

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. С. В. АСТРАХАРЧИК, Л. П. ЖЕЛЕЗНОВ, В. В. КАБАНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК И ПАНЕЛЕЙ НЕНУЛЕВОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

Исследования методом конечных элементов геометрически нелинейного деформирования и устойчивости оболочек произвольной формы проводятся, в основном, с использованием треугольных конечных элементов. Обладая существенным преимуществом в описании геометрии оболочки, такие элементы, как правило, приводят к несимметрии решения при симметричных нагрузках и являются несовместными.

Если ограничиться рассмотрением оболочек, которые можно аппроксимировать четырехузловыми конечными элементами с кромками, совпадающими с линиями главных кривизн (к этому классу относятся, в частности, все оболочки вращения), то можно построить эффективный четырехугольный конечный элемент, свободный от приведенных выше недостатков треугольных элементов.

1. Основные геометрические и статические соотношения. Пусть срединная поверхность оболочки в исходном состоянии представлена радиусом-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta)$, где α, β -координатные параметры вдоль линий главных кривизн срединной поверхности. После деформации эта поверхность будет определяться радиусом-вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mathbf{u} \quad (1.1)$$

где \mathbf{u} — вектор перемещений.

Геометрические соотношения будут иметь наиболее простой и компактный вид, если \mathbf{r} и \mathbf{u} определять в общей декартовой системе координат XYZ :

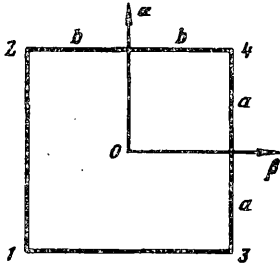
$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\alpha, \beta) &= \{X(\alpha, \beta), Y(\alpha, \beta), Z(\alpha, \beta)\} \\ \mathbf{u}(\alpha, \beta) &= \{u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta), w(\alpha, \beta)\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

При таком подходе геометрические соотношения для элемента оболочки имеют вид

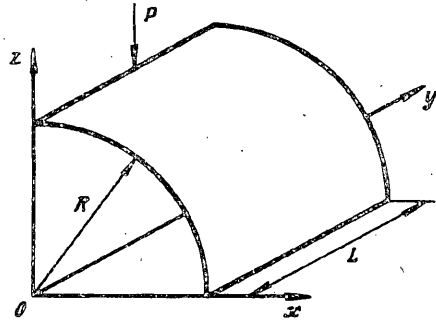
$$\begin{aligned} \epsilon_i &= (\mathbf{r}_{,i} + \frac{1}{2}\mathbf{u}_{,i}) \mathbf{u}_{,i}, \quad \epsilon_{i2} = \mathbf{r}_{,2}\mathbf{u}_{,i} + \mathbf{r}_{,i}\mathbf{u}_{,2} + \mathbf{u}_{,i}\mathbf{u}_{,2} \\ \chi_i &= \check{r}_{,i}\check{n}_{,i} - \mathbf{r}_{,i}\mathbf{n}_i = -(\check{r}_{,i}\check{n} - \mathbf{r}_{,i}\mathbf{n}) \\ \chi_{i2} &= \check{r}_{,2}\check{n}_{,i} + \check{r}_{,i}\check{n}_{,2} = -2(\check{r}_{,i2}\check{n} - \mathbf{r}_{,i2}\mathbf{n}) \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\epsilon_i, \epsilon_{i2}$ — деформация и сдвиг срединной поверхности, χ_i, χ_{i2} — изменения кривизн и кручения, \mathbf{n} — нормаль к срединной поверхности, индексы 1 и 2 после запятой означают дифференцирование по элементарным длинам s_1 и s_2 :

