких исследований дан в [8]. Среди этих работ отметим исследование [14]. В нем, в частности, отмечаются неудовлетворительные результаты применения подхода Бергера к задачам вычисления пологих сферических оболочек.

Отметим еще одну особенность применения уравнений Бергера к прямоугольным пластинам. Если, например, края $x=0$ и $x=a$ свободны, то $N_x=0$ и уравнение (3) Бергера вырождаются в уравнения изгиба пластин Жермен—Лагранжа. Более того, этот факт оказывается никак не связанным с условиями на краях $y=0$ и $y=b$. Это обстоятельство указывает на то, что предположение Бергера накладывает слишком жесткие ограничения на характер изменения мембранных усилий N_x, N_y .

2. Ниже на примере прямоугольной в плане полой оболочки двоякой кривизны рассмотрен упрощенный подход к анализу ее нелинейного деформирования, который можно также трактовать, как обобщение подхода И. Г. Бубнова на пластины и оболочки.

Полная система уравнений для такой оболочки может быть представлена в виде (см., например, [1]):

$$DV^2 \nabla^2 w = N_x \left(k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + N_y \left(k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q \quad (6)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad k_x = \frac{1}{R_x} \quad (7)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad k_y = \frac{1}{R_y}$$

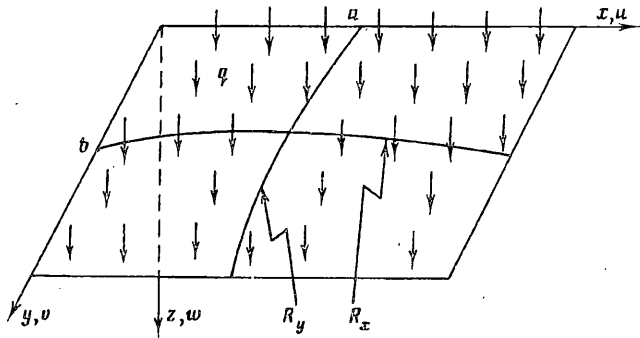
$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh} (N_x - \mu N_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{Eh} (N_y - \mu N_x), \quad \gamma = \frac{2(1 + \mu)}{Eh} T \quad (8)$$

где k_x, k_y — главные кривизны недеформированной оболочки (фиг. 1).

Учитывая (8) перепишем соотношения (7) в форме

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh} (N_x - \mu N_y) + k_x w - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (9)$$



Фиг. 1

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{Eh} (N_y - \mu N_x) + k_y w - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

Дальнейшее исследование основывается на предположении, что определяющий вклад в нелинейность вносят средние по площади панели величины тангенциальных усилий N_x и N_y , а влиянием сдвиговых усилий T можно пренебречь. Ясно, что такие предположения могут привести к удовлетворительному результату лишь для таких случаев нагружения панели, когда усилия N_x и N_y слабо меняются по области, ограниченной контуром панели, а сдвиговые усилия T — малы.

Введем средние усилия по формулам

$$\alpha = \frac{1}{ab} \int_0^b \int_0^a N_x dx dy, \quad \beta = \frac{1}{ab} \int_0^b \int_0^a N_y dx dy \quad (10)$$

и будем считать, что имеет место

$$\int_0^b \int_0^a T dx dy = 0$$

Введем далее безразмерные величины $w = Wh$, $v = Vh$, $u = Uh$, $x = x^* a$, $y = y^* a$, $k_x = k_x^* h/a^2$, $k_y = k_y^* h/a^2$, $\alpha = \alpha^* D/a^2$, $\beta = \beta^* D/a^2$, $q = QDh/a^4$, $\psi = b/a$, $\nu = 12(1 - \mu^2)/\psi$. Ниже звездочку у безразмерных величин будем опускать. Тогда с учетом высказанных предположений, уравнение (6) представляется в виде

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = Q + \alpha k_x + \beta k_y \quad (11)$$

Это уравнение линейно. При заданных на контуре условиях на прогиб W оно может быть проигнорировано и его решение будет иметь вид

$$W = W(x, y, q, \alpha, \beta) \quad (12)$$

Уравнение (11) является двумерным аналогом уравнения Бубнова (1). Еще большее сходство по структуре оно имеет с уравнением для пологих арок [7].

