МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1994

УДК 539.3

© 1994 г. Л. А. ШАПОВАЛОВ

О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ ОБОЛОЧЕК К ЖЕСТКИМ СМЕЩЕНИЯМ И ПОВОРОТАМ В НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕОРИЯХ

При построении приближенных нелинейных теорий оболочек основное внимание обычно уделяется обсуждению кинематики деформирования, обеспечивающей приведение соотношений теории упругости к двумерным уравнениям, и получению упрощенных зависимостей для деформаций поверхности. Вопрос о поведении нелинейных деформаций при жестких смещениях и поворотах чаще игнорируется, либо рассматривается недостаточно полно. Преимущественное число работ в этой области относится к линейной теории цилиндрических оболочек [1—3]. Об учете движений оболочки как твердого целого при анализе нелинейных мер растяжения и изгиба упоминается в публикациях [4, 5].

В связи с развитием метода конечных элементов и его распространением в современных инженерных расчетах, вопрос о чувствительности деформаций оболочек к жестким смещениям и поворотам становится весьма актуальным. Недостаточное внимание к нему может служить источником дополнительных погрешностей при численных исследованиях.

В предлагаемой работе оценивается точность геометрических соотношений некоторых приближенных нелинейных теорий [5—10] при жестких движениях оболочки. Анализ деформаций производится путем непосредственного вычисления составляющих удлинений, сдвигов, кривизн и кручения при конечных перемещениях и конечных поворотах оболочки как твердого тела. Необходимые формулы получены в линиях кривизны и позволяют исключать из рассмотрения ложные деформации дискретных элементов при использовании численных методов расчета. Обсуждается вариант квадратичной теории оболочек, свободной от погрешностей, связанных с жесткими движениями.

1. Жесткие смещения и конечные повороты поверхности. Будем рассматривать гладкую поверхность F в трехмерном пространстве x_i $(i = 1, 2, 3)$, отнесенную к линиям кривизны α_m $(m = 1, 2)$ и заданную в параметрической форме

$$x_i = x_i(\alpha_1, \alpha_2) \tag{1.1}$$

Пусть $\boldsymbol{R}(\alpha_1, \alpha_2)$ — вектор положения поверхности, $\boldsymbol{k}_i$ — орты декартовой системы координат

$$\boldsymbol{R} = x_1\boldsymbol{k}_1 + x_2\boldsymbol{k}_2 + x_3\boldsymbol{k}_3 \tag{1.2}$$

Для ортов $\boldsymbol{e}_m$ линий α_m и единичной нормали поверхности $\boldsymbol{n}$ имеем

$$\boldsymbol{e}_m = A_m^{-1}\partial \boldsymbol{R}/\partial\alpha_m, \quad \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2)\,|\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2|^{-1} \tag{1.3}$$

где A_m — параметры Ламе.

Располагая формулами (1.1)—(1.3), получим соотношения между единичными векторами обеих координатных систем

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n}\}, \quad \boldsymbol{k} = \{\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3\}$$

$$A = \begin{Vmatrix} A_1^{-1}\,\partial x_1/\partial\alpha_1 & A_1^{-1}\,\partial x_2/\partial\alpha_1 & A_1^{-1}\,\partial x_3/\partial\alpha_1 \\ A_2^{-1}\,\partial x_1/\partial\alpha_2 & A_2^{-1}\,\partial x_2/\partial\alpha_2 & A_2^{-1}\,\partial x_3/\partial\alpha_2 \\ (A_1A_2)^{-1}\,p & (A_1A_2)^{-1}\,q & (A_1A_2)^{-1}\,r \end{Vmatrix} = \|a_{ij}\|$$

$$p = (\partial x_2/\partial\alpha_1)\,(\partial x_3/\partial\alpha_2) - (\partial x_2/\partial\alpha_2)\,(\partial x_3/\partial\alpha_1)$$

$$q = (\partial x_3/\partial\alpha_1)\,(\partial x_1/\partial\alpha_2) - (\partial x_3/\partial\alpha_2)\,(\partial x_1/\partial\alpha_1)$$

$$r = (\partial x_1/\partial\alpha_1)\,(\partial x_2/\partial\alpha_2) - (\partial x_1/\partial\alpha_2)\,(\partial x_2/\partial\alpha_1) \qquad (1.4)$$

Здесь малыми и большими полужирными буквами обозначены столбцовые и квадратные матрицы; индекс (Т) указывает на операцию транспонирования; i, $j = 1,\ 2,\ 3$.

Введем в рассмотрение вектор смещения поверхности U и его компоненты в декартовых и криволинейных координатах

$$\boldsymbol{U} = u_1\boldsymbol{k}_1 + u_2\boldsymbol{k}_2 + u_3\boldsymbol{k}_3 = u\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}_2 + w\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{u}^\circ = \{u_1, u_2, u_3\}$$

$$\boldsymbol{u} = \{u, v, w\}, \qquad (\boldsymbol{u}^\circ)^\mathrm{T}\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{u}^\mathrm{T}\boldsymbol{e} \qquad (1.5)$$

Из матричных уравнений (1.5), (1.4) найдем

$$(\boldsymbol{u}^\circ)^\mathrm{T}\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{u}^\mathrm{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{u}^\circ = \boldsymbol{A}^\mathrm{T}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{u}^\mathrm{T}\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{u}^\circ)^\mathrm{T}\boldsymbol{A}^\mathrm{T}\boldsymbol{e}, \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^\circ \qquad (1.6)$$

