

УДК 539.374

© 1994 г. Б. С. САРБАЕВ

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ
С ТРАНСЛЯЦИОННЫМ УПРОЧНЕНИЕМ

В [1] предложен вариант теории пластичности изотропного тела с трансляционным упрочнением. Особенность данной теории заключается в том, что тензор второго ранга, определяющий координаты центра симметрии поверхности нагружения в пространстве напряжений, является функционалом от функции, описывающей историю деформирования в пространстве пластических деформаций. Теория удовлетворительным образом описывает эффекты пластического деформирования, обнаруженные для изотропных материалов [2—4].

К настоящему времени в отечественной и зарубежной литературе опубликованы работы, в которых по существу дано развитие рассматриваемой теории [5—10]. Основное внимание уделяется построению зависимости для тензора, задающего координаты центра симметрии поверхности нагружения, а также способу описания искажения формы поверхности нагружения. В [11] предпринята попытка использования данной теории пластичности в численных методах решения краевых задач.

В статье выполнен анализ уравнений теории пластичности с трансляционным упрочнением, разработанной Г. Бакхаусом. Представляется, что предлагаемый анализ может быть полезен по следующим причинам: вопрос об использовании данной теории в численных методах решения краевых задач изучен недостаточно; как отмечалось в [12], в предельном случае из уравнений рассматриваемой теории вытекают уравнения так называемой эндохронной теории пластичности [13]. Вследствие этого полезно сравнить некоторые выводы и решения, следующие из теории Г. Бакхауса и эндохронной теории. В качестве примера в статье приведено описание сложного нагружения с постоянной интенсивностью напряжений.

1. Рассмотрим изотропное пластическое тело, объемное деформирование которого происходит линейно-упруго. Будем исследовать вариант теории пластичности с трансляционным упрочнением, в котором девиаторы напряжений s_{ij} и пластических деформаций e_{ij}^p связаны следующими зависимостями [1] (изотропным расширением поверхности нагружения пренебрегаем):

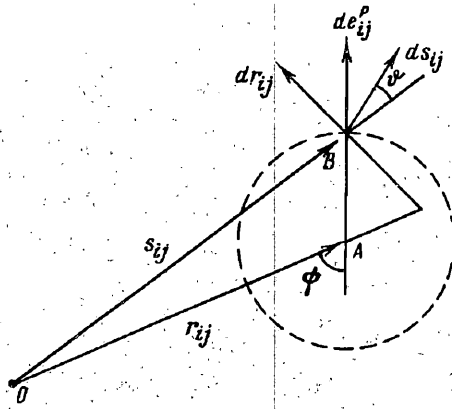
$$s_{ij} = 2/3 \sigma_0 de_{ij}^p / d\xi_p + r_{ij} \tag{1.1}$$

$$r_{ij} = \frac{2}{3} R \int_0^{\xi_p} \psi(\xi_p, \xi_p') \frac{de_{ij}^p}{d\xi_p'} d\xi_p' \tag{1.2}$$

Здесь σ_0 — предел текучести, R — параметр материала, причем $R > 0$, $(d\xi_p)^2 = 2/3 de_{ij}^p de_{ij}^p$ — параметр Одквиста.

Ядро $\psi(\xi_p, \xi_p')$ обладает свойствами $\psi(\xi_p, \xi_p') > 0$, $\psi(\xi_p, \xi_p) \equiv 1$. Уравнение поверхности нагружения имеет вид $s_{ij}^0 s_{ij}^0 = 2/3 \sigma_0^2$, где $s_{ij}^0 = s_{ij} - r_{ij}$. Равенства (1.1) и (1.2) справедливы при $s_{ij}^0 s_{ij}^0 = 2/3 \sigma_0^2$, $s_{ij}^0 ds_{ij} > 0$; при условии $s_{ij}^0 s_{ij}^0 = 2/3 \sigma_0^2$ и $s_{ij}^0 ds_{ij} \leq 0$ имеем $ds_{ij} = 2G de_{ij}$, где G — модуль сдвига.