Рассмотрим условия на контуре, соответствующие закреплению краев оболочки по нормальным к контуру тангенциальным перемещениям: $U = 0$ при $x = 0$, $x = a$; $V = 0$ при $y = 0$, $y = \psi$. Эти условия могут быть записаны в равносильной форме

$$\int_0^1 \frac{\partial U}{\partial x} dx = 0, \quad \int_0^\psi \frac{\partial V}{\partial y} dy = 0$$

Однако их точная реализация в рамках высказанных предположений неце-

лесообразна. С той же погрешностью можно потребовать выполнения этих условий в среднем по каждому из краев, что приводит к соотношениям

$$\int_0^{\Psi} \int_0^1 \frac{\partial U}{\partial x} dx dy = 0, \quad \int_0^{\Psi} \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial y} dx dy = 0$$

После подстановки в эти условия выражений (9) с учетом обозначений (10) получаем два равенства

$$\alpha - \mu\beta + \nu k_x \int_0^{\Psi} \int_0^1 W dx dy - \frac{\nu}{2} \int_0^{\Psi} \int_0^1 \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx dy = 0 \quad (13)$$

$$\beta - \mu\alpha + \nu k_y \int_0^{\Psi} \int_0^1 W dx dy - \frac{\nu}{2} \int_0^{\Psi} \int_0^1 \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 dx dy = 0$$

На основе этих соотношений с учетом решения (12) уравнения (11) приводятся к двум трансцендентным уравнениям относительно α , β , q , которые являются аналогом уравнения (3).

3. Рассмотрим решение для прямоугольной шарнирно опертой оболочки. На ее контуре должны удовлетворяться следующие условия:

$$W = 0, \quad \partial^2 W / \partial x^2 = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = 1$$

$$W = 0, \quad \partial^2 W / \partial y^2 = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = \Psi$$

Решение будем отыскивать в виде двойного тригонометрического ряда

$$W = \sum_{i,j=1}^{\infty} W_{ij} \sin(i\pi x) \sin\left(\frac{j\pi y}{\Psi}\right) \quad (14)$$

Правую часть уравнения (11) также разложим в двойной тригонометрический ряд.

Для постоянного по поверхности панели давления получим

$$Q - \alpha k_x + \beta k_y = (Q + \alpha k_x + \beta k_y) \sum_{i,j=1}^{\infty} F_{ij} \sin(i\pi x) \sin\left(\frac{j\pi y}{\Psi}\right) \quad (15)$$

$$F_{ij} = \frac{16}{\pi^2 ij} f, \quad f = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ и } j \text{ нечетные} \\ 0, & \text{если } i \text{ или } j \text{ четные} \end{cases}$$

После подстановки выражений (14) и (15) в уравнение (11), получаем

$$W_{ij} = \frac{Q + \alpha k_x + \beta k_y}{(I^2 + J^2)^2 + \alpha I^2 + \beta J^2} Q_{ij}$$

$$I = i\pi, \quad J = j\pi/\Psi, \quad Q_{ij} = F_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots)$$

Из выражений видно, что для оболочек идеальной формы и при строго постоянной нагрузке деформирование происходит только по симметричным формам. Однако реальные оболочки имеют малые отклонения от идеальной формы и нагрузка также отклоняется от постоянной. Именно эти факторы и позволяют развиваться несимметричным формам, если, конечно, в панели возникают тангенциальные усилия, соответствующие потере устойчивости по несимметричным формам. Чтобы условия развития несимметричных форм сохранялись в численных расчетах, будем задавать Q_{ij} в форме

$$Q_{ij} = \frac{16}{\pi^2 ij} q, \quad q = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ и } j \text{ нечетные} \\ \varepsilon, & \text{если } i \text{ и } j \text{ четные } (0 < \varepsilon \ll 1) \end{cases}$$

Поставим теперь выражение (14) в уравнения (13). В результате, учитывая ортогональность тригонометрической системы функций $\sin(\alpha x) \sin(\beta y/\psi)$ в области $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \psi$, получим

$$\alpha - \mu\beta + (Q + \alpha k_x + \beta k_y) k_x \Phi(\alpha, \beta) \frac{64\nu\psi}{\pi^6} - \quad (16)$$

$$- (Q + \alpha k_x + \beta k_y)^2 \frac{32\nu\psi}{\pi^6} \Phi_j(\alpha, \beta) = 0$$

$$\beta - \mu\alpha + (Q + \alpha k_x + \beta k_y) k_y \Phi(\alpha, \beta) \frac{64\nu\psi}{\pi^6} -$$

$$- (Q + \alpha k_x + \beta k_y)^2 \frac{32\nu}{\pi^6 \psi} \Phi_i(\alpha, \beta) = 0$$