Пусть составляющие полного переноса и конечного поворота поверхности, как абсолютно твердого тела, определяются в системе координат x_i соответственно проекциями c_i и углами φ_i $(i = 1, 2, 3)$. Координаты поверхности F после жесткого движения, обозначаемые $x^\vee$, находятся с помощью линейного преобразования [11]:

$$\boldsymbol{x}^\vee = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{k}_1 + c_2\boldsymbol{k}_2 + c_3\boldsymbol{k}_3 = \{c_1, c_2, c_3\}$$

$$\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, x_3\}, \qquad \boldsymbol{x}^\vee = \{x_1^\vee, x_2^\vee, x_3^\vee\}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_3$$

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_1 \end{Vmatrix}; \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{Vmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{Vmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (1.7)$$

В формулах (1.7) предполагается, что повороты поверхности совершаются в последовательности вращений относительно осей x_3, x_2, x_1; $s_i = \sin\varphi_i$, $c_i = \cos\varphi_i$.

В результате жестких смещений и поворотов, поверхность F переходит в положение $F^\vee$, а ее материальные точки, с учетом (1.7), получают перемещения

$$\boldsymbol{u}^\circ = \boldsymbol{x}^\vee - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{c} = \{c_1, c_2, c_3\} \qquad (1.8)$$

где $\boldsymbol{E}$ — единичная матрица.

Составляющие вектора смещения в линиях кривизны вычисляются согласно выражениям (1.8), (1.6):

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\,[\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{u}_c + \boldsymbol{u}_\varphi, \quad \boldsymbol{u}_c = \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{u}_\varphi = \boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{u}_c = \{u_c, v_c, w_c\}, \qquad \boldsymbol{u}_\varphi = \{u_\varphi, v_\varphi, w_\varphi\}, \qquad u_c = a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3$$

$$v_c = a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3, \quad w_c = a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 \qquad (1.9)$$

В частном случае, при повороте срединной поверхности на угол φ_i, с учетом круговой перестановки индексов i, j, k внутри каждой из формул, имеем

$$u_\varphi^i = (x_j a_{1j} + x_k a_{1k})\,(\cos\varphi_i - 1) + (x_j a_{1k} - x_k a_{1j})\sin\varphi_i$$

$$v_\varphi^i = (x_j a_{2j} + x_k a_{2k})\,(\cos\varphi_i - 1) + (x_j a_{2k} - x_k a_{2j})\sin\varphi_i$$

$$w_\varphi^i = (x_j a_{3j} + x_k a_{3k})(\cos\varphi_i - 1) + (x_j a_{3k} - x_k a_{3j})\sin\varphi_i \tag{1.10}$$

Здесь и далее верхний индекс i относится к составляющей поворота на угол φ_i. Зависимости для полных перемещений (1.9), ввиду громоздкости формул, здесь не приводятся.

Как известно, в соответствии с правилами матричного умножения, пребразование поворота (1.7) не обладает свойством коммутативности, и величины полных перемещений $\boldsymbol{u}$ определяются очередностью выполнения поворотов φ_i [12]. В данной работе ограничимся анализом чувствительности деформаций к отдельным составляющим конечного поворота $\boldsymbol{B}$, опуская исследования влияния на окончательный результат последовательности вращений. Вместе с тем, при анализе деформаций линейного и квадратичного приближений достаточно вместо конечных составляющих φ_i рассматривать малые вращения, для которых свойства коммутативности не нарушаются.

2. Параметры деформации при жестких перемещениях и поворотах. Выпишем основные геометрические параметры, которые используются при записи различных вариантов мембранных и изгибных деформаций в нелинейной теории оболочек [13]:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v + \frac{w}{R_1}, \quad \omega_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u, \quad \omega = \omega_1 + \omega_2$$

$$\theta_1 = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{u}{R_1}, \quad \varkappa_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\theta_2, \quad \tau_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\theta_1$$

$$\tau = \frac{1}{2}\left(\tau_1 + \tau_2 + \frac{\omega_1}{R_2} + \frac{\omega_2}{R_1}\right), \quad \delta = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)(1 \rightleftarrows 2) \tag{2.1}$$

Здесь ε_1, ω, $\varkappa_1$, τ_1 — линейные составляющие удлинений, сдвигов, кривизн и кручения; ω_1, θ_1 — углы поворота векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{n}$ соответственно относительно ортов $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{e}_2$; δ — бесконечно малое вращение элемента поверхности около нормали.

Для вычисления деформаций и углов поворота (2.1) при смещениях оболочки как твердого тела (1.9) необходимо привлечь к рассмотрению некоторые вспомогательные тождества, содержащие одновременно параметры Ламе A_m, радиусы кривизны R_m и декартовы координаты поверхности $x_i(\alpha_1, \alpha_2)$. С целью их получения умножим орты $\boldsymbol{k}_i$ последовательно на произвольные функции $\psi_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $\psi_2(\alpha_1, \alpha_2)$, $\psi_3(\alpha_1, \alpha_2)$ и продифференцируем результаты по переменным α_1 или α_2:

$$\boldsymbol{k}_1\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \alpha_1}, \quad \boldsymbol{k}_1\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \alpha_2}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \psi_1(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{n})$$

$$\boldsymbol{k}_2\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial \alpha_1}, \quad \boldsymbol{k}_2\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial \alpha_2}; \quad \boldsymbol{f}_2 = \psi_2(a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{32}\boldsymbol{n}) \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{k}_3\frac{\partial \psi_3}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_3}{\partial \alpha_1}, \quad \boldsymbol{k}_3\frac{\partial \psi_3}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial \boldsymbol{f}_3}{\partial \alpha_2}, \quad \boldsymbol{f}_3 = \psi_3(a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{n})$$

