

УДК 539.375

© 1994 г. Б. А. ЗИМИН

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАСШТАБНОГО ЭФФЕКТА  
В РАЗРУШЕНИИ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ  
МЕТОДОМ ОТСЛАИВАНИЯ

Современные композиционные материалы обладают широким спектром свойств, существенно зависящих от выбора компонентов, структуры и технологии. Механические свойства таких материалов часто имеют случайную природу, поэтому предсказание несущей способности и долговечности конструкции из такого материала должно носить вероятностный характер. Все это делает весьма желательным разработку теории разрушения конструкций из композиционных материалов, в основе которых лежат стохастические модели. При этом, как указывает В. В. Болотин [1], такие модели должны удовлетворять двум требованиям: во-первых, оставаться состоятельными для малых вероятностей разрушения и, во-вторых, описывать масштабный эффект разрушения, допуская при этом прогнозирование на большие масштабы. В настоящей работе используется статистический анализ процессов расслоения для того, чтобы развить стохастическую модель, позволяющую описывать дефектность межслойного пространства и разрушение с учетом масштабного эффекта.

Методы отслаивания давно применяют для исследования трещиностойкости композитных материалов [2—4]. На фиг. 1 показана схема отслаивания, аналитическое исследование которой проведено в [3].

При испытаниях точка  $A$  движется со скоростью движения активного захвата испытательной машины  $v$ , а в точке  $B$  считаем, что отсутствует поворот сечения, поэтому расчетную модель можно выбрать в виде консольной балки.

Перемещение точки  $A$  равно  $f_A = vt$ ,  $t$  — время испытания. Связь между силой  $P$  и величиной  $f_H$  для выбранной расчетной модели (фиг. 1) известна

$$f_A = P_A \beta^3 / (3EJ) \quad (1)$$

где  $E$  — модель Юнга материала,  $J$  — момент инерции поперечного сечения отдельного слоя.

Допустим, что в момент времени  $t_0$  перемещение  $f_0 = vt_0$ , тогда величина усилия, необходимого для создания перемещения  $f_0$ , и сила  $P_0$ , фиксируемая силоизмерителем испытательной машины, будет из (1):

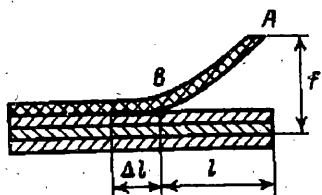
$$P_0 = 3f_0 EJ / \beta_0^3 \quad (2)$$

Предположим, что в следующий момент  $t_0 + \Delta t$  произошел разрыв (отслоение) композита (фиг. 1), и величина  $l_0$  стала равна  $l = l_0 + \Delta l$ .

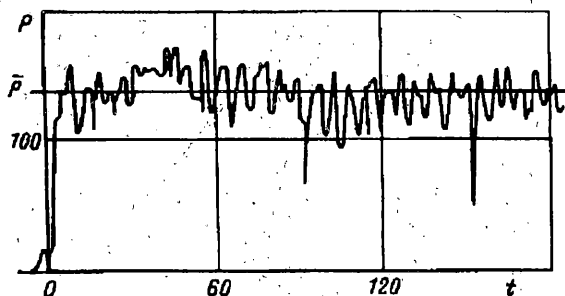
Переход  $l_0 \rightarrow l_0 + \Delta l$  можно считать мгновенным, так как скорость распространения трещины обычно намного больше скорости нагружения.

Найдем изменившуюся силу  $P$ , заменяя  $l_0$  на  $l_0 + \Delta l$  в (2), и учитывая, что  $\Delta l / l_0 \ll 1$ :

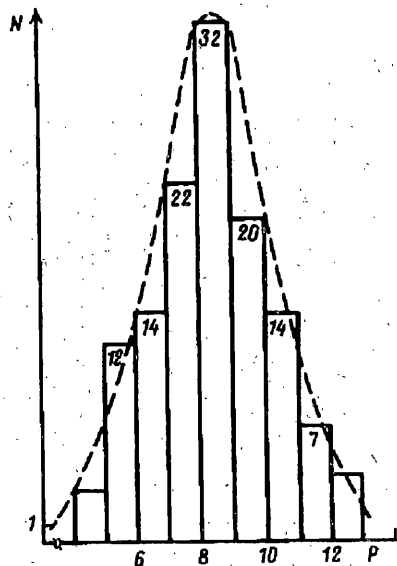
$$P = \frac{3f_0 EJ}{\beta_0^3 (1 + 3\Delta l / l_0)} \quad (3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Поскольку жесткость машины неизмеримо больше жесткости отслаиваемой полоски, на диаграмме сила  $P$  — перемещение конца полоски  $f$  будет зафиксирован скачок

$$\Delta P = P_0 - P = P_0 3\Delta l/l_0 \quad (4)$$

Затем снова происходит процесс активного нагружения, и величина  $P$  возрастает пропорционально  $f = vt$  до какой-то критической величины  $P_1$ , происходит отслоение — падение нагрузки на диаграмме  $P - 1$  и так далее.