$$\begin{aligned} f_{,1} &= \frac{\partial f}{\partial s_1} = \frac{1}{A} f_{,\alpha}, \quad f_{,2} = \frac{\partial f}{\partial s_2} = \frac{1}{B} f_{,\beta} \\ f_{,i2} &= \frac{1}{AB} \left(f_{,\alpha\beta} - \frac{A_{,\beta}}{A} f_{,\alpha} \right) = \frac{1}{AB} \left(f_{,\alpha\beta} - \frac{B_{,\alpha}}{B} f_{,\beta} \right) \end{aligned}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$f_{11} = \frac{1}{A^2} \left(f_{\alpha\alpha} - \frac{A_\alpha}{A} f_\alpha \right), \quad f_{22} = \frac{1}{B^2} \left(f_{\beta\beta} - \frac{B_\beta}{B} f_\beta \right) \quad (1.4)$$

Здесь $A = (r_\alpha r_\alpha)^{1/2}$, $B = (r_\beta r_\beta)^{1/2}$ — параметры Ламе срединной поверхностной оболочки, индексы α и β означают дифференцирование по соответствующим координатам.

Статические соотношения приняты в обычном виде

$$T_1 = K(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad T_2 = K(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \quad S = K\nu_1\varepsilon_{12} \quad (1.5)$$

$$M_1 = D(\chi_1 + \nu\chi_2), \quad M_2 = D(\chi_2 + \nu\chi_1), \quad H = D\nu_1\chi_{12}$$

$$K = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad \nu_1 = \frac{1 - \nu}{2}$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки.

2. Аппроксимация координат и перемещений на конечном элементе. Рассмотрим два типа аппроксимации перемещений и координат конечного элемента через его узловые перемещения и координаты.

В основе первой аппроксимации лежит полный бикубический полином

$$f = c_1x^3y^3 + c_2x^3y^2 + c_3x^3y + c_4x^3 + c_5x^2y^3 + c_6x^2y^2 + c_7x^2y + c_8x^2 + \quad (2.1)$$

$$+ c_9xy^3 + c_{10}xy^2 + c_{11}xy + c_{12}x + c_{13}y^3 + c_{14}y^2 + c_{15}y + c_{16}$$

Вторая аппроксимация базируется на усеченном бикубическом полиноме

$$f = c_1x^3y + c_2xy^3 + c_3x^3 + c_4x^2y + c_5xy^2 + c_6y^3 + c_7x^2 + \quad (2.2)$$

$$+ c_8xy + c_9y^2 + c_{10}x + c_{11}y + c_{12}$$

Полиному (2.1) соответствует аппроксимация полиномами Эрмита (см. фиг. 1):

$$f = \{N_1(x)N_1(y)f_1 + aN_2(x)N_1(y)f_{\alpha 1} + bN_1(x)N_2(y)f_{\beta 1} + \quad (2.3)$$

$$+ abN_2(x)N_2(y)f_{\alpha\beta 1} + N_3(x)N_1(y)f_2 + aN_4(x)N_1(y)f_{\alpha 2} +$$

$$+ bN_3(x)N_2(y)f_{\beta 2} + abN_4(x)N_2(y)f_{\alpha\beta 2} + N_1(x)N_3(y)f_3 +$$

$$+ aN_2(x)N_3(y)f_{\alpha 3} + bN_1(x)N_4(y)f_{\beta 3} + abN_2(x)N_4(y)f_{\alpha\beta 3} +$$

$$+ N_3(x)N_3(y)f_4 + aN_4(x)N_3(y)f_{\alpha 4} + bN_3(x)N_4(y)f_{\beta 4} +$$

$$+ abN_4(x)N_4(y)f_{\alpha\beta 4}\}$$

и

$$N_1(z) = 0,25(z^3 - 3z + 2), \quad N_2(z) = 0,25(z^3 - z^2 - z + 1) \quad (2.4)$$

$$N_3(z) = 0,25(-z^3 + 3z + 2), \quad N_4(z) = 0,25(z^3 + z^2 - z - 1)$$

$$x = \alpha/a, \quad y = \beta/b, \quad f_x = \alpha f_a, \quad f_y = \beta f_b$$

где нижние цифровые индексы означают номер узла, буквенные — дифференцирование по соответствующей координате.