Учитывая зависимости (1.4) и формулы дифференцирования единичных векторов, представим каждое из шести равенств (2.2) в форме восемнадцати скалярных тождеств

$$\frac{a_{1i}}{A_1}\frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial a_{1i}\psi_i}{\partial \alpha_1} + \frac{a_{2i}\psi_i}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{a_{3i}\psi_i}{R_1}, \quad \frac{a_{1i}\psi_i}{R_1} + \frac{a_{3i}}{A_1}\frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial a_{3i}\psi_i}{\partial \alpha_1}$$

$$\frac{a_{1i}}{A_2}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_2}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial a_{1i}\psi_i}{\partial\alpha_i}-\frac{a_{2i}\psi_i}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_2},\quad \frac{a_{2i}}{A_1}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_1}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial a_{2i}\psi_i}{\partial\alpha_1}-\frac{a_{1i}\psi_i}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}$$

$$\frac{a_{2i}}{A_2}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_2}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial a_{2i}\psi_i}{\partial\alpha_2}+\frac{a_{1i}\psi_i}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}+\frac{a_{3i}\psi_i}{R_2},\quad \frac{a_{2i}\psi_i}{R_2}+\frac{a_{3i}}{A_2}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_2}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial a_{3i}\psi_i}{\partial\alpha_2} \tag{2.3}$$

В формулах (2.3), при необходимости, будем полагать $\psi_i = x_1, x_2, x_3$, либо $\psi_i = 1$ $(i = 1, 2, 3)$.

Кроме соотношений (2.3), будем пользоваться также очевидными тождествами, являющимися следствием формул (1.4) и ортогональности матриц A, $A^{\text{т}}$:

$$a_{31} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13},\quad a_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\quad (1 \rightleftarrows 2)$$

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1,\quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0\quad (1, 2, 3) \tag{2.4}$$

Зависимости (2.1), (1.10) позволяют непосредственно вычислить параметры деформации ε_1^i, $\omega^i \ldots \delta^i$ при жестком повороте на угол φ_i и упростить их с помощью тождеств (2.3), (2.4). Результаты этих выкладок представлены формулами

$$\varepsilon_1^i = (1 - a_{1i}^2)(\cos\varphi_i - 1),\quad \omega_1^i = -a_{1i}a_{2i}(\cos\varphi_i - 1) + a_{3i}\sin\varphi_i$$

$$\varepsilon_2^i = (1 - a_{2i}^2)(\cos\varphi_i - 1),\quad \omega_2^i = -a_{1i}a_{2i}(\cos\varphi_i - 1) - a_{3i}\sin\varphi_i$$

$$\theta_1^i = a_{1i}a_{3i}(\cos\varphi_i - 1) + a_{2i}\sin\varphi_i,\quad \theta_2^i = a_{2i}a_{3i}(\cos\varphi_i - 1) - a_{1i}\sin\varphi_i$$

$$\varkappa_1^i = R_1^{-1}(a_{1i}^2 - a_{3i}^2)(\cos\varphi_i - 1),\quad \varkappa_2^i = R_2^{-1}(a_{2i}^2 - a_{3i}^2)(\cos\varphi_i - 1)$$

$$\tau_1^i = R_1^{-1}[a_{1i}a_{2i}(\cos\varphi_i - 1) + a_{3i}\sin\varphi_i],\quad \omega^i = -2a_{1i}a_{2i}(\cos\varphi_i - 1)$$

$$\tau_2^i = R_2^{-1}[a_{1i}a_{2i}(\cos\varphi_i - 1) - a_{3i}\sin\varphi_i],\quad \delta^i = a_{3i}\sin\varphi_i,\quad \tau^i = 0 \tag{2.5}$$

3. Анализ нелинейных деформаций при движении оболочки как твердого тела. Выпишем точные формулы для нелинейных деформаций теории тонких оболочек, построенных на основе гипотез Кирхгофа—Лява [14]:

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + zk_{11},\quad \varepsilon_{12} = e_{12} + 2zk_{12},\quad e_{11} = 1/2\,[(A_1^*A_1^{-1})^2 - 1] =$$

$$= \varepsilon_1 + 1/2\,(\varepsilon_1^2 + \omega_1^2 + \theta_1^2),\quad e_{12} = A_1^*A_2^*(A_1A_2)^{-1}\cos\chi_{12} =$$

$$= \omega_1(1 + \varepsilon_2) + \omega_2(1 + \varepsilon_1) + \theta_1\theta_2,\quad k_{11} = (A_1^*A_1^{-1})^2(1/R_1^* - 1/R_1)$$

$$k_{12} = A_1^*A_2^*(A_1A_2)^{-1}[1/R_{12}^* - 1/2\,(1/R_1 + 1/R_2)\cos\chi_{12}]$$

$$1/R_1^* = -b_{11}^*(A_1^*)^{-2},\quad 1/R_{12}^* = -b_{12}^*(A_1^*A_2^*)^{-1}\quad (1 \rightleftarrows 2)$$

$$b_{11}^* = -\frac{A_1}{1+\varepsilon_1}\left\{(1+\varepsilon_2)\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha_1} - \theta_2\frac{\partial\omega_1}{\partial\alpha_1} + (1+\varepsilon_1)\left[\frac{\theta_2}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} + \frac{A_1}{R_1}(1+\varepsilon_2)\right]\right\}$$

$$b_{12}^* = -\frac{A_1A_2}{1+\varepsilon_1}\left\{\frac{1}{A_2}\left[(1+\varepsilon_2)\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha_2} - \theta_2\frac{\partial\omega_1}{\partial\alpha_2}\right] - (1+\varepsilon_1)\left(\frac{\theta_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} + \frac{\omega_2}{R_2}\right)\right\} \tag{3.1}$$

Здесь $e_{\alpha\beta}$, $k_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$ — мембранные деформации и изменения кривизн и кручения поверхности; $1/R_\alpha^*$, $1/R_{\alpha\beta}^*$ — геометрические кривизны и кручение; звездочки относятся к деформированному состоянию оболочки.

Первоначально установим изменения основных линейных параметров оболочки при движениях переноса поверхности, определяемых вектором $\boldsymbol{c}$. В соответствии с формулами (2.1), (1.9), найдем

$$\varepsilon_1^c = c_1\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial a_{11}}{\partial\alpha_1} + \frac{a_{21}}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} + \frac{a_{31}}{R_1}\right) + c_2\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial a_{12}}{\partial\alpha_1} + \frac{a_{22}}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} + \frac{a_{32}}{R_1}\right) +$$

$$+ c_3\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial a_{13}}{\partial\alpha_1} + \frac{a_{23}}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} + \frac{a_{33}}{R_1}\right), \quad \omega_1^c = c_1\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial a_{21}}{\partial\alpha_1} - \frac{a_{11}}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\right) +$$

$$+ c_2\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial a_{22}}{\partial\alpha_1} - \frac{a_{12}}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\right) + c_3\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial a_{23}}{\partial\alpha_1} - \frac{a_{13}}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\right) \tag{3.2}$$

$$\theta_1^c = c_1\left(-\frac{1}{A_1}\frac{\partial a_{31}}{\partial\alpha_1} + \frac{a_{11}}{R_1}\right) + c_2\left(-\frac{1}{A_1}\frac{\partial a_{32}}{\partial\alpha_1} + \frac{a_{12}}{R_1}\right) + c_3\left(-\frac{1}{A_1}\frac{\partial a_{33}}{\partial\alpha_1} + \frac{a_{13}}{R_1}\right)$$

Принимая во внимание тождества (2.3) при $\psi_i = 1$, получим

$$\varepsilon_1^c = \omega_1^c = \theta_1^c = \varkappa_1^c = \tau_1^c = \tau^c = 0 \qquad (1 \rightleftarrows 2) \tag{3.3}$$

Таким образом, при жестких перемещениях поверхности, задаваемых с помощью вектора $\boldsymbol{c}$, компоненты линейной деформации оболочки (3.3) тождественно равны нулю. Как следствие, все нелинейные деформации вида (3.1), содержащие в своей структуре параметры (2.1), не зависят от движений типа переноса.

При исследовании чувствительности нелинейных деформаций к поворотам ограничимся далее рассмотрением характеристик деформированного состояния (3.1) при вращении на угол φ_i.

Для коэффициентов первой квадратичной формы и мембранных деформаций, с учетом (3.1), (2.5), (2.4), имеем

$$(A_1^*)^i = A_1, \quad \cos\chi_{12}^i = 0, \quad e_{11}^i = 0, \quad e_{12}^i = 0 \tag{3.4}$$

Например

$$(A_1^*)^i = A_1\,[(1+\varepsilon_1^i)^2 + (\omega_1^i)^2 + (\theta_1^i)^2] = A_1\,\{[1 + (1 - a_{1i}^2)(\cos\varphi_i - 1)]^2 +$$

$$+ [a_{1i}a_{2i}(\cos\varphi_i - 1) - a_{3i}\sin\varphi_i]^2 + [a_{1i}a_{2i}(\cos\varphi_i - 1) + a_{2i}\sin\varphi_i]^2\}^{1/2} =$$

$$= A_1\,\{1 + (1 - a_{1i}^2)\,[2(\cos\varphi_i - 1) + (\cos\varphi_i - 1)^2 + \sin^2\varphi_i]\}^{1/2} = A_1 \tag{3.5}$$

При определении коэффициентов второй квадратичной формы $b_{\alpha\beta}^*$ и изменений кривизн $k_{\alpha\beta}$, содержащих в своей структуре производные параметров a_{ij} (1.4), воспользуемся тождествами (2.3). Для углов жесткого поворота φ_i, после преобразований с учетом (2.3), (2.4), (2.5), получим

$$(b_{11}^*)^i = -A_1^2R_1^{-1}, \quad (b_{12}^*)^i = 0, \quad k_{11}^i = 0, \quad k_{12}^i = 0 \tag{3.6}$$

Учитывая (2.5), (2.3), обобщим результаты (3.4), (3.6)

$$e_{\alpha\beta}^i = 0, \quad k_{\alpha\beta}^i = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2; \quad i = 1, 2, 3) \tag{3.7}$$

Таким образом, как и следовало ожидать, точные геометрические зависимости нелинейной теории оболочек (3.1) не чувствительны к жестким конечным поворотам, так как для каждой из составляющих φ_i матриц $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$ функции $e_{\alpha\beta}$, $k_{\alpha\beta}$ тождественно равны нулю. Этот результат подтверждает правильность основных формул (2.5), (2.6) и тождеств (2.3), используемых при доказательстве результатов (3.4)—(3.7).

Перейдем к исследованию приближенных геометрических зависимостей нелинейной теории оболочек при жестких движениях. Учитывая равенства (3.2), (3.3), полученные для случая переноса поверхности, достаточно в последующем рассматривать поведение нелинейных деформаций лишь при поворотах оболочки как твердого тела. При этом естественно согласовывать величины жестких поворотов и упругих вращений поверхности, допускаемых с точки зрения конкретной приближенной теории.

Ограничимся далее анализом классических теорий оболочек, основанных на гипотезах Кирхгофа—Лява. В этих теориях предполагается малость деформаций и различные порядки малости для составляющих вектора упругого вращения. При использовании результатов опубликованных работ, содержащих тензорную символику, будем приводить необходимые формулы в физических составляющих тензоров и векторов.

В геометрических соотношениях, содержащихся в [5, 8] и полученных для умеренных поворотов элемента поверхности с учетом вращения относительно нормали, мембранные и изгибные дефомации предлагается вычислять по уравнениям

$$e_{11} = \varepsilon_1 + 1/2\,(\theta_1^2 + \delta^2), \quad e_{12} = \omega + \theta_1\theta_2$$

$$k_{11} = \varkappa_1, \quad k_{12} = \tau - 1/2\,(1/R_1 + 1/R_2)\,\omega \qquad (1 \rightleftarrows 2) \tag{3.8}$$

Подсчитывая компоненты деформаций e^i_{11}, e^i_{12}, k^i_{11}, k^i_{12} при жестких поворотах, в квадратичном приближении найдем

$$e^i_{11} = O(\varphi_i^3), \quad e^i_{12} = O(\varphi_i^3), \quad k^i_{11} = -1/2\,R_1^{-1}\,(a_{1i}^2 - a_{3i}^2)\,\varphi_i^2 + O(\varphi_i^4)$$

$$k^i_{12} = 1/2\,a_{1i}a_{2i}\,(1/R_1 + 1/R_2)\,\varphi_i^2 + O(\varphi_i^4) \tag{3.9}$$

Из оценок (3.9) следует, что геометрические зависимости квадратичных теорий [5, 8] не чувствительны к жестким поворотам для мембранных деформаций. Однако, в том же приближении точность изгибных деформаций является недостаточной, ввиду принятых здесь линейных зависимостей для изменений кривизн и кручения (3.8).

В нелинейных теориях малых поворотов, принадлежащих ряду авторов [6, 7, 5] считается, что вращение элемента поверхности вокруг нормали имеет порядок удлинений и им можно пренебречь в сравнении с поворотами относительно тангенциальных ортов. Такой подход был указан в монографии [15] при упрощении деформаций гибких тел. В теории малых поворотов для деформаций принимаются соотношения

$$e_{11} = \varepsilon_1 + 1/2\,\theta_1^2, \quad e_{12} = \omega + \theta_1\theta_2, \quad k_{11} = \varkappa_1, \quad k_{12} = \tau \qquad (1 \rightleftarrows 2) \tag{3.10}$$

Формулы (3.10) для деформаций e_{11} и кривизн k_{11} обладают существенной чувствительностью к жестким поворотам. Действительно, из (2.5), (3.10) находим

$$e^i_{11} = -1/2\,a_{3i}^2\varphi_i^2 + O(\varphi_i^3), \quad e^i_{12} = O(\varphi_i^3)$$

$$k^i_{11} = -1/2\,R_1^{-1}\,(a_{1i}^2 - a_{3i}^2)\,\varphi_i^2 + O(\varphi_i^4), \quad k^i_{12} = 0 \tag{3.11}$$

Для пологих оболочек, внутренняя геометрия которых мало отличается от эвклидовой геометрии на плоскости, а в составляющих упругих вращений θ_1, θ_2 не учитываются тангенциальные смещения, нелинейные деформации имеют вид [16, 7, 17]:

$$e_{11} = \varepsilon_1 + 1/2\,(1/A_1\partial w/\partial\alpha_1)^2, \quad e_{12} = \omega + 1/(A_1A_2)\,(\partial w/\partial\alpha_1)\,(\partial w/\partial\alpha_2)$$

$$k_{11} = -1/A_1^2\partial^2 w/\partial\alpha_1^2, \quad k_{12} = -1/(A_1A_2)\,\partial^2 w/\partial\alpha_1\partial\alpha_2 \qquad (1 \rightleftarrows 2) \tag{3.12}$$

Для оценки чувствительности выражений (3.12) воспользуемся соотношениями (1.10), (2.5). В результате получим

$$e^i_{11} = 1/2 \left\{ \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (x_j a_{3k} - x_k a_{3j}) \right]^2 - (1 - a^2_{1i}) \right\} \varphi^2_i + O(\varphi^3_i)$$

$$e^i_{12} = \left[a_{1i} a_{2i} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (x_j a_{3k} - x_k a_{3j}) \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (x_j a_{3k} - x_k a_{3j}) \right] \varphi^2_i + O(\varphi^3_i)$$

$$k^i_{11} = -\frac{1}{A^2_1} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2_1} (x_j a_{3k} - x_k a_{3j}) \varphi_i + O(\varphi^2_i)$$

$$k^i_{12} = -\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} (x_j a_{3k} - x_k a_{3j}) \varphi_i + O(\varphi^2_i) \tag{3.13}$$

Приближение (3.12), с учетом (3.13), весьма чувствительно к жестким поворотам, особенно при определении изгибных деформаций. Подобную же точность при учете движений поверхности как твердого тела имеют геометрические зависимости для слабо искривленных пластин — наиболее раннего варианта теории пологих оболочек [9].

В уравнениях простейшего варианта теории непологих оболочек учитываются квадратичные слагаемые не только в мембранных, но и в изгибных деформациях. Нормальная составляющая вектора упругого вращения считается пренебрежимо малой. В качестве приближенных геометрических зависимостей предлагаются выражения [10]:

$$e_{11} = \varepsilon_1 + 1/2\, \theta^2_1, \quad e_{12} = \omega + \theta_1 \theta_2, \quad k_{11} = \varkappa_1 - \frac{\theta^2_2}{2R_1}, \quad k_{12} = \tau \quad (1 \rightleftarrows 2) \tag{3.14}$$

При жестком повороте на угол φ_i деформации (3.14) принимают значения

$$e^i_{11} = -1/2\, a^2_{3i} \varphi^2_i + O(\varphi^3_i), \quad e^i_{12} = O(\varphi^3_i), \quad k^i_{12} = 0$$

$$k^i_{11} = -1/2\, R^{-1}_1 (2a^2_{1i} - a^2_{3i}) \varphi^2_i + O(\varphi^3_i) \quad (1 \rightleftarrows 2) \tag{3.15}$$

Таким образом, приближенные геометрические зависимости (3.9)—(3.15), в которых не учитываются вращения элемента поверхности относительно нормали, либо опускаются квадратичные слагаемые в изгибных деформациях, в той или иной мере обнаруживают склонность к появлению ложных мембранных и изгибных деформаций различных порядков малости.

4. Нелинейные деформации оболочки, свободные от погрешностей при жестких движениях. Анализ чувствительности приближенных теорий оболочек к движениям как твердого тела показывает, что при построении непротиворечивых соотношений для деформаций необходимо учитывать все три составляющих вектора упругого вращения и сохранять в кривизнах и кручении соответствующие им нелинейные слагаемые. Для получения таких зависимостей будем исходить из геометрических соотношений оболочки, как трехмерной среды. Необходимые упрощения тензора Грина ε_{12} выполним в соответствии с теорией, изложенной в монографии [15].

В линиях кривизны для компонентов конечной деформации имеем

$$\varepsilon_{11} = \gamma_{11} + 1/2\, [\gamma^2_{11} + (1/2\, \gamma_{12} + \delta_3)^2 + (1/2\, \gamma_{13} - \delta_2)^2] \tag{4.1}$$

$$\varepsilon_{12} = \gamma_{12} + \gamma_{11} (1/2\, \gamma_{12} - \delta_3) + \gamma_{22} (1/2\, \gamma_{12} + \delta_3) + (1/2\, \gamma_{13} - \delta_2)(1/2\, \gamma_{23} + \delta_1)$$

Здесь γ_{ik}, δ_k $(i, k = 1, 2, 3)$ — деформации и упругие вращения элемента тела, связанные со смещениями u_z, v_z, w_z в направлении координатных линий α_1, α_2, z известными формулами [15].

Используя гипотезы Кирхгофа—Лява, положим

$$\gamma_{23} = \gamma_{31} = \gamma_{33} = 0 \tag{4.2}$$

Система дифференциальных уравнений в перемещениях (4.2) имеет решение

$$
\begin{aligned}
&u_z = u(\alpha_1, \alpha_2) + z\theta(\alpha_1, \alpha_2), \quad \theta = -\gamma_{13}^0 (1 - \gamma_{11}^0) + \gamma_{12}^0\gamma_{23}^0 \\
&v_z = v(\alpha_1, \alpha_2) + z\psi(\alpha_1, \alpha_2), \quad \psi = -\gamma_{23}^0 (1 - \gamma_{22}^0) + \gamma_{21}^0\gamma_{13}^0 \\
&w_z = w(\alpha_1, \alpha_2) + z\chi(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi = -1/2\,(\gamma_{13}^{02} + \gamma_{23}^{02})
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Здесь γ_{ik}^0 — линейные деформации срединной поверхности.

В дальнейшем, рассматривая геометрию деформирования приближенной нелинейной теории оболочек, которая уточняет результаты, полученные в [10], будем оценивать порядки удлинений, сдвигов и вращений поверхности следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_1 = \gamma_{11}^0 \sim \varepsilon^2, \quad \varepsilon_2 = \gamma_{22}^0 \sim \varepsilon^2, \quad \omega = \gamma_{12}^0 + \gamma_{21}^0 \sim \varepsilon^2 \\
&\theta_1 = -\gamma_{13}^0 \sim \varepsilon, \quad \theta_2 = -\gamma_{23}^0 \sim \varepsilon, \quad \delta = 1/2\,(\gamma_{12}^0 - \gamma_{21}^0) \sim \varepsilon \\
&\omega_1 = \gamma_{12}^0 = \delta + \omega/2 \sim \varepsilon, \quad \omega_2 = \gamma_{21}^0 = -\delta + \omega/2 \sim \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Предположения (4.4) обеспечивают малость мембранных деформаций поверхности и одинаковый порядок малости поворотов элемента оболочки относительно нормали и координатных линий α_1, α_2. Кроме того, в силу (4.4) удлинения и сдвиги являются величинами более высокого порядка малости, чем составляющие вектора упругого вращения $\Omega = -\theta_2\boldsymbol{e}_1 + \theta_1\boldsymbol{e}_2 + \delta\boldsymbol{n}$.

С учетом оценок (4.4) формулы (4.3) допускают упрощение

$$
\theta = \theta_1 - \omega_1\theta_2, \quad \psi = \theta_2 - \omega_2\theta_1, \quad \chi = -1/2\,(\theta_1^2 + \theta_2^2) \tag{4.5}
$$

Пользуясь (4.3), (4.4), вычислим перемещения эквидистантной поверхности

$$
u_z = u + z(\theta_1 - \omega_1\theta_2), \quad v_z = v + z(\theta_2 - \omega_2\theta_1), \quad w_z = w - z/2\,(\theta_1^2 + \theta_2^2) \tag{4.6}
$$

Для деформаций (4.1) в приближении (4.4) воспользуемся зависимостями

$$
\varepsilon_{11} = \gamma_{11} + 1/2\,(\delta_2^2 + \delta_3^2), \quad \varepsilon_{22} = \gamma_{22} + 1/2\,(\delta_1^2 + \delta_3^2), \quad \varepsilon_{12} = \gamma_{12} - \delta_1\delta_2 \tag{4.7}
$$

где при $z/R_i \ll 1$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{11} = \varepsilon_1 + z(q_{11} - \varepsilon_1/R_1), \quad \gamma_{12} = \omega + z[q_{12} + q_{21} - (\omega_1/R_1 + \omega_2/R_2)] \\
&\gamma_{22} = \varepsilon_2 + z(q_{22} - \varepsilon_2/R_2), \quad 2\delta_1 = -(\psi + \theta_2) + z(q_{23} - \omega_2/R_2) \\
&2\delta_2 = \theta + \theta_1 - z(q_{13} - \omega_1/R_1), \quad 2\delta_3 = 2\delta + z[q_{12} - q_{21} - (\omega_1/R_1 - \omega_2/R_2)] \\
&q_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\psi + \frac{\chi}{R_1}, \quad q_{21} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_2} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\psi \\
&q_{12} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_1}\theta, \quad q_{22} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\theta + \frac{\chi}{R_2} \\
&q_{13} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\chi}{\partial\alpha_1} - \frac{\theta}{R_1}, \quad q_{23} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial\chi}{\partial\alpha_2} - \frac{\psi}{R_2}
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

При вычислении деформаций (4.7) в квадратичном приближении относительно параметра ε (4.4) в выражениях для углов поворота δ_k ($k = 1, 2, 3$) достаточно сохранить линейные слагаемые. В результате, с помощью формул (4.6), найдем

$$
\varepsilon_{11} = e_{11} + zk_{11}, \quad \varepsilon_{22} = e_{22} + zk_{22}, \quad \varepsilon_{12} = e_{12} + 2zk_{12}
$$

$$
e_{11} = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \delta^2), \quad k_{11} = q_{11} - \frac{\varepsilon_1}{R_1} + \frac{\delta}{2}\left(\tau_1 - \tau_2 - \frac{\omega_1}{R_1} + \frac{\omega_2}{R_2}\right)
$$

$$e_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(\theta_2^2 + \delta^2), \quad k_{22} = q_{22} - \frac{\varepsilon_2}{R_2} - \frac{\delta}{2}\left(\tau_2 - \tau_1 - \frac{\omega_2}{R_2} + \frac{\omega_1}{R_1}\right)$$

$$e_{12} = \omega + \theta_1\theta_2, \quad k_{12} = 1/2\left(q_{12} + q_{21} - \frac{\omega_1}{R_1} - \frac{\omega_2}{R_2}\right) \tag{4.9}$$

С учетом формул (4.8), (4.5) и (2.1) определим

$$q_{11} = \varkappa_1 - \frac{\omega_1}{A_1}\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha_1} - \frac{\theta_2}{A_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\omega_2\theta_1 - \frac{1}{2R_1}(\theta_1^2 + \theta_2^2)$$

$$q_{12} = \tau_1 - \frac{\omega_2}{A_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha_1} - \frac{\theta_1}{A_1}\frac{\partial\omega_2}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\omega_1\theta_2 \quad (1 \rightleftarrows 2) \tag{4.10}$$

Уравнения (4.10) содержат частные производные углов ω_1, ω_2 по переменным α_1, α_2, для оценки порядка которых привлечем уравнения совместности деформаций [4, 18]:

$$\theta_2 = \frac{R_1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial A_2\omega}{\partial\alpha_1} - A_2\frac{\partial\omega_1}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - A_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\alpha_2}\right] \tag{4.11}$$

Принимая во внимание порядки величин мембранных деформаций ε_i, ω и поворотов θ_i в уравнениях (4.11), для искомых производных получим приближенные формулы

$$\partial\omega_1/\partial\alpha_1 \approx -A_1R_1^{-1}\theta_2, \quad \partial\omega_2/\partial\alpha_1 \approx A_1R_1^{-1}\theta_2 \tag{4.12}$$

С помощью соотношений (4.10), (4.12), (4.4), привлекая тождества $\tau_1 = \tau + R_1^{-1}(\delta - \omega/2)$, $\tau_2 = \tau - R_2^{-1}(\delta + \omega/2)$, установим

$$q_{11} = \varkappa_1 - \tau\delta - \frac{\delta^2}{R_1} - \frac{\theta_1^2}{2R_1} + \frac{\theta_2^2}{2R_1}, \quad q_{12} = \tau_1 + \varkappa_1\delta - \frac{\theta_1\theta_2}{R_1}$$

$$q_{22} = \varkappa_2 + \tau\delta - \frac{\delta^2}{R_2} - \frac{\theta_2^2}{2R_2} + \frac{\theta_1^2}{2R_2}, \quad q_{21} = \tau_2 - \varkappa_2\delta - \frac{\theta_1\theta_2}{R_2} \tag{4.13}$$