Типичный экспериментальный график в координатах сила — перемещение (адгезиограмма) представлен на фиг. 2 ( $P, N$ ). Поскольку образец не симметричен относительно поверхности разрушения, в вершине трещины не создается чисто нормальное напряженное состояние. Реализуется смешанное разрушение, а именно: сочетание нормального отрыва и поперечного сдвига. Из экспериментов по расслоению [2, 3] определяют удельную работу разрушения  $\gamma = P/2b$ , где  $P$  — тах силы на адгезиограмме,  $b$  — ширина образца ( $\bar{P}$  — среднее значение силы).

В расчетах обычно используют средние арифметические максимумов пиков на адгезиограммах. Величина средней удельной работы разрушения  $\bar{\gamma}$ , полученной в результате экспериментов на образцах, используется при оценке адгезионной прочности композитных материалов. Она характеризует трещиностойкость в случае растягивающих напряжений, действующих в поперечном к поверхностям раздела направлении, и сжимающих напряжений, действующих вдоль поверхностей раздела.

Используя критерий по числу экстремумов и критерий, основанный на знаках разностей [5], было показано [6, 7], что гипотезу о случайном характере процесса расслоения для углепластиков и стеклопластиков можно считать удовлетворительной. Таким образом можно рассматривать диаграмму  $P - t$  (сила — время), записанную во время испытаний, как запись реализации некоторого случайного процесса.

Причины, порождающие случайность процессов расслоения композитов, за-

Таблица 1

	$\bar{t}_0$ сек	$\bar{n}_0$ Гц	$\bar{t}_m$ сек	$\bar{n}_m$ Гц	$\bar{k}$	$P_{\max}$ Н	$\sigma$ Н	$m$ Н	$N$
ГIII-12-13	4,58	0,109	2,73	0,183	1,67	250	22,8	155,7	147
ГIII-8	6	0,083	3,65	0,136	1,64	147	15,4	89	105
ГIII-10	4,94	0,101	2,45	0,203	2,01	237,5	—	—	109
ГIII-11	2,98	0,167	2,37	0,21	1,26	162,5	18,4	93	107
ГIV-9	3	0,166	2,58	0,193	1,16	156,3	25	115	137
ГIV-8	4,9	0,102	3,24	0,154	1,52	128,7	18,4	85	128
ГIV-VIII	3,1	0,162	2,1	0,238	1,47	152,5	35,3	139	148
ГV-9	3,13	0,159	2,85	0,175	1,1	176,3	35,5	139	107
ГVI-9-10	4,63	0,107	3,5	0,143	1,32	200	25	165	144

Таблица 2

	$\bar{t}_0$ сек	$\bar{n}_0$ Гц	$\bar{t}_m$ сек	$\bar{n}_m$ Гц	$\bar{k}$	$P_{\max}$ Н	$\sigma$ Н	$m$ Н	$N$
CV-VII	2,73	0,183	1,62	0,31	1,68	48	3,8	32	158
CV-V	3,8	0,131	1,69	0,29	2,23	36,3	3,8	27	149
CV-VIII	3,6	0,138	1,8	0,277	2	37,5	4,6	32	161
CV-III-IV	5,66	0,9	4,16	0,12	1,4	38,7	3,8	34	139
CV-II	2,65	0,188	2,11	0,236	1,35	47,5	6,5	41	146
CV-I	3,15	0,158	2	0,25	1,57	25	5,6	23	129

ключаются в несовершенстве связи между слоями углестеклопластиков. Поэтому некоторые характеристики случайной и детерминированной составляющей процесса  $P-t$  (в зависимости от постановки задачи) могли бы служить дополнительными показателями качества связи между слоями композита. В работе [7] была предложена модель разрушения композита и математическое описание периодической компоненты  $P-t$  процесса расслоения. Конкретными причинами образования случайной компоненты  $P$  являются: непроклеи, наросты, сколы, шероховатость стеклоткани. Наиболее изученным из случайных процессов является нормальный стационарный случайный процесс [9]. Известно [8], что нормальность процесса предполагает нормальность всех его конечномерных распределений. Трудно рассчитывать на то, что из экспериментальных данных удастся извлечь столь богатую информацию. Поэтому на практике ограничиваются исследованием одномерных распределений [7] и считают правдоподобной гипотезу о нормальности процесса, если это распределение согласуется с нормальным.