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\delta(i, n) \delta(j, n)}{i^2 j^2 M_{ij}(\alpha, \beta)}, \quad \Phi_j(\alpha, \beta) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\delta_e^2(i, n) \delta_e^2(j, n)}{i^2 M_{ij}^2(\alpha, \beta)}$$

$$\Phi_i(\alpha, \beta) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\delta_e^2(i, n) \delta_e^2(j, n)}{i^2 M_{ij}^2(\alpha, \beta)}$$

$$M_{ij}(\alpha, \beta) = \pi^2 (i^2 + j^2/\psi^2)^2 + \alpha i^2 + \beta j^2/\psi^2$$

где $\delta(k, n) = 1$, если k нечетно; $\delta(k, n) = 0$, если k четно; $\delta_e(k, n) = 1$, если k нечетно, $\delta_e(k, n) = \varepsilon$, если k четно ($0 < \varepsilon \ll 1$).

В уравнения (16) целесообразно ввести новые переменные $\xi = \alpha - \mu\beta$, $\eta = \beta - \mu\alpha$, $\zeta = Q + \alpha k_x + \beta k_y$; тогда получим систему уравнений

$$\xi + \zeta \frac{64k_x\nu\psi}{\pi^6} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\delta(i, n) \delta(j, n)}{i^2 j^2 L_{ij}(\xi, \eta)} -$$

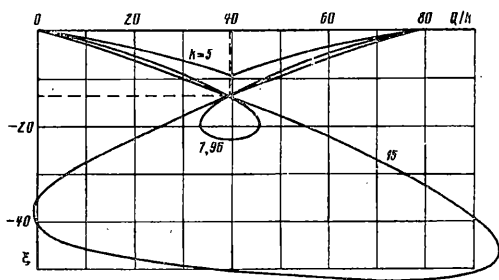
$$- \zeta^2 \frac{32\nu\psi}{\pi^6} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\delta_e^2(i, n) \delta_e^2(j, n)}{i^2 L_{ij}^2(\xi, \eta)} = 0$$

$$\eta + \zeta \frac{64k_y\nu\psi}{\pi^6} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\delta(i, n) \delta(j, n)}{i^2 j^2 L_{ij}(\xi, \eta)} - \quad (17)$$

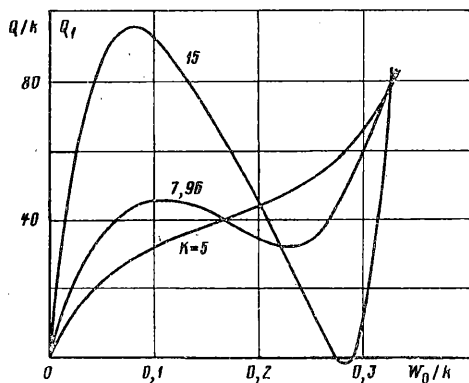
$$- \zeta^2 \frac{32\nu}{\pi^6 \psi} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\delta_e^2(i, n) \delta_e^2(j, n)}{i^2 L_{ij}^2(\xi, \eta)} = 0$$

$$L_{ij}(\xi, \eta) = \pi^2 \left(i^2 + \frac{j^2}{\psi^2} \right)^2 + \frac{1}{1 - \mu^2} \left[(\xi + \mu\eta) i^2 + \frac{(\eta + \mu\xi) j^2}{\psi^2} \right]$$

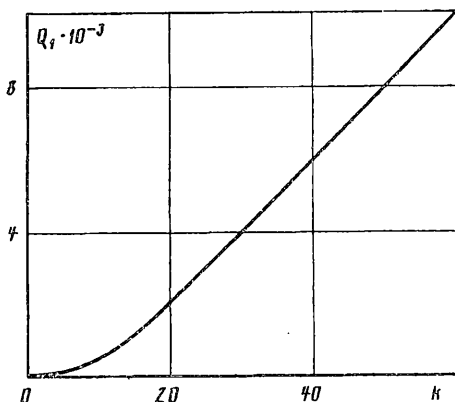
Исследуем поведение квадратной в плане панели одинаковой кривизны. В



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

этом случае $\xi = \eta$ и вся проблема сводится к решению одного из уравнений системы (17), которое относительно переменной ξ является квадратным. При решении задачи суммирование осуществлялось до $m = 5$. Расчеты показали, что удержание в суммах большого числа слагаемых незначительно влияет на точность результатов.

На фиг. 2 приводится зависимость $\xi = (1 - \mu) \alpha$ от параметра нагрузки Q , а на фиг. 3 безразмерного прогиба, вычисленного в центре панели W_0 от параметра нагрузки Q . Причем величины, приведенные на фиг. 3, отнесены к безразмерной кривизне панели $k = k_x = k_y$.

Как видно из фиг. 2, 3, в зависимости от параметра кривизны k панель может прощелкивать (при $k = 7,96$, $k = 15$), а может и деформироваться без прощелкивания (при $k = 5$). Граничным значением параметра, определяющим переход от деформирования без прощелкивания к прощелкиванию, является $k = 6,3$.

Как видно из фиг. 4, с ростом параметра кривизны верхнее критическое давление Q_1 сильно возрастает.

Наличие зависимостей $Q(W)$ позволяет без труда на основании критерия, предложенного в работах [2, 3], оценить минимальную критическую динамическую нагрузку прощелкивания Q^* , когда на панель действует мгновенно приложенный импульс давления бесконечной протяженности по времени, так, например, для $k = 15$ получаем $Q^* = 1140$, а для $k = 7,96$ — $Q^* = 280$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
2. Шалашилин В. И., Кулаков Н. А., Кузнецов Е. Б., Ефанов В. В. О некоторых особенностях поведения упругих систем с прощелкиванием при действии динамических нагрузок//Прочность, конструирование, материалы. Тр. МАИ. 1971. Вып. 237. С. 3—24.
3. Кузнецов Е. Б., Кулаков Н. А., Шалашилин В. И. О действии динамических нагрузок на некоторые упругие системы с прощелкиванием//Избранные проблемы прикладной механики. М.: ВИНТИ, 1974. С. 439—443.
4. Бубнов И. Г. Напряжение в обшивке судов от давления воды//Морской сборник, 1902. Т. 311. № 8. С. 117—143; Т. 312. № 9. С. 111—141; Т. 312. № 10. С. 119—139; Т. 313. № 12. С. 107—131; перепечатка: Бубнов И. Г. Труды по теории пластин. М.: Гостехиздат, 1953. С. 11—100.
5. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. С. 469—470.
6. Григолюк Э. И. К расчету устойчивости пологих арок//Изв. АН СССР. Инж. сборник. 1951. № 9. С. 177—200.
7. Григолюк Э. И. Нелинейные колебания и устойчивость пологих стержней и оболочек//Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 3. С. 33—68.
8. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Об упрощенном методе решения нелинейных задач теории упругих пластин и оболочек//Некоторые прикладные задачи теории пластин и оболочек. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 94—121.
9. Berger H. M. A new approach to the analysis of large deflections of plates//J. Appl. Mech. 1955. V. 22, № 4. P. 465—472.
10. Way S. Bending of circular plates with large deflections//Trans. ASME. 1934. V. 56. P. 627—636.
11. Wah T. Large amplitude flexural vibration of rectangular plates//Internat. J. Mech. Sci. 1963. V. 5. № 6. P. 425—438.
12. Wah T. Vibration of circular plates at large amplitudes//Proc. of the Amer. Soc. of Civ. Eng. J. of the Eng. Mech. Div., 1963. V. 89, № 5. P. 1—15.
13. Wah T. The normal modes of vibration of certain nonlinear continuous systems//Trans. ASME. 1964. E 31. № 1. P. 139—140.
14. Nash W. A., Modeer J. R. Certain approximate analysis of nonlinear behaviour of plates and shallow shells./Proc. of the Symp. on the Theory of Thin Elastic Shells, Delft, 1959. N—Y.: Interscience. 1960. P. 331—354.

Москва

Поступила в редакцию
23.I.1992