Полиному (2.2) отвечает следующая аппроксимация полиномами Эрмита:

$$\begin{aligned} f = \{ & [N_1(x) N_2(y) + N_2(x) N_1(y)] f_1 + a N_3(x) N_1(y) f_{a1} + \\ & + b N_1(x) N_3(y) f_{\beta 1} + [N_4(x) N_2(y) + N_5(x) N_1(y)] f_2 + \\ & + a N_6(x) N_1(y) f_{a2} + b N_4(x) N_3(y) f_{\beta 2} + [N_1(x) N_5(y) + \\ & + N_2(x) N_4(y)] f_3 + a N_3(x) N_4(y) f_{a3} + b N_1(x) N_6(y) f_{\beta 3} + \\ & + [N_4(x) N_5(y) + N_5(x) N_4(y)] f_4 + a N_6(x) N_4(y) f_{a4} + \\ & + b N_4(x) N_6(y) f_{\beta 4} \} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$N_1(z) = 1 - z, \quad N_2(z) = 0,125(z^3 - 2z + 1)$$

$$N_3(z) = 0,125(z^3 - z^2 - z + 1), \quad N_4(z) = 1 + z \quad (2.6)$$

$$N_5(z) = 0,125(-z^3 + 2z + 1), \quad N_6(z) = 0,125(z^3 + z^2 - z - 1)$$

3. Потенциальная энергия деформации элемента и ее вариации. Потенциальная энергия деформации конечного элемента записывается следующим образом:

$$W = \frac{1}{2} \iint (T_1 \varepsilon_1 + T_2 \varepsilon_2 + T_{12} \varepsilon_{12} + M_1 \chi_1 + M_2 \chi_2 + M_{12} \chi_{12}) ds \quad (3.1)$$

Первая и вторая вариации потенциальной энергии (3.1) имеют вид

$$\Delta W = \iint (T_1 \Delta \varepsilon_1 + T_2 \Delta \varepsilon_2 + T_{12} \Delta \varepsilon_{12} + M_1 \Delta \chi_1 + M_2 \Delta \chi_2 + M_{12} \Delta \chi_{12}) ds$$

$$\delta^2 W = \iint (\delta T_1 \Delta \varepsilon_1 + \delta T_2 \Delta \varepsilon_2 + \delta T_{12} \Delta \varepsilon_{12} + \delta M_1 \Delta \chi_1 + \delta M_2 \Delta \chi_2 + \delta M_{12} \Delta \chi_{12} + \quad (3.2)$$

$$+ T_1 \delta^2 \varepsilon_1 + T_2 \delta^2 \varepsilon_2 + T_{12} \delta^2 \varepsilon_{12} + M_1 \delta^2 \chi_1 + M_2 \delta^2 \chi_2 + M_{12} \delta^2 \chi_{12}) ds$$

Рассмотрим более подробно, используя (1.1), выражения изменений кривизн и кручения (1.3):

$$\chi_1 = -[u_{,u} (r_{,1} \times r_{,2}) + (r_{,u} + u_{,u})(r_{,1} \times u_{,2} + u_{,1} \times r_{,2} + u_{,1} \times u_{,2})] \quad (3.3)$$

$$\chi_{12} = -2 [(r_{,12} + u_{,12})(r_{,1} \times u_{,2} + u_{,1} \times r_{,2} + u_{,1} \times u_{,2}) + u_{,12} (r_{,1} \times r_{,2})]$$