Под выборочным распределением числа ординат кривой  $P-t$  понимается в дальнейшем гистограмма, построенная по выборке ординат  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_N$ , измеренных по реализации  $P-t$  через интервал  $\Delta t$ . Числовые характеристики случайной величины  $P$  рассчитывались по известным формулам математической статистики:

математическое ожидание

$$m_p = \sum_{i=1}^n P_i/N \quad (5)$$

среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_p = \left( \sum_{i=1}^n (P_i - m_p)^2/N \right)^{1/2} \quad (6)$$

Характерное распределение нагрузки  $P$  для одного из видов углепластика

IV-8 показано на фиг. 3. Для описания такого распределения  $P$  целесообразно использовать нормальный закон с плотностью:

$$f(P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_p} \exp \left( -\frac{(P - m_p)^2}{2\sigma_p^2} \right) \quad (7)$$

В табл. 1, 2 приведены характеристики распределений параметров  $P$  для некоторых видов угле- и стеклопластиков:  $C$  — означает углепластик,  $G$  — стеклопластик, первая цифра за материалом — вид технологической обработки, вторая цифра — номер разрушаемого слоя.

Достоверность сделанных выводов на основании обработки статистических данных существенно зависит от объема рассматриваемых выборок. Необходимый объем выборки  $N$  можно приближенно оценить по формуле [9]:

$$N \cong -\ln(1 - P_2)/\beta \quad (8)$$

где  $\beta$  — доверительная вероятность,  $P_2$  — верхняя граница доверительного интервала для вероятности. Например, при  $\beta = 0,05$  и  $P_2 = 0,97$ ,  $n = 71$ . Объем выборок  $N$  указан в табл. 1, 2.

Так как значение  $\gamma$  определяется величинами локальных максимумов процесса  $P - t$ , то существенное влияние на прогноз работоспособности изделия из композитного материала может оказать предсказание значения абсолютного максимума процесса  $P - t$ :  $P_{\max}$ . Эта величина зависит от длительности реализации процесса  $T$ , а размеры изделия могут быть существенно больше размеров (времени испытания  $t$ ) образцов, возникает задача экстраполирования зарегистрированного на образцах (за время испытаний  $t$ ) абсолютного максимума  $P_{\max}$  на изделие (масштабный эффект). Задача может быть решена, используя методику, аналогичную описанной в [8, с. 231—233] для расчета надежности и усталостной долговечности.

Исходными данными для расчетов, которые получают непосредственно из эксперимента, являются: время реализации процесса  $t$ , наблюдаемое значение абсолютного максимума  $P_{\max}$ ; набор интервалов времени между нулями процесса  $\tau_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ), где  $n$  — число интервалов времени между нулями; набор интервалов времени между экстремумами  $\tau_j^*$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), где  $m$  — число интервалов времени между экстремумами. Методика расчета величин аналогична [8]. Результаты статистической обработки экспериментов представлены в таблицах 1, 2.

Зафиксировав на реализации  $P - t$  абсолютный максимум  $P_{\max}$ , определяем ожидаемое значение стандарта процесса  $\bar{\sigma}$  из соотношений Крамера [8]:

$$\beta = \frac{P_{\max}}{\bar{\sigma}} = \sqrt{2 \ln(n_0 t)} + \frac{0,577}{\sqrt{2 \ln(n_0 t)}} \quad (9)$$

При такого рода расчетах обычно используют правило трех стандартов [8] и принимают  $\beta = 3$ .

Задача экстраполирования зарегистрированного за время испытаний  $t$  абсолютного максимума  $P_{\max}$  на время, соответствующее размерам конструкции из композитного материала  $T \gg t$  решается непосредственным применением формулы (9) подстановкой в нее вместо времени испытания  $t$  ожидаемого времени  $T$  (соответствующего размеру конструкции).

Рассмотрим пример использования описанной методики. Материал — углепластик  $C-9$ . Случайный процесс расслоения его описывается эффективной частотой  $n_0 = 0,159$  Гц, записанный в течение  $t = 180$  с = 3 мин, имеет абсолютный максимум  $P_{\max} = 176,3$  Н. Ожидаемое значение стандарта процесса по формуле  $\bar{\sigma} = 62,7$  Н. Ожидаемое значение  $P_{\max}(T)$  за время  $T = 10t$  (изделие в 10 раз

больше образца) получим, используя формулу (9)  $P_{\max}(10t) = 221,6$  Н, за время  $T = 100t$  (изделие в 100 раз больше образца)  $P_{\max}(100t) = 259$  Н.