В теории данного типа необходим анализ функции $\psi(\xi_p, \xi_p')$, отсутствующей при изотропном упрочнении. В частных случаях ее вид можно конкретизировать.



Фиг. 1

Например, если существует такая функция $f(\xi_p) > 0$, $f(0) = 1$, для которой справедлива зависимость

$$f(\xi_p) \frac{\partial \psi}{\partial \xi_p} + f(\xi_p') \frac{\partial \psi}{\partial \xi_p'} = 0 \quad (1.3)$$

то ядро $\psi(\xi_p, \xi_p')$ может быть представлено в виде разностного ядра относительно величины z_p , т. е.

$$\psi(\xi_p, \xi_p') = \Phi [z_p(\xi_p) - z_p(\xi_p')] \quad (1.4)$$

причем $dz_p = d\xi_p / f(\xi_p)$, $\Phi(0) = 1$. Если ядро $\psi(\xi_p, \xi_p')$ при этом является вырожденным ядром вида $\psi(\xi_p, \xi_p') = \theta(\xi_p') / \theta(\xi_p)$, где функция $\theta(x)$ удовлетворяет условиям $\theta(x) > 0$, $d\theta/dx > 0$, $\theta(0) = 1$, то из (1.3) получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $d\theta/\theta = \alpha d\xi_p / f(\xi_p)$, где $\alpha > 0$. Интегрируя его, для (1.2), будем иметь

$$r_{ij} = \frac{2}{3} R \int_0^{\xi_p} \exp \{-\alpha [z_p(\xi_p) - z_p(\xi_p')]\} \frac{de_{ij}^p}{d\xi_p} d\xi_p' \quad (1.5)$$

На фиг. 1 условно изображено взаимное расположение поверхности нагружения и векторов, задаваемых тензорами s_{ij} , r_{ij} , ds_{ij} , dr_{ij} , de_{ij}^p , имеющее место при использовании (1.5). Отметим, что согласно терминологии введенной в [5,13], величина z_p называется параметром внутреннего времени. В [1] для $\psi(\xi_p, \xi_p')$ по существу было предложено следующее выражение (в обозначениях данной статьи): $\psi(\xi_p, \xi_p') = \varphi(\xi_p') \exp [-\alpha (\xi_p - \xi_p')^\rho]$, где α , ρ — параметры материала.

Другим условием, ограничивающим область возможных ядер, является условие устойчивого деформирования, записываемое в виде $dr_{ij} de_{ij}^p > 0$. Достаточное условие для выполнения этого неравенства можно представить так

$$0 < R^* \leq 1, \quad R^* = \frac{dr^*}{d\xi_p}, \quad r^* = \int_0^{\xi_p} \psi(\xi_p, \xi_p') d\xi_p' \quad (1.6)$$

Не останавливаясь подробно на доказательстве данного утверждения, отметим, что один из возможных вариантов определения достаточных условий для выполнения неравенства типа $dr_{ij} de_{ij}^p > 0$ при наличии (1.2) можно найти в [14]. Следствием (1.6) является

$$(h_{ij} h_{ij})^{1/2} < \sqrt{2/3} R \quad (1.7)$$

$$h_{ij} = \frac{2}{3} R \int_0^{\xi_p} \frac{\partial}{\partial \xi_p} \Psi(\xi_p, \xi_p') \frac{de_{ij}^p}{d\xi_p'} d\xi_p'$$

Можно убедиться, что в случае применения (1.5) условие (1.6) выполняется. Из (1.7) при этом получим

$$\sqrt{3}L < \sigma_f, \quad L^2 = \sqrt{2}r_{ij}r_{ij}, \quad \sigma_f = Rf(\xi_p)/\alpha \quad (1.8)$$