Проварьируем соотношения (1.3), (3.3):

$$\Delta \varepsilon_1 (r_{,1} + u_{,1}) \Delta u_{,1}$$

$$\Delta \varepsilon_{12} = (r_{,1} + u_{,1}) \Delta u_{,2} + (r_{,2} + u_{,2}) \Delta u_{,1}$$

$$\Delta \chi_1 = -[(r_{,1} \times r_{,2} + r_{,1} \times u_{,2} + u_{,1} \times r_{,2} + u_{,1} \times u_{,2}) \Delta u_{,u} + \quad (3.4)$$

$$+ (r_{,u} + u_{,u}) \times (r_{,1} + u_{,1}) \Delta u_{,2} + (r_{,2} + u_{,2}) \times (r_{,u} + u_{,u}) \Delta u_{,1}]$$

$$\Delta \chi_{12} = -2 [(r_{1,1} \times r_{1,2} + r_{1,1} \times u_{1,2} + u_{1,1} \times r_{1,2} + u_{1,1} \times u_{1,2}) \Delta u_{1,2} + \quad (3.5)$$

$$+ (r_{1,2} + u_{1,2}) \times (r_{1,1} + u_{1,1}) \Delta u_{1,2} + (r_{1,2} + u_{1,2}) \times (r_{1,2} + u_{1,2}) \Delta u_{1,1}]$$

$$\delta^2 \varepsilon_i = \delta u_i \Delta u_i, \quad \delta^2 \varepsilon_{12} = \delta u_{1,2} \Delta u_{1,1} + \delta u_{1,1} \Delta u_{1,2} \quad (3.6)$$

$$\delta^2 \chi_i = \delta u_{i,2}^T \langle r_{1,1} + u_{1,1} \rangle \Delta u_{i,u} - \delta u_{i,1}^T \langle r_{1,2} + u_{1,2} \rangle \Delta u_{i,u} - \delta u_{i,u}^T \langle r_{1,1} + u_{1,1} \rangle \Delta u_{i,2} +$$

$$+ \delta u_{i,1}^T \langle r_{1,u} + u_{1,u} \rangle \Delta u_{i,2} - \delta u_{i,2}^T \langle r_{1,u} + u_{1,u} \rangle \Delta u_{i,1} + \delta u_{i,u}^T \langle r_{1,2} + u_{1,2} \rangle \Delta u_{i,1}$$

$$\delta^2 \chi_{12} = 2 [\delta u_{1,2}^T \langle r_{1,1} + u_{1,1} \rangle \Delta u_{1,2} - \delta u_{1,1}^T \langle r_{1,2} + u_{1,2} \rangle \Delta u_{1,2} - \delta u_{1,2}^T \langle r_{1,1} + u_{1,1} \rangle \Delta u_{1,2} +$$

$$+ \delta u_{1,1}^T \langle r_{1,2} + u_{1,2} \rangle \Delta u_{1,2} - \delta u_{1,2}^T \langle r_{1,2} + u_{1,2} \rangle \Delta u_{1,1} + \delta u_{1,2}^T \langle r_{1,2} + u_{1,2} \rangle \Delta u_{1,1}] \quad (3.7)$$

$$\langle z \rangle = \begin{vmatrix} 0 & -z_3 & z_2 \\ z_3 & 0 & -z_1 \\ -z_2 & z_1 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Узловые величины, матрица связи и численное интегрирование. Все дальнейшее рассмотрение, как это обычно делается в методе конечных элементов, будем проводить в узловых величинах, помеченных нижним индексом e . Согласно аппроксимаций (2.3) и (2.5) рассмотрим два варианта векторов узловых величин:

$$f_e = \{f_{1,1}, f_{\alpha 1,1}, f_{\beta 1,1}, f_{\alpha \beta 1,1}, \dots, f_{4,1}, f_{\alpha 4,1}, f_{\beta 4,1}, f_{\alpha \beta 4,1}\}^T \quad (4.1)$$

$$f_e = \{f_{1,1}, f_{\alpha 1,1}, f_{\beta 1,1}, \dots, f_{4,1}, f_{\alpha 4,1}, f_{\beta 4,1}\}^T \quad (4.2)$$

Связь между узловыми величинами и текущими на элементе осуществляется с помощью матрицы связи

$$P = \begin{vmatrix} B_1 & O & O & B_2 & O & O & B_3 & O & O & B_4 & O & O \\ O & B_1 & O & O & B_2 & O & O & B_3 & O & O & B_4 & O \\ O & O & B_1 & O & O & B_2 & O & O & B_3 & O & O & B_4 \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

где в случае (2.3)

$$B_1 = \{N_1(x) N_1(y), \alpha N_2(x) N_1(y), \beta N_1(x) N_2(y), \alpha \beta N_2(x) N_2(y)\}$$

$$B_2 = \{N_3(x) N_1(y), \alpha N_4(x) N_1(y), \beta N_3(x) N_2(y), \alpha \beta N_4(x) N_2(y)\} \quad (4.4)$$

$$B_3 = \{N_1(x) N_3(y), \alpha N_2(x) N_3(y), \beta N_1(x) N_4(y), \alpha \beta N_2(x) N_4(y)\}$$

$$B_4 = \{N_3(x) N_3(y), \alpha N_4(x) N_3(y), \beta N_3(x) N_4(y), \alpha \beta N_4(x) N_4(y)\}$$

в случае (2.5):

$$B_1 = \{N_1(x) N_2(y) + N_2(x) N_1(y), \alpha N_3(x) N_1(y), \beta N_1(x) N_3(y)\}$$

$$B_2 = \{N_4(x) N_2(y) + N_5(x) N_1(y), \alpha N_6(x) N_1(y), \beta N_4(x) N_5(y)\} \quad (4.5)$$

$$B_3 = \{N_1(x) N_5(y) + N_2(x) N_4(y), \alpha N_3(x) N_4(y), \beta N_1(x) N_6(y)\}$$

$$B_4 = \{N_4(x) N_5(y) + N_5(x) N_4(y), \alpha N_6(x) N_4(y), \beta N_4(x) N_6(y)\}$$

а $O = \{0, 0, 0, 0\}$.

Вектора перемещений и координат элемента теперь можно записать через их узловые значения:

$$u = Pu_e, \quad r = Pr_e \quad (4.6)$$

В дальнейшем дифференцирование векторов сводится к дифференцированию матрицы P с учетом выражений (1.4) и соотношений:

$$\frac{df}{dx} = \alpha \frac{df}{da}, \quad \frac{df}{dy} = \beta \frac{df}{db} \quad (4.7)$$

Рассмотрим теперь процесс интегрирования по площади конечного элемента, что необходимо при вычислении вариации потенциальной энергии.

Интегрирование будем проводить методом Гаусса. Рассмотрим два варианта интегрирования на элементе по 16 (4×4) и по 9 (3×3) точкам.

Общая формула численного интегрирования по Гауссу имеет вид

$$\begin{aligned} \iint_s f(\alpha, \beta) ds &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(ax, by) A(ax) B(by) ab dx dy = \\ &= \sum_i \sum_j f(aX_i, bY_j) A(aX_i) B(bY_j) ab H_i H_j \end{aligned} \quad (4.8)$$

где A и B — параметры Ламе, H_i — весовые коэффициенты, X_i — координаты интегрирования.

В случае 16-ти точечного интегрирования

$$X_1 = b_3, \quad X_2 = b_4, \quad X_3 = -b_4, \quad X_4 = -b_3$$

$$H_1 = H_4 = b_1, \quad H_2 = H_3 = b_2$$

$$b_1 = 0,347854845137454, \quad b_2 = 0,652145154862546 \quad (4.9)$$

$$b_3 = 0,861136311594053, \quad b_4 = 0,339981043584856$$

В случае 9-ти точечного интегрирования

$$X_1 = C_3, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = -C_3, \quad H_1 = H_3 = C_1, \quad H_2 = C_2$$

$$C_1 = 0,555555555555556, \quad C_2 = 0,888888888888889,$$

$$C_3 = 0,774596669241483 \quad (4.10)$$

5. Уравнение метода Ньютона — Рафсона. Запишем теперь для конечного элемента, учитывая вышеизложенное, уравнение метода Ньютона — Рафсона традиционного метода решения нелинейных задач механики:

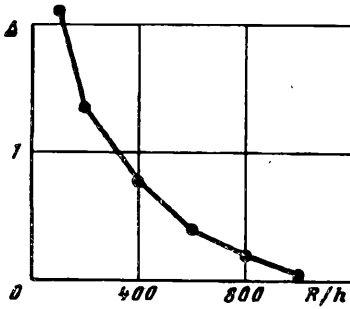
$$\Pi(u) \Delta u_e = q_e - G(u) \quad (5.1)$$

Здесь $\Pi(u)$ — матрица Гессе конечного элемента, которая определяется из второй вариации потенциальной энергии деформации ($\delta^2 W = \delta u_e^T \Pi(u) \Delta u_e$); q_e — вектор узловой нагрузки, $G(u)$ — градиент потенциальной энергии деформации ($\Delta W = G(u) \Delta u_e$).

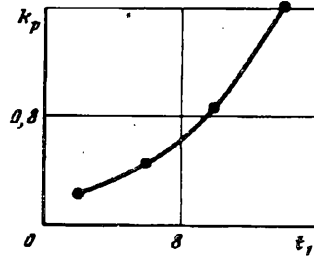
Используя выражения (1.4), (1.5), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (4.6), получаем окончательный вид вектора G и матрицы Π :

$$G = \iint_s \{T_1 S_1 + T_2 S_2 + T_{12} S_{12} - M_2 R_1 - M_2 R_2 - 2M_{12} R_{12}\} ds \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_s \{K [(S_1 + \nu S_2) S_1^T + (S_2 + \nu S_1) S_2^T + \nu_1 S_{12} S_{12}^T] + \\ &+ D [(R_1 + \nu R_2) R_1^T + (R_2 + \nu R_1) R_2^T + \nu_1 R_{12} R_{12}^T] + T_1 F_1 + T_2 F_2 + \\ &+ T_{12} F_{12} + M_1 H_1 + M_2 H_2 + 2M_{12} H_{12}\} ds \end{aligned} \quad (5.3)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

$$S_i^T = t_i^T P_{,i}, \quad S_{12}^T = t_2^T P_{,1} + t_1^T P_{,2}$$

$$t_i = r_{,i} + u_{,i}, \quad t_u = r_{,u} + u_{,u}, \quad t_{12} = r_{,u} + u_{,12}$$

$$t_3 = r_1 \times r_1 + r_1 \times u_2 + u_1 \times r_2 + u_1 \times u_2$$

$$u_{,i} = P_{,i} u_e, \quad u_{,u} = P_{,u} u_e, \quad u_{,12} = P_{,12} u_e$$

$$r_{,i} = P_{,i} r_e, \quad r_{,u} = P_{,u} r_e, \quad r_{,12} = P_{,12} r_e$$

$$R_i^T = t_3^T P_{,u} + (t_u \times t_1)^T P_{,2} + (t_2 \times t_u)^T P_{,1}$$

$$R_{12} = t_3^T P_{,12} + (t_{12} \times t_1)^T P_{,2} + (t_2 \times t_{12})^T P_{,1}$$

$$F_i = P_{,i}^T P_{,i}, \quad F_{12} = P_{,2}^T P_{,1} + P_{,1}^T P_{,2}$$

$$H_i = L_{1i} + L_{1i}^T + L_{2i} + L_{2i}^T + L_{3i} + L_{3i}^T$$

$$H_{12} = L_1 + L_1^T + L_2 + L_2^T + L_3 + L_3^T$$

$$L_{1i} = P_{,2}^T \langle t_1 \rangle P_{,u}, \quad L_{2i} = -P_{,1}^T \langle t_2 \rangle P_{,u}$$

$$L_{3i} = P_{,1}^T \langle t_u \rangle P_{,2}, \quad L_i = P_{,2}^T \langle t_1 \rangle P_{,12}$$

$$L_2 = -P_{,1}^T \langle t_2 \rangle P_{,12}, \quad L_3 = P_{,1}^T \langle t_{12} \rangle P_{,2}$$

Далее обычным образом [1] строится уравнение для всей конструкции, решение которого проводится методом L -разложения матрицы Гессе. Контроль устойчивости осуществляется проверкой на положительную определенность матрицы Гессе с помощью критерия Сильвестера [1].

6. Исследования сходимости решений. В качестве примера рассмотрим классическую тестовую задачу изгиба цилиндрической оболочки со свободными краями двумя диаметрально противоположными сосредоточенными силами. Численные линейные решения сравнивались с аналитическим решением Тимошенко [2], полученным в предположении о недеформируемости образующей. Была взята оболочка длиной $L = 100$ см, радиусом $R = 100$ см, модулем Юнга $E = 0,7 \times 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$. Толщина оболочки h варьировалась от 1 см до 0,1 см. Вместе с толщиной варьировалась нагрузка P таким образом, чтобы прогиб под силой по решению Тимошенко равнялся $w = 0,23244$ см. Ввиду симметрии оболочки и нагрузки рассматривалась четверть оболочки по окружности (фиг. 2).

Для 48-ми степенного элемента при интегрировании по 16-ти точкам для различных значений R/h были проведены исследования сходимости значений величины прогиба w под силой в зависимости от числа элементов в окружном направлении на четверти окружности (исследования показали, что в осевом направлении во всех случаях достаточно 2-х элементов). Из расчетов следует

практически одинаковая скорость сходимости, обусловленная согласованностью конечного элемента и точностью принятых геометрических соотношений.

Небольшие различия между численными решениями Тимошенко, убывающие при уменьшении толщины оболочки, объясняются погрешностью аналитического решения, обусловленной предположением о недеформируемости образующей. На фиг. 3 показана относительная погрешность Δ решения Тимошенко, которая уже при $R/h = 200$ становится несущественной.

Аналогичные исследования сходимости для 36-ти степенного элемента при 9-ти точечном интегрировании показали, что этот элемент практически не уступает совместному 48-ми степенному элементу, являясь более экономичным. Уменьшение почти в 2 раза числа точек интегрирования и, следовательно, времени формирования матрицы жесткости конечного элемента, практически не влияет на точность расчетов.

7. Исследование устойчивости сферической панели при локальном нагружении. Исследована линейная задача прочности и устойчивости четырехугольной сферической панели радиуса $R = 200$ см, толщины $t = 1$ см с углами раствора $\varphi_0 = \pi/2$, $\alpha_0 = \pi/2$, защемленной по контуру и нагруженной по центру сжимающей силой P . По среднему сечению панель подкреплена шпангоутом прямоугольного поперечного сечения толщины t и ширины b ($\bar{b} = b/R = 0,0625$). Оболочка выполнена из материала с $E = 7 \times 10^4$ МПа, $\nu = 0,3$.

На фиг. 4 показана зависимость безразмерного параметра $k_p = \bar{P}/1,56 \cdot 10^4$, где $\bar{P} = P/(Dk_2)$ — относительное критическое значение радиальной силы, от параметра t_1 . С увеличением параметра t_1 параметр k_p увеличивается. Это обусловлено снижением уровня сжимающих усилий в области потери устойчивости панели, которые и определяют несущую способность оболочки. Качественно формы потери устойчивости панели похожи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кабанов В. В., Астрахарчик С. В. Нелинейное деформирование и устойчивость подкрепленных цилиндрических оболочек при изгибе // *Пространственные конструкции в Красноярском крае* / Красноярск: КИСИ. 1985. С. 75—83.
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. *Пластинки и оболочки*. М.: Физматгиз, 1963. 636 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
15.I.1994