Параметр сложности структуры процесса  $k$  [9] может быть использован для описания структуры слоистого композитного материала. Из физических соображений следует, что  $1 \leq k < \infty$ , при этом  $k = 1$  — соответствует узкополостному процессу, а перемещение  $k$  к правому краю интервала говорит о возрастании роли высокочастотных составляющих в  $P - t$ . Результаты статистической обработки экспериментов (табл. 1, 2) позволяют сделать вывод, что у стеклопластиков параметр сложности  $k$  выше, чем у углепластиков. Наличие высокочастотных составляющих свидетельствует о существовании нескольких механизмов расслоения. Размахи на диаграмме  $P - t$  — это приращения процесса между двумя соседними экстремумами. Его величина пропорциональна скачку трещины расслоения  $\Delta l$  — формула (4). Следовательно, плотность распределения размаха между соседними экстремумами будет описывать вероятностный процесс продвижения трещины в угле- и стеклопластике при расслоении.

Для стационарного гауссовского процесса, каким и является процесс расслоения рассматриваемых композитов, возможно получение приближенных эффективных оценок распределения амплитуд [8]. Оказалось, что с хорошим приближением можно принять в качестве плотности распределения половин размахов распределение Рэлея [8]:

$$f(x) = k^2 x \exp(-k^2 x^2 / 2) \quad (10)$$

$$\bar{x} = (\pi\sqrt{2})^{1/2} / k, \quad \bar{x}^2 = 2 / k^2,$$

где  $k$  — параметр сложности процесса.

Анализ распределения Рэлея указывает на то, что с увеличением  $k$  величина математического ожидания скачка расслоения  $\bar{\Delta l}$  уменьшается, но увеличивается вероятность обнаружить скачок расслоения  $2\Delta l$ , по сравнению с узкополостным процессом.

Поясним сказанное на примере. Рассмотрим узкополостной процесс  $k = 1$ , математическое ожидание скачка (в безразмерных единицах)  $\bar{\Delta l} = 1,253$ , а вероятность обнаружить при расслоении скачок величиной  $2\Delta l$ :  $f = 0,0885$ .

Рассмотрим широкополостной процесс с  $k = 2$ , тогда  $\bar{\Delta l} = 0,626$ , а вероятность обнаружения скачка  $2\Delta l$  равна  $f = 0,21$ .

Приведенные выше рассуждения показывают важность и информативность такой характеристики процесса  $P - t$  как  $k$ . Исходя из анализа разрушения (расслоения) композиционного многослойного материала, можно сделать вывод, что величины скачков расслоений тесно связаны с дефектностью межслойного пространства. Таким образом, вычисляя сложность процесса  $k$ , мы тем самым строим однопараметрическую функцию (10), описывающую дефектность межслойного пространства в многослойных композиционных материалах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В. В. Дефекты типа расслоений в конструкциях из композитных материалов // Механика композитных материалов. 1984. № 2. С. 239—255.
2. Бугаков И. И., Уткин А. А. Зависимость трещиностойкости тканевых стеклопластиков от способа укладки ткани // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257. № 2. С. 294—295.
3. Бугаков И. И. Исследование трещиностойкости армированных пластиков отслаиванием // В кн.: Вопросы судостроения. Технология судостроения. Вып. 12. Ленинград: 1976. С. 3—11.
4. Плюдеман Э. Поверхности раздела в полимерных композитах. М.: Мир, 1978. 294 с.
5. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М.: Наука, 1976.

6. *Зимин Б. А., Анолик М. В.* Статистическая модель межслойной прочности и прогнозирование разрушения слоистых пластиков по поверхности раздела//Механика и технология полимерных и композиционных материалов и конструкций. Тез. докл. научно-техн. семинара. С.-Петербург: 1992. С. 58—59.
7. *Zimin B. A.* Statistical analysis of the strength lamination for the composite materials and glue joins/Fracture mechanics: successes and problems. Collection of Abstracts: Eighth International Conference of Fracture. UKRAINE, 1993. Part. II. P. 407.
8. *Зимин Б. А., Паукишто М. В.* К расчёту межслойной прочности//В кн.: Вычислительная механика деформируемого твердого тела. Вып. 2. Москва: 1991. С. 22—30.
9. *Гусев А. С., Светлицкий В. А.* Расчет конструкций при случайных воздействиях. М.: Машиностроение, 1984. 240 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию  
20.X.1993