В теории пластичности, основанной на концепции регулярной поверхности нагружения и постулате Друккера, существует линейная зависимость между тензорами ds_{ij} и de_{ij} [15]. В данном случае из (1.1) и (1.2) можно получить

$$s_{ij}^0 de_{ij} = \sigma_0 a^2 d\xi_p \quad (1.9)$$

$$a^2 = \left(1 + \frac{1}{3G} \frac{dr_{ij}}{d\xi_p} \frac{de_{ij}^p}{d\xi_p} \right)$$

При выполнении (1.5) имеем

$$a^2 = 1 + \frac{R}{3G} \left(1 - \frac{\sqrt{3}L}{\sigma_f} \cos \psi \right)$$

Угол ψ определяется равенством $r_{ij}de_{ij}^p = \sqrt{3}L d\xi_p \cos \psi$. Из (1.1), (1.2) и (1.9) следует искомая зависимость

$$ds_{ij} = 2Gde_{ij} - s_{ij}^0 s_{kl}^0 de_{kl} / b^2, \quad b^2 = a^2 \sigma_0^2 / (3G) \quad (1.10)$$

Переходя к векторно-матричной форме записи, получим из (1.10):

$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon \quad (1.11)$$

где σ, ε — векторы напряжений и деформаций соответственно. Матрица касательных характеристик жесткости D_{ep} имеет вид

$$D_{ep} = D - y^0 (y^0)^T / b^2 \quad (1.12)$$

где D — матрица упругих характеристик, $y^0 = (s_{11}^0, s_{22}^0, s_{33}^0, s_{12}^0, s_{13}^0, s_{23}^0)^T$. Для обращения матриц типа (1.12) удобно использовать равенство [17]:

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - \beta A^{-1} B A^{-1} \quad (1.13)$$

где A — невырожденная матрица размерностью $n \times n$; $B = xy^T$ — матрица, имеющая ранг 1; x, y — векторы размерностью n ; $\beta = (1 + \alpha)^{-1}$, $\alpha = y^T A^{-1} x$. Как следствие, имеем

$$\det(A + B) = (1 + \alpha) \det A \quad (1.14)$$

Структура матрицы D_{ep} в виде (1.12) сохраняется для различных теорий пластичности с регулярной поверхностью нагружения. Используя (1.14), можно показать, что при $dr_{ij} de_{ij}^p > 0$ и любых направлениях догрузки из данной точки в пространстве напряжений выполняется $\det D_{ep} \neq 0$. Это свойство матрицы D_{ep} , а также ее симметрия и положительная определенность позволяют создавать эффективные алгоритмы численного анализа задач прикладной теории пластичности [11, 16].

2. Рассмотрим свойства матрицы D_{ep} при следующих условиях: а) $\sigma_0 \rightarrow 0$; б) $R/3 \rightarrow G$. Условие (а) означает, что поверхность нагружения вырождается в точку. Это позволяет отождествить тензор r_{ij} с тензором s_{ij} , а пластические деформации e_{ij}^p — с полными деформациями e_{ij} . С учетом условия (б) из (1.1) и (1.2) получим

$$s_{ij} = 2G \int_0^{\xi} \psi(\xi, \xi') \frac{de_{ij}}{d\xi'} d\xi', \quad (d\xi)^2 = (2/3) de_{ij} de_{ij} \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) по существу представляет собой вариант уравнений эндохронной теории пластичности. При использовании в (2.1) разностного ядра относительно параметра z , для которого $dz = d\xi/f(\xi)$, приходим к варианту теории, предложенной в [13]. Следовательно, с точки зрения классической теории пластичности с регулярной поверхностью нагружения уравнения эндохронной теории можно трактовать как предельный случай теории с трансляционным упрочнением при вырождении поверхности нагружения в точку. Отсюда вытекает, что решения, получаемые с помощью (2.1) для частных задач, обретают смысл приближенных решений по теории Г. Бакхауса в случае $\sigma_0 \rightarrow 0$ и $R/3 \rightarrow G$. Анализ полученных результатов показывает, что при изменении компонент тензора s_{ij} на величину Δs_{ij} так, что $\Delta l \sim \sigma_0$, где $(\Delta l)^2 = 1/2 \Delta s_{ij} \Delta s_{ij}$, определяющие уравнения (1.1), (1.2) и (2.1) дают качественно различный характер деформирования. Если $\Delta l \gg \sigma_0$, то решения, вытекающие из этих уравнений, оказываются близкими.

Рассмотренный подход к эндохронной теории пластичности подтверждает особенности данной теории, отмеченные в [18, 19].

Далее для определенности будем использовать наиболее часто употребляемое в практических расчетах экспоненциальное ядро, зависящее от величины z . Из (2.1) следует

$$de_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} + \frac{s_{ij}}{2\sigma_T} d\xi, \quad \sigma_T = \frac{Gf(\xi)}{\alpha} \quad (2.2)$$

При этом справедливо неравенство $J < \sqrt{3} \sigma_T$, аналогичное (1.8). Здесь J — интенсивность напряжений, $J^2 = 1/2 s_{ij} s_{ij}$. Возводя (2.2) в квадрат и решая квадратное уравнение относительно $d\xi$, получим

$$d\xi = \frac{\sigma_T}{JG} N(J, \vartheta) dl, \quad (dl)^2 = 1/2 ds_{ij} ds_{ij}, \quad \cos \vartheta = dJ/dl \quad (2.3)$$

$$N(J, \vartheta) = \frac{\cos \vartheta + (3\sigma_T^2/J^2 - \sin^2 \vartheta)^{1/2}}{3\sigma_T^2/J^2 - 1} \quad (2.4)$$

При $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ всегда $N(J, \vartheta) > 0$. Из (2.2) после умножения на s_{ij} следует

$$(dJ/d\xi) + (G/\sigma_T) J = \sqrt{3} G \cos \psi \quad (2.5)$$

Угол ψ определяется из равенства $s_{ij} de_{ij} = \sqrt{3} J d\xi \cos \psi$.

Воспользовавшись (2.2)—(2.5), запишем уравнение в форме (1.11). Будем иметь

$$2G de_{ij} = ds_{ij} + \frac{s_{ij} s_{kl} ds_{kl}}{2J (\sqrt{3} \sigma_T \cos \psi - J)}$$

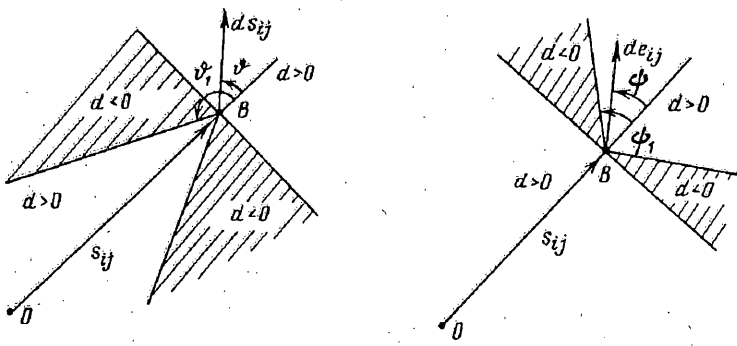
Тогда для матрицы касательных характеристик жесткости D_{ep} можно получить

$$D_{ep}^{-1} = D^{-1} + xx^T/c \quad (2.6)$$

$$x = (s_{11}, s_{22}, s_{33}, 2s_{12}, 2s_{13}, 2s_{23})^T, \quad c = 4JG (\sqrt{3} \sigma_T \cos \psi - J)$$

Согласно (1.14) находим

$$d = \det D_{ep} = \det D \frac{\sqrt{3} \sigma_T \cos \psi - J}{\sqrt{3} \sigma_T \cos \psi} \quad (2.7)$$



Фиг. 2

С помощью (2.3) и (2.5) преобразуем (2.7) к виду

$$d = \det D \frac{(1 - \sqrt{3}J^2/\sigma_T^2) \cos \vartheta}{\cos \vartheta + (J/\sqrt{3}\sigma_T) \sqrt{1 - (J^2/\sigma_T^2)} \sin^2 \vartheta} \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что $d > 0$ при $\cos \psi > 0$, $\sqrt{3}\sigma_T \cos \psi > J$ и $\cos \psi < 0$, $\sqrt{3}\sigma_T \cos \psi < J$, или при $\sqrt{3}\sigma_T \cos \vartheta + J \sqrt{3\sigma_T^2 - J^2 \sin^2 \vartheta} > 0$, $\cos \vartheta > 0$ и $\sqrt{3}\sigma_T \cos \vartheta + J \sqrt{3\sigma_T^2 - J^2 \sin^2 \vartheta} < 0$, $\cos \vartheta < 0$. Соответствующие области условно показаны на фиг. 2. Особые случаи нагружения имеют место при $\vartheta \pm \{\pi - \arccos [J(3\sigma_T^2 + J^2)^{-1/2}]\}$, $\vartheta_2 = \pm\pi/2$, т. е. при $\psi_2 = \pm\pi/2$, $\psi_1 = \pm\arccos [J/(\sqrt{3}\sigma_T)]$. Можно показать, что при $\vartheta = \vartheta_1$ ($\psi = \psi_2$) имеем $s_{ij}de_{ij} = 0$, при $\vartheta = \vartheta_2$ ($\psi = \psi_1$) — $s_{ij}ds_{ij} = 0$. Как следует из (2.7), в первом случае матрица D_{ep} является вырожденной, во втором случае вырождается матрица D_{ep}^{-1} . Характерной чертой симметричной матрицы (2.6) является то, что ее компоненты зависят от компонент тензора ds_{ij} , т. е. связь между векторами $d\sigma$ и $d\varepsilon$ является дифференциально нелинейной [20]. В зависимости от направления догрузки матрица D_{ep} может быть как положительно определенной, так и не являться таковой. Вид матриц D_{ep} и D_{ep}^{-1} при $s_{ij}de_{ij} = 0$ и $s_{ij}ds_{ij} = 0$ можно определить, рассмотрев еще один путь получения зависимости (1.11). Исключая в (2.2) и (2.3) $d\xi$, запишем

$$de_{ij} = \sqrt{2}ds_{ij}/G + (s_{ij}t_{kl}/a) ds_{kl} \quad (2.9)$$

где $a = 4JG/N(J, \vartheta)$, $t_{kl} = ds_{kl}/dl$. Отсюда после обращения по формуле (1.13) будем иметь

$$D_{ep} = D - yt^T, \quad t = f^{-1}(t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{12}, t_{13}, t_{23})^T$$

$$y = (s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{12}, s_{13}, s_{23})^T, \quad f = (J/G) \sqrt{3\sigma_T^2/J^2 - \sin^2 \vartheta} \quad (2.10)$$

Из (1.14), (2.10) получим

$$d' = \det D_{ep} = \frac{\det D}{N(J, \vartheta) \sqrt{3\sigma_T^2/J^2 - \sin^2 \vartheta}} \quad (2.11)$$

Выведенная зависимость между $d\sigma$ и $d\varepsilon$ также является дифференциально нелинейной, причем матрица D_{ep} является несимметричной. Из (2.11) следует, что $d' \neq 0$ при любом значении ϑ .

Уместно отметить, что дифференциальная нелинейность рассмотренных определяющих уравнений приводит к идее получения уравнения типа (2.2) из уравнений сингулярной пластичности [20]. Такой путь построения теории пла-

стичности без поверхности нагружения реализован в [21], где для $N(J, \vartheta)$ предложено (в принятых обозначениях)

$$N(J, \vartheta) = (G/G' - 1)((1 + \cos \vartheta)/2)^\omega$$

Здесь ω — параметр материала, $G' = d\tau/d\gamma$ — касательный модуль на диаграмме сдвига. При $\vartheta = \pm\pi$ в отличие от (2.2) имеет место линейная разгрузка, и поверхность нагружения вырождается в отрезок прямой.

Изложенные свойства теории Г. Бакхауса при $\sigma_0 \rightarrow 0$, $R/3 \rightarrow G$ могут быть полезными при построении численных алгоритмов решения краевых задач. Подчеркнем, что здесь в отличие от классических теорий пластичности из-за дифференциальной нелинейности определяющих уравнений система разрешающих уравнений краевой задачи, записанная в приращениях, является нелинейной. Поэтому при численном решении шаговым методом на каждом шаге нагружения необходимо в общем случае решать нелинейную задачу. В заключение отметим, что данное обстоятельство, а также необычные свойства матриц (2.6), (2.10) целесообразно учитывать при общей оценке значения эндохронной теории в решении задач теории пластичности.

3. С помощью зависимостей (1.1), (1.5) исследуем процесс деформирования при плоском напряженном состоянии ($\sigma_{11} \neq 0$, $\sigma_{12} \neq 0$) и постоянной интенсивности напряжений J . Полагаем, что при $\xi_p \leq \xi_{p0}$ имеет место чистый сдвиг, а при $\xi_p \geq \xi_{p0}$ нагружение осуществляется так, что $\sigma_{11}^2/3 + \sigma_{12}^2 = J_0^2 = \text{const}$. При $\xi_p \leq \xi_{p0} = \gamma_{120}^p/\sqrt{3}$ получим

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} + \frac{R}{3} \int_0^{z_p} \exp[-\alpha(z_p - z_p')] \frac{d\gamma_{12}^p}{dz_p'} dz_p'$$

При $\xi_p \geq \xi_{p0}$ удобно ввести переменную φ следующим образом: $\sigma_{11} = \sqrt{3}J_0 \sin \varphi$, $\sigma_{12} = J_0 \cos \varphi$. После преобразований имеем систему уравнений

$$d\varepsilon_{11}^p/d\xi_p = \sin \kappa, \quad d\gamma_{12}^p/d\xi_p = \sqrt{3} \cos \kappa$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi_p} = \frac{\alpha \operatorname{ctg}(\varphi - \kappa)}{f(\xi_p)} - \frac{1}{\sin(\varphi - \kappa)} \left[\frac{R}{\sigma_0 n} + \frac{\alpha}{nf(\xi_p)} \right] \quad (3.1)$$

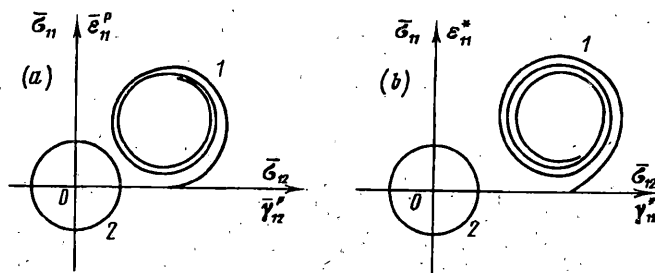
$$\frac{d\kappa}{d\xi_p} = \frac{n\alpha}{f(\xi_p) \sin(\varphi - \kappa)} - \left[\frac{R}{\sigma_0} + \frac{\alpha}{f(\xi_p)} \right] \operatorname{ctg}(\varphi - \kappa)$$

$$n = \sqrt{3}J_0/\sigma_0$$

Начальные условия таковы: $\xi_p = \xi_{p0}$, $\varepsilon_{11}^p = 0$, $\gamma_{12}^p = \gamma_{120}^p$, $\varphi = 0$, $\kappa = 0$. При $\xi_p = \xi_{p0}$ система обладает особенностью. Заметим, что при $\alpha = 0$ из (3.1) можно получить уравнения, представленные в [22].

Удовлетворительные результаты, согласующиеся с экспериментальными данными, получаются при $f(\xi_p) = 1 + \beta\xi_p$, где $\beta > 0$. На фиг. 3, а изображена типичная диаграмма деформирования в координатах $\bar{\gamma}_{12}^p - \bar{\varepsilon}_{11}^p$ (кривая 1), где $\bar{\gamma}_{12}^p = R\gamma_{12}^p/(\sqrt{3}\sigma_0)$, $\bar{\varepsilon}_{11}^p = R\varepsilon_{11}^p/\sigma_0$, полученная при численном интегрировании уравнений (3.1) методом Рунге — Кутты. Там же для сравнения показан характер изменения напряжений $\bar{\sigma}_{12} = \sigma_{12}/J_0$, $\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11}/(\sqrt{3}J_0)$ (кривая 2). Для простоты принималось $E = 3G$; при $\xi_p = \xi_{p0}$ для переменной φ задавалось малое значение.

Уравнения эндохронной теории (2.2) для данного случая позволяют получить зависимости, не обладающие особенностями в начальный момент деформирования при $J = J_0$. После преобразований будем иметь для $\xi \geq \xi_0 = \gamma_{120}^p/\sqrt{3}$:



Фиг. 3

$$d\varepsilon_{11} = \frac{d\sigma_{11}}{E} + \frac{d\sigma_{12}}{\sqrt{3}G\sqrt{3\sigma_T^2/J_0^2 - 1}} \quad (3.2)$$

$$d\gamma_{12} = -\frac{d\sigma_{11}}{\sqrt{3}G\sqrt{3\sigma_T^2/J_0^2 - 1}} + \frac{d\sigma_{12}}{G}, \quad \sigma_T = \frac{G}{\alpha} f(\xi)$$

Отметим, что при данном нагружении зависимость (2.9) вырождается в дифференциально линейную, а соответствующая матрица D_{ep} является кососимметричной. Используя переменную φ , при условии $E = 3G$ из (3.2) можно получить

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_{11}}{d\varphi} &= \frac{\sqrt{3}J_0}{E} \left(\cos \varphi + \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3\sigma_T^2/J_0^2 - 1}} \right) \\ \frac{d\gamma_{12}}{d\varphi} &= \frac{3J_0}{G} \left(-\sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{\sqrt{3\sigma_T^2/J_0^2 - 1}} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$d\xi/d\varphi = (3\sigma_T/E)(3\sigma_T^2/J_0^2 - 1)^{-1/2}$$

Начальные условия имеют вид $\varphi = 0$, $\varepsilon_{11} = 0$, $\gamma_{12} = \gamma_{120}$, $\xi = \xi_0$. Система уравнений (3.3) также может быть решена методом Рунге — Кутты. Типичная диаграмма деформирования на плоскости $\bar{\gamma}_{12}^* - \varepsilon_{11}^*$ (кривая 1), где $\varepsilon_{11}^* = E\varepsilon_{11}/(\sqrt{3}J_0)$, $\bar{\gamma}_{12}^* = G\gamma_{12}/J_0$, при $f(\xi) = 1 + \beta\xi$, $\beta > 0$ показана на фиг. 3, а. Аналогичный результат на основе иных подходов был получен в [23].

Как видно из фиг. 3, уравнения (3.1) и (3.2) дают качественно одинаковый результат. Отличие имеет место в начальный момент сложного нагружения. Например, касательные характеристики жесткости по теории Г. Бакхауса при выбранном выражении для $f(\xi_p)$ и $\xi_p \rightarrow \xi_{p0}$ равны

$$E' = \frac{d\sigma_{11}}{d\varepsilon_{11}} = E, \quad G' = \frac{d\sigma_{12}}{d\gamma_{12}} = G \left[1 - \frac{3G}{\sigma_0} F(\xi_{p0}) \right]^{-1}$$

$$F(\xi_{p0}) = \frac{(1 + \beta\xi_{p0}) [(1 + \beta\xi_{p0})^{\alpha/\beta+1} - 1]}{\alpha + \beta (1 + \beta\xi_{p0})^{\alpha/\beta+1}}$$

Согласно эндохронной теории из (3.3) при $\xi \rightarrow \xi_0$ следует $E' = E$, $G' \rightarrow 0$ для любого значения ξ_0 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Backhaus G.* Zur analytischen Darstellung des Materialverhaltens im plastischen Bereich//ZAMM. 1971. Bd. 51. P. 471—477.
2. *Backhaus G.* Zur analytischen erfassung des allgemeinen Bauschingerreffektes//Acta Mech. 1972. V. 14. No. 1. P. 31—42.
3. *Backhaus G.* Plastic deformation in form of strain trajectories of constant curvature — theory and comparison with experimental results//Acta Mech. 1979. V. 34. P. 193—204.
4. *Backhaus G.* Anisotropic behavior of cyclic plastic deformation//Colloq. intern. CNRS. 1982. N295. P. 273—284.
5. *Valanis K. C.* Fundamental consequences of a new intrinsic time measure. Plasticity as a limit of the endochronic theory//Arch. Mech. 1980. V. 23. No. 2. P. 171—191.
6. *Wu H. C., Yang C. C., Chu S. C.* Further application of endochronic constitutive equation to loading with nonproportional axial-torsional strain-path//Int. J. Non-Linear Mechanics. 1985. V. 20. No. 1. P. 41—52.
7. *Кучер Н. К., Рудницкий Н. И.* Применение эндохронной теории пластичности для исследования упругопластического деформирования металлов при сложном нагружении//Прикладная механика. 1989. Т. 25. № 5. С. 81—89.
8. *Кучер Н. К., Бородий М. В.* Описание процессов сложного нагружения в рамках эндохронной теории пластичности//Докл. АН УССР. Сер. А. 1990. № 3. С. 55—59.
9. *Watanabe O.* Anisotropic hardening law of plasticity using an internal time concept (Deformation of yield surface)//JSMI Int. J. 1987. V. 32. No. 264. P. 912—920.
10. *Wu H. C., Yeh W. C.* Some consideration in the endochronic description of anisotropic hardening//Acta Mech. 1987. V. 69. No. 1. P. 59—76.
11. *Watanabe O., Atluri S. N.* A new endochronic approach to computation elastoplasticity: example of a cyclically loaded cracked plate//J. of Appl. Mech. 1985. V. 52. No. 14. P. 857—864.
12. *Сарбаев Б. С.* Эндохронная теория пластичности анизотропных сред//Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 2. С. 106—116.
13. *Valanis K. C.* A theory of viscoplasticity without a yield surface//Arch. Mech. 1971. V. 23. No. 4. P. 517—551.
14. *Мосолов А. Б.* Единственность в малом и устойчивость в одном варианте теории пластичности//Вестник МГУ. Математика и механика. 1980. № 6. С. 81—86.
15. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
16. *Yamada Y., Yoshimura N.* Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method//Int. J. Mech. Sci. 1968. V. 10. No. 4. P. 343—354.
17. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 318 с.
18. *Sandler I. S.* On the uniqueness and stability of endochronic theory of materials behavior// J. Appl. Mech. 1978. V. 45. No. 2. P. 263—266.
19. *Клюшников В. Д.* Дефекты эндохронной теории пластичности//Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 176—178.
20. *Клюшников В. Д.* Устойчивость упругопластических систем. М.: Наука, 1980. 240 с.
21. *Клюшников В. Д.* Аналитическая теория пластичности//Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 2. С. 82—87.
22. *Ишлинский А. Ю.* Общая теория пластичности с линейным упрочнением//В кн. Прикладные задачи механики. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. С. 84—103.
23. *Мосолов А. Б.* Эндохронная теория пластичности: Препринт № 353. М.: ИПМ АН СССР. 1988. 44 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.XI.1993