МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1994

УДК 539.3

© 1994 г. В. Г. БАЖЕНОВ, А. И. КИБЕЦ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассматривается численное моделирование упругопластического деформирования конструкций, состоящих из массивных и оболочечных элементов, при импульсных и ударных воздействиях. Для решения задачи в трехмерной постановке развивается метод конечных элементов (МКЭ) с билинейной аппроксимацией скорости перемещений в 8-узловых элементах и конечно-разностной явной схемой интегрирования по времени типа «крест». Реализуемые в методике дифференцированный подход к учету вклада моментных и безмоментных составляющих деформаций и напряжений в энергию элемента и регуляризация матрицы масс улучшают сходимость схемы и повышают ее экономичность в задачах рассматриваемого класса по сравнению с известными схемами [1—4]. Эффективность предлагаемой методики иллюстрируется решением тестовых задач и сопоставлением результатов с экспериментальными данными других авторов.

1. Система уравнений, определяющая движение деформируемой конструкции, формулируется в переменных Лагранжа

$$\int_\Omega \delta\dot{\varepsilon}^T \mathbf{C}\sigma dV + \int_\Omega \delta\dot{\mathbf{u}}^T \rho\ddot{\mathbf{u}} dV = \int_\Gamma \delta\dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{q} d\gamma \tag{1.1}$$

$$\mathbf{C} = \mathrm{diag}\,(1\ \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 2)$$

$$\dot{\varepsilon} = \mathbf{D}_\varepsilon \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{D}_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \partial_2/2 & 0 & \partial_3/2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1/2 & \partial_3/2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_2/2 & \partial_1/2 \end{Vmatrix}^T \tag{1.2}$$

$$\partial_i = \partial/\partial x_i, \quad x_i = \int_0^t \dot{u}_i dt + x_i|_{t=0}$$

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon^v, \quad \sigma = \sigma' + \sigma^v, \quad \sigma^v = \sigma^v(\rho)$$

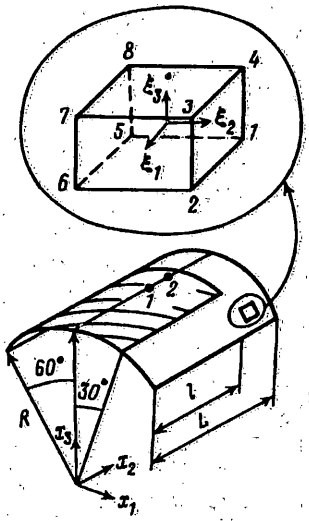
$$\varepsilon' = \varepsilon'^e + \varepsilon'^p, \quad \varepsilon_{11}'^p + \varepsilon_{22}'^p + \varepsilon_{33}'^p = 0, \quad \dot{\sigma} = 2G\dot{\varepsilon}'^e$$

$$\mathbf{r} = 2g\varepsilon'^p, \quad \mathbf{s} = \sigma' - \mathbf{r}, \quad \dot{\varepsilon}'^p = d\lambda\mathbf{S} \tag{1.3}$$

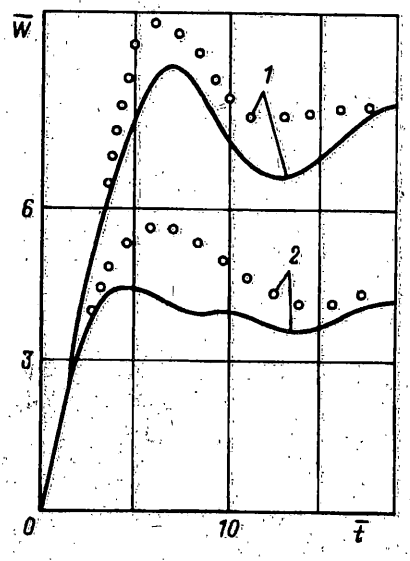
$$\mathbf{S}^T\mathbf{C}\mathbf{S} = 2/3\,\sigma_T^2, \quad \sigma_T = \sigma_T^0 + g_1\varkappa, \quad \sigma_T^0 = \sigma_T^0(I_{2\dot{\varepsilon}}), \quad I_{2\dot{\varepsilon}} = (2/3\,\dot{\varepsilon}^T\mathbf{C}\dot{\varepsilon})^{1/2}$$