Выражения (4.13) позволяют записать изгибные деформации поверхности (4.9) в виде

$$k_{11} = \varkappa_1 + \frac{\theta_2^2}{2R_1} - \frac{\delta^2}{2R_1} - \left(\tau\delta + \frac{e_{11}}{R_1}\right)$$

$$k_{22} = \varkappa_2 + \frac{\theta_1^2}{2R_2} - \frac{\delta^2}{2R_2} + \left(\tau\delta - \frac{e_{22}}{R_2}\right)$$

$$k_{12} = \tau + \frac{1}{2}(\varkappa_1 - \varkappa_2)\delta - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{e_{12}}{2} \tag{4.14}$$

Слагаемые e_{11}/R_1, e_{22}/R_2, $(1/R_1 + 1/R_2)e_{12}/2$ в правых частях равенств (4.14) для тонких оболочек принято отбрасывать, вследствие их малости в сравнении с мембранными деформациями (4.9). В этом случае имеем

$$k_{11} = \varkappa_1 + \theta_2^2/(2R_1) - \delta^2/(2R_1) - \tau\delta, \quad k_{12} = \tau + 1/2(\varkappa_1 - \varkappa_2)\delta$$

$$k_{22} = \varkappa_2 + \theta_1^2/(2R_2) - \delta^2/(2R_2) + \tau\delta \tag{4.15}$$

С помощью равенств (2.5) можно убедиться, что геометрические зависимости квадратичной теории (4.15) при жестких поворотах имеют погрешности порядка φ_i^3. Формулы (4.15) можно упростить, если сохранить в них минимальное число квадратичных слагаемых, обеспечивающих независимость деформаций при движениях оболочки как твердого тела. Поступая таким образом, с учетом (4.9), найдем

$$e_{11} = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \delta^2), \quad k_{11} = \varkappa_1 + \frac{1}{2R_1}(\theta_2^2 - \delta^2)$$

$$e_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(\theta_2^2 + \delta^2), \quad k_{22} = \varkappa_2 + \frac{1}{2R_2}(\theta_1^2 - \delta^2)$$

$$e_{12} = \omega + \theta_1\theta_2, \quad k_{12} = \tau \tag{4.16}$$

Погрешности выражений (4.16) составляют

$$e_{11}^l = 1/2\, a_{1l}a_{2l}a_{3l}\varphi_l^3 + O(\varphi_l^4), \quad e_{12}^l = -1/4\,(a_{1l}^2 + a_{2l}^2)\, a_{3l}\varphi_l^3 + O(\varphi_l^4)$$

$$k_{11}^l = 1/2\, R_1^{-1}\, a_{1l}a_{2l}a_{3l}\varphi_l^3 + O(\varphi_l^4), \quad k_{12}^l = 0$$

Уравнения (4.16) отличаются от соответствующих формул из [4] малым членом в деформации кручения $1/2\,(R_1^{-1} + R_2^{-1})\, e_{12}$, который для тонкой оболочки здесь отброшен.

Таким образом, в качестве приближенных геометрических соотношений квадратичной теории оболочек, пригодных для использования в численных процедурах метода конечных элементов, можно рекомендовать уравнения (4.16), учитывающие повороты элемента поверхности относительно нормали и не чувствительные в заданном приближении к жестким движениям поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кантин Г., Клауф Р.* Искривленный дискретный элемент цилиндрической оболочки//Ракетная техника и космонавтика. 1968. Т. 6. № 6. С. 82—88.
2. *Кантин Г.* Зависимости деформаций цилиндрических оболочек от перемещений//Ракетная техника и космонавтика. 1968. Т. 6. № 9. С. 219—220.
3. *Кабанов В. В., Железнов Л. П.* Конечный элемент для исследования прочности и устойчивости круговой цилиндрической оболочки.— В сб.: Вопросы авиационной науки и техники. Сер. Аэродинамика и прочность летательных аппаратов. Вып. № 1. Расчет на прочность элементов авиационных конструкций, Новосибирск, СибНИА, 1989, с. 88—93.
4. *Бердичевский В. Л.* Основные соотношения теории анизотропных неоднородных оболочек. Линейное и квадратичное приближения.— В кн.: Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982. С. 74—88.
5. *Sanders J. L.* Non-linear theories for thin shells//Quart. Appl. Mathemat. 1963. V. XXI. No. 1. P. 21—36.
6. *Koiter W. T.* On the nonlinear theory of thin elastic shells//Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet. 1966. Ser. B. V. 69. No. 1. P. 1—54.
7. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 431 с.
8. *Pietraszkiewicz W.* Finite rotation and lagrangean description in the non-linear theory of shells. Warszawa—Poznań: Polish Scientific Publishers, 1979. 103 s.
9. *Marguerre K.* Zur Theorie der gekrümmten Platte großer Formänderung. Jahrb. 1939 deutsch.//Luftfahrtforschung, Bd. 1, Berlin, Adlershof Bücherei, 1939, s. 413—426.
10. *Шаповалов Л. А.* Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек. Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1968, № 1, с. 56—62.

11. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Наука, 1975. 415 с.
12. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
13. *Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И.* Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.
14. *Шаповалов Л. А.* Уравнения эластики тонкой оболочки при неосесимметричной деформации. Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 3, с. 62—72.
15. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.— М.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. 211 с.
16. *Доннелл Л. Г.* Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 567 с.
17. *Власов В. З.* Избранные труды. Т. 1. М.: Изд АН СССР, 1962. 528 с.
18. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: ГИТТЛ, 1953. 544 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.VII.1993