$$\varkappa = \int_0^t I_{2\dot{\varepsilon}} dt$$

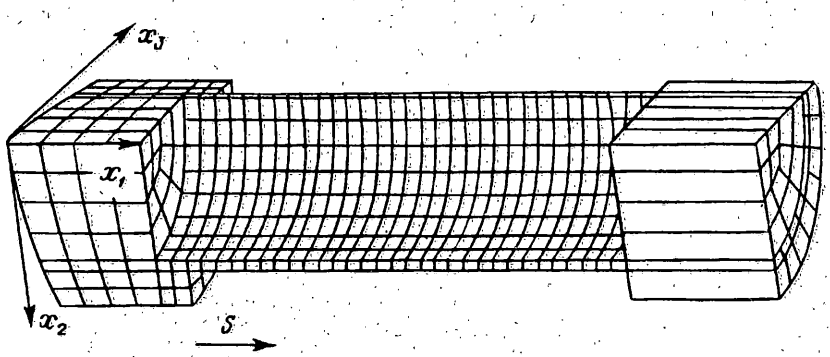
В уравнениях (1.1)—(1.3) используется матричная форма записи, буква (T) над символом означает операцию транспонирования, точка над символом — частную производную по времени; Ω — область, занятая конструкцией, Γ — граничная поверхность Ω с заданной нагрузкой $\mathbf{q} = [q_1 q_2 q_3]^T$, $\varepsilon =$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

$= [\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{31}]^T$, $\sigma = [\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31}]^T$ — матрицы-столбцы, составленные из компонент тензоров деформаций и напряжений, ρ — плотность материала, $\mathbf{u} = [u_1u_2u_3]^T$ — вектор перемещений в локальном прямоугольном базисе $\mathbf{x} = [x_1x_2x_3]^T$, отслеживающем с помощью компонент антисимметричного тензора $\omega = [000\omega_{12}\omega_{23}\omega_{31}]^T$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2}\mathbf{D}_\omega\dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{D}_\omega = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_2 & 0 & -\partial_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_1 & \partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_2 & \partial_1 \end{Vmatrix} \tag{1.4}$$

поворот элементарного объема dV как жесткого целого в неподвижном базисе $\mathbf{X} = [X_1X_2X_3]^T$; $\varepsilon^v = [eee000]^T$, $\sigma^v = [ppp000]^T$, $\varepsilon' = [\varepsilon_{11}'\varepsilon_{22}'\varepsilon_{33}'\varepsilon_{12}'\varepsilon_{23}'\varepsilon_{31}']^T$, $\sigma' = [\sigma_{11}'\sigma_{22}'\sigma_{33}'\sigma_{12}'\sigma_{23}'\sigma_{31}']^T$ — шаровые и девиаторные составляющие деформаций и напряжений; ε'^e, ε'^p — упругие и пластические компоненты девиатора деформаций, $\mathbf{S} = [S_{11}S_{22}S_{33}S_{12}S_{23}S_{31}]^T$, $\mathbf{r} = [\rho_{11}\rho_{22}\rho_{33}\rho_{12}\rho_{23}\rho_{31}]^T$ — матрицы-столбцы, составленные из компонент тензоров активных напряжений и остаточных микронапряжений; G, g, g_1 — модули сдвига, кинематического и изотропного упрочнения, σ_T — динамический предел текучести, $d\lambda$ — параметр, тождественно равный нулю при упругом деформировании, и определяемый при

упругопластическом деформировании из условия прохождения мгновенной поверхности текучести через конец вектора догрузки.

Для всех функций в (1.1)—(1.4) задаются начальные значения, граничные же условия для скоростей перемещений и поверхностных нагрузок учитываются в уравнении (1.1).

2. Определяющая система уравнений (1.1)—(1.4) решается методом конечных элементов [5]. Деформируемая конструкция заменяется лагранжевой сеткой из 8-узловых конечных элементов (фиг. 1). В узлах сетки определяются перемещения $\mathbf{U}$, скорости $\dot{\mathbf{U}}$ и ускорения $\ddot{\mathbf{U}}$ в общей системе координат $\mathbf{X} = [X_1 X_2 X_3]^T$, используемой для стыковки конечных элементов (КЭ). В каждом элементе вводится локальный прямоугольный базис $\mathbf{x} = [x_1 x_2 x_3]^T$. Координаты узлов противоположных граней усредняются и вычисляются площади полученных трех четырехугольников $n_i = [n_i^1 n_i^2 n_i^3]^T$ $(i = \overline{1, 3})$. Начало системы координат $\mathbf{x}$ помещается в центр элемента, ось x_3 совмещается с n_3, x_2 ортогональна $(n_3 n_1)$, x_1 ортогональна $(x_2 x_3)$. Дальнейшая ориентация $\mathbf{x}$ в пространстве корректируется с учетом вращения КЭ как жесткого целого пошаговым пересчетом направляющих косинусов ее осей. Углы поворота $\Delta\omega = \dot{\omega}\Delta t$ на текущем временном слое определяются из соотношения (1.4). Частные производные $\partial_i = \partial/\partial x_i$ $(i = \overline{1, 3})$ вычисляются в (1.4) с помощью формул дивергентного представления частных производных по пространственным переменным [1], или другим более простым способом в зависимости от требуемой точности.

Каждый конечный элемент отображается на куб

$$x_i = \sum_{j=1}^{s} X_i^j N_j(\xi_1 \xi_2 \xi_3) \qquad (-1 \le \xi_i \le 1) \tag{2.1}$$

$$N_j = (1 + \xi_1/\xi_1^j)(1 + \xi_2/\xi_2^j)(1 + \xi_3/\xi_3^j)/8$$

где x_i^j — координаты узлов в базисе $\mathbf{x}$. Компоненты скорости проецируются в систему координат $\mathbf{x}$ и аппроксимируются внутри элемента с помощью функций форм N_j из (2.1):

$$\dot{u}_i = \sum_{j=1}^{s} \dot{u}_i^j N_j(\xi_1 \xi_2 \xi_3) \tag{2.2}$$

Для аппроксимации скорости деформаций используются функции следующего вида:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + \alpha_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \xi_1 + \alpha_2 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \xi_2 + \alpha_3 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3 \xi_3 + \alpha_4 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_4 \tag{2.3}$$

где $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = [\dot{\varepsilon}_{11}^\circ \dot{\varepsilon}_{22}^\circ \dot{\varepsilon}_{33}^\circ \dot{\varepsilon}_{11}^\circ \dot{\varepsilon}_{23}^\circ \dot{\varepsilon}_{31}^\circ]^T$ — значения компонент скорости деформаций в центре КЭ $(\dot{\varepsilon}_{ij}^\circ = \mathrm{const})$; $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 = [0 \dot{\varepsilon}_{22,1} \dot{\varepsilon}_{33,1} 0 \dot{\varepsilon}_{23,1} 0]^T$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 = [\dot{\varepsilon}_{11,2} 0 \dot{\varepsilon}_{33,2} 0 0 \dot{\varepsilon}_{31,2}]^T$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3 = [\dot{\varepsilon}_{11,3} \dot{\varepsilon}_{22,3} 0 \dot{\varepsilon}_{12,3} 0 0]^T$ — градиент скорости деформаций в центре КЭ; $\dot{\varepsilon}_{ij,k} = \partial \dot{\varepsilon}_{ij}/\partial \xi_k = \mathrm{const}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_4 = [\dot{\varepsilon}_{11,22} \xi_2 \xi_3 \dot{\varepsilon}_{22,31} \xi_3 \xi_1 \dot{\varepsilon}_{33,12} \xi_1 \xi_2 0 0 0]^T$, $\dot{\varepsilon}_{ii,kl} = \partial^2 \varepsilon_{ii}/\partial \xi_k \partial \xi_l = \mathrm{const}$. Весовые коэффициенты α_i $(i = \overline{1, 4})$ вводятся для регулирования влияния моментных составляющих скорости деформаций $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_4$ на численное решение $(0 < \alpha_i \le 1)$.

Формулы для вычисления компонент $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ записываются в следующем виде:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \mathbf{B}_i \dot{\mathbf{v}}/|\mathbf{J}| \qquad (i = \overline{0, 4}) \tag{2.4}$$

$$\mathbf{v} = [u_1^1 \ldots u_1^s,\ u_2^1 \ldots u_2^s,\ u_3^1 \ldots u_3^s]^T$$

где матрицы $\mathbf{B}_i$ получаются с помощью соотношения (1.2) и обратной матрицы Якоби $\mathbf{J}^{-1}$ для преобразования (2.1) [6], $|\mathbf{J}|$ — якобиан преобразования (2.1).

Варьируя значениями весовых коэффициентов α_i в (2.3) и корректируя в

соответствии с ними аппроксимацию $\dot{\varepsilon}$, σ, можно получить широкий набор конечных элементов, учитывающих специфику напряженно-деформированного состояния, геометрии деформируемой конструкции, и повысить эффективность решения трехмерных задач динамики. Для рассматриваемого класса задач разработаны конечные элементы двух типов: КЭ для сплошной среды и КЭ оболочки.

Конечный элемент сплошной среды (тип А). В массивных телах моментные составляющие $\dot{\varepsilon}_1$, $\dot{\varepsilon}_2$, $\dot{\varepsilon}_3$, $\dot{\varepsilon}_4$ используются для подавления мод с нулевой энергией [4] и вводятся в схему с малыми коэффициентами: $\alpha_i \in [0,\ 1,\ 0,\ 1]$, $i = \overline{1, 4}$. Это позволяет аппроксимировать напряжения функциями вида

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1\xi_1 + \sigma_2\xi_2 + \sigma_3\xi_3 + \sigma_4$$

$$\sigma_0 = [\sigma_{11}{}^\circ\sigma_{22}{}^\circ\sigma_{33}{}^\circ\sigma_{12}{}^\circ\sigma_{23}{}^\circ\sigma_{31}{}^\circ]^T = \sigma|_{\xi_1=\xi_2=\xi_3=0} \tag{2.5}$$

$$\sigma_1 = [0\sigma_{22,1}\sigma_{33,1}0\sigma_{23,1}0]^T$$

$$\sigma_2 = [\sigma_{11,2}0\sigma_{33,2}00\sigma_{31,2}]^T$$

$$\sigma_3 = [\sigma_{11,3}\sigma_{22,3}0\sigma_{12,3}00]^T$$

$$\sigma_4 = [\sigma_{11,23}\xi_2\xi_3\sigma_{22,31}\xi_3\xi_1\sigma_{33,12}\xi_1\xi_2000]^T$$

$$\sigma_{ij}{}^\circ = \text{const}, \quad \sigma_{ij,k} = \partial\sigma_{ij}/\partial\xi_k = \text{const}, \quad \sigma_{ij,kl} = \partial^2\sigma_{ij}/\partial\xi_k\partial\xi_l = \text{const}$$

Компоненты σ_i определяются подстановкой ε_i в уравнения состояния (1.3). В силу малости коэффициентов α_i $(i = \overline{1, 4})$ связь $\sigma_i(\varepsilon_i)$ полагается линейно упругой, а пластические свойства материала учитываются в центре КЭ при вычислении компонент σ_0. Значения напряжений в центре элемента σ_0 можно определять в общей системе координат X, упростив при этом процедуры введения локального базиса x и вычисления моментных составляющих σ_1, σ_2, σ_3, σ_4.

Конечный элемент оболочки (тип В). В пластинах и оболочках важную роль играют изгибающие и крутящий моменты от напряжений, распределенных по толщине. Моментные же составляющие деформаций и напряжений в срединной поверхности вводятся как и в предыдущем элементе для обеспечения устойчивости счета.

При отсутствии локальных импульсных воздействий можно положить, что ось ξ_3 совпадает с x_3 и направлена по нормали к срединной поверхности. Тогда $\alpha_3 = 1$, α_1, α_2, $\alpha_4 \ll 1$, а напряжения σ аппроксимируются следующим образом:

$$\sigma = \sigma_1\xi_1 + \sigma_2\xi_2 + \sigma_3(\xi_3) + \sigma_4 \tag{2.6}$$

где $\sigma_3(\xi_3) = [\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31}]^T$ — распределение напряжений по толщине оболочки (вдоль оси ξ_3). Компоненты σ_1, σ_2, σ_4 определяются как в КЭ сплошной среды (тип *А*). Поскольку зависимость $\sigma_3(\xi_3)$ из-за пластических деформаций может быть нелинейной, каждый элемент вдоль ξ_3 разбивается на ряд подслоев. Изменение напряжений в этом направлении $\sigma_3(\xi_3)$ аппроксимируется кусочно постоянной функцией, определяемой из уравнений состояния, исходя из линейного распределения полных деформаций $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_3\xi_3$ и их скоростей $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0 + \dot{\varepsilon}_3\xi_3$ [7].

Аппроксимация скорости деформаций $\dot{\varepsilon}$ (2.3) и напряжений σ (2.6) в конечном элементе типа В является по существу численной реализацией шестимодального варианта теории оболочек типа Тимошенко [8] и позволяет решать задачу на сетке с одним слоем КЭ по толщине, что неприемлемо для схем [1—4].

В каждом конечном элементе мощность виртуальной работы в (1.1) выражается через матрицу масс m, узловые ускорения $\ddot{v}$, силы f и виртуальные скорости

перемещений $\delta\dot{v}$ [5, 6]. Матрица масс в конечном элементе для функций формы N_j из (2.1) имеет вид

$$\mathbf{m} = \rho V \begin{Vmatrix} \overline{\mathbf{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\mathbf{m}} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mathbf{m}} \end{Vmatrix}, \quad \overline{\mathbf{m}} = \mathbf{m}_1\mathbf{m}_2\mathbf{m}_3, \quad \mathbf{m}_i = \frac{1}{4}\mathbf{m}_i^{\circ} + \frac{1}{12}\mathbf{m}_i^{1} \tag{2.7}$$

где V — объем элемента; формулы для матриц $\mathbf{m}_i^{\circ}$, $\mathbf{m}_i^{1}$ $(i = \overline{1, 3})$ приведены в [9]. Вариации скоростей перемещений $\delta\dot{\mathbf{v}}$, ускорения $\ddot{\mathbf{v}}$, и узловые силы $\mathbf{f}$ перепроецируются в общую систему координат $\mathbf{X}$. Заменяя интегрирование по области Ω суммированием по элементам, получим дискретный аналог уравнения движения в виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{F} \tag{2.8}$$

где $\mathbf{M}$ — матрица масс, $\ddot{\mathbf{U}}$, $\mathbf{F}$ — матрицы-столбцы, составленные из ускорений узлов КЭ-сетки и результирующих узловых сил в общей системе координат $\mathbf{X}$.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.8) разрешается относительно узловых ускорений

$$\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{\Phi} \tag{2.9}$$

и интегрируется по конечно-разностной схеме типа «крест». Аналитическая оценка устойчивости схемы крест для уравнений динамики сплошных сред и оболочек получена в [10]. В этой работе теоретически обосновывается регуляризация матрицы масс $\mathbf{M}$, позволяющая путем корректировки высокочастотных колебаний существенно увеличить шаг интегрирования по времени Δt. Регуляризация матрицы масс заключается во введении фиктивных моментов инерции умножением матриц $\mathbf{m}_i^{1}$ на весовые коэффициенты J_i $(i = \overline{1, 3})$ [9]. В зависимости от величины J_i схема интегрирования вдоль ξ_i будет явной $(J_i = 3)$ или неявной $(J_i > 3)$, что позволяет оптимизировать вычислительный процесс.

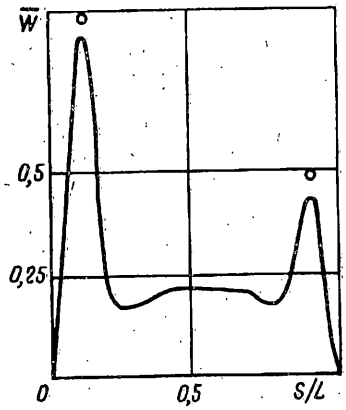
В частности, при $J_1 = J_2 = J_3 = 3$ матрица масс $\mathbf{M}$ становится диагональной, если мощность виртуальной работы сил инерции в (1.1) выражать через компоненты ускорений и виртуальных скоростей перемещений в общей системе координат $\mathbf{X}$. В этом случае отпадает необходимость в обращении матрицы масс, а шаг интегрирования по времени определяется из условия устойчивости Куранта с коэффициентом запаса близким к=1 [10]. При анализе динамики тонких оболочек, когда характерные КЭ в срединной поверхности значительно превосходят толщину, целесообразно для интегрирования (2.8) в срединной поверхности использовать яьную схему, а по толщине неявную [9, 10].

Как известно схема интегрирования по времени типа крест не является монотонной, и на сильных разрывах допускает значительные осцилляции, искажающие численное решение. Для подавления этих осцилляций используется консервативное сглаживание поля скоростей введением в уравнения движения корректирующих потоков импульса [11].

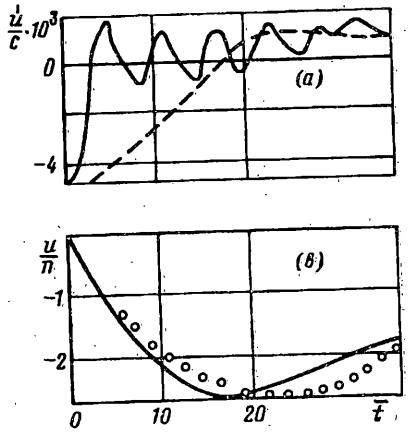
3. Разработанная методика реализована в виде библиотеки конечных элементов для программного комплекса «Динамика-3», предназначенного для решения трехмерных нестационарных задач упругопластического деформирования на ПЭВМ типа IBM PC. Решен широкий круг модельных и прикладных задач. Результаты некоторых из них приводятся ниже.

Рассмотрим упругопластический изгиб жестко защемленной по контуру цилиндрической панели (фиг. 1, где $L = 0{,}3184$ м, $l = 0{,}2587$ м, $R = 0{,}0746$ м, $R/h = 23{,}3$). Материал оболочки имеет следующие характеристики [7]: модуль упругости $E = 72{,}45$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}32$, $g = g_1 = 0$, $\sigma_T = 0{,}304$ ГПа, $\rho = 2{,}85$ г/см^3. На заштрихованной части области задавалась начальная скорость $\dot{u} = 143{,}51$ м/с, направленная по нормали к поверхности.

В силу того, что панель деформируется симметрично относительно плоскости $X_1 = 0$, в качестве расчетной области использовалась половина оболочки



Фиг. 4



Фиг. 5

($X_1 \geq 0$). Конечно-элементная сетка расчетной области имеет следующие параметры: $N_1 = 24$, $N_2 = 12$, $N_3 = 1$, где N_1, N_2, N_3 — количество КЭ вдоль образующей, по повороту и толщине.

Результаты решения задачи представлены на фиг. 2 в виде зависимости от времени $\overline{t} = tc/L$ (c — скорость продольных волн в материале) прогиба $\overline{w} = w/h$ в центре панели (1) и в точке (2), смещенной относительно центра вдоль образующей на $L/4$ (фиг. 1). Сплошная линия соответствует расчету по предлагаемой схеме с использованием оболсчечного элемента (тип B, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0{,}05$, $\alpha_3 = 1$, по толщине оболочки КЭ разбивался на 5 подслоев), штриховая линия — экспериментальные данные [7]. Как видно из графиков на фиг. 2 в центре оболочки, где достигается максимальный прогиб, расхождение расчетных и экспериментальных данных не превышает 15%. Время решения задачи на PC AT/386 — 2 часа 30 минут.

В трехмерной постановке рассмотрена задача о продольном соударении с жесткой преградой тела вращения (фиг. 3), включающего массивный оголовок, цилиндрическую оболочку ($R = 0{,}0428$ м, $L = 0{,}155$ м, $R/h = 15{,}3$) и присоединенную массу на неударяемом торце. Образец выполнен из алюминиевого сплава АМг6 с характеристиками: $E = 71{,}5$ ГПа, $\mu = 0{,}3$, $\rho = 2{,}7$ г/см^3. Характерные размеры оголовка и присоединенной массы, а также параметры, определяющие пластические свойства материала приведены в [12]. Отношение присоединенной массы к массе оболочки равно 9, отношение массы оголовка к массе оболочки — 4. Начальная скорость ударника направлена вдоль оси симметрии X_1 и равна −29,2 м/с.

В качестве расчетной области рассматривалась 1/4 часть конструкции ($X_2 \geq 0$, $X_3 \geq 0$). Для решения задачи оболочка покрывалась одним слоем из 240 КЭ типа B ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0{,}05$), а оголовок и присоединенная масса покрывались сетками из 168 и 20 конечных элементов типа А соответственно. Для учета пластических деформаций КЭ оболочки разбивались из 5 подслоев по толщине.

Результаты решения задачи представлены на фиг. 4, 5. На фиг. 4 приведено распределение остаточного прогиба $\overline{w} = w/h$ оболочки вдоль образующей (сплошная линия — расчет, точки — данные эксперимента [12]). На фиг. 5, *а* сплошной и штриховой линиями изображено изменение во времени $\overline{t} = tc/L$ скорости продольного перемещения $\dot{\overline{u}} = \dot{u}_1/c$ оболочки на ударяемом и тыльном торцах

(значение скорости отскока образца, полученное в эксперименте, равняется $0{,}92 \times 10^{-3}$). На фиг. 5, *в* представлена зависимость от времени продольного перемещения тыльного торца оболочки (сплошной и пунктирной линиями помечены расчетные и экспериментальные данные).

Анализ результатов расчетов выявил основные закономерности продольного соударения с жесткой преградой цилиндрической оболочки с присоединенными массами, превышающими массу оболочки.

Гашение скорости массы, прикрепленной к задней части оболочки, происходит монотонно (фиг. 5, *а*), а скорость ударяемого торца оболочки в процессе контактного взаимодействия с преградой несколько раз меняет знак с периодом равным примерно двойному пробегу волны сжатия по оболочке. В соответствии с этим происходит многократное соударение оголовка с преградой. При достижении в оболочке напряжений выше предела текучести ($\bar{t} = 2$) вблизи краев образуются две осесимметричные складки. В дальнейшем наблюдается преобладающее развитие складки, расположенной в зоне крепления оболочки к оголовку. Продольные сжимающие усилия на стадии выпучивания распределяются вдоль оболочки почти равномерно, причем процесс сжатия не носит волнового характера, так как амплитуда продольных волн ограничена пределом текучести, а упрочнение материала невелико. Процесс соударения заканчивается при $\bar{t} = 20$. Сопоставление с расчетом без учета присоединенной массы на ударяемом торце [12] показывает, что наличие затупленного оголовка влияет только на начальную стадию процесса деформирования и мало влияет на форму выпучивания и остаточные прогибы оболочки.

Как видно из графиков на фиг. 4, 5 по всем сопоставляемым параметрам (перемещение тыльной части оболочки, расположение и форма гофров, скорость отскока) наблюдается хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных: их расхождение не превышает 10%. Время решения задачи на ПЭВМ PC AT/386 составило порядка 4 часов.

Приведенные здесь результаты, а также расчеты, представленные в [6, 9], свидетельствуют о том, что данная методика позволяет достаточно эффективно решать нелинейные задачи динамики при немалых формоизменениях и смещениях упругопластических составных конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уилкинс М., Френч С., Сорем М.* Конечно-разностная схема для решения задач, зависящих от трех пространственных координат и времени//Численные методы в механике жидкостей. М.: Мир, 1973. С. 115—119.
2. *Johnson G. R. Colby D. D., Vavrick D. J.* Three-dimensional computer code for dynamic response of solids to intense impulsive loads//Int. J. Num. Meth. Eng. 1979. V. 14. No. 12. P. 1865—1871.
3. *Flanagan D. P., Belytschko T.* An uniform strain hexahedron and quadrilateral with ortogonal hourglass control//Int. J. Num. Meth. Eng. 1981. V. 17. No. 5. P. 679—706.
4. *Баженов В. Г., Зефиров С. В., Кибец А. И.* О численной реализации вариационно-разностной моментной схемы решения нелинейных задач динамики нетонких оболочек при импульсных воздействиях//Прикл. пробл. прочности и пластичности. 1988. Вып. 41. С. 66—73.
5. *Зенкевич О. К.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
6. *Баженов В. Г., Кибец А. И., Тулинцев О. В.* Применение моментной схемы МКЭ для анализа нелинейных трехмерных задач динамики массивных и оболочечных элементов конструкций//Прикл. пробл. прочности и пластичности. 1991. Вып. 47. С. 46—53.
7. *Баженов В. Г., Шинкаренко А. П.* Вариационно-разностный метод решения трехмерных задач динамики упругопластических оболочек//Прикл. пробл. прочности и пластичности. 1976. Вып. 3. С. 61—69.
8. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
9. Применение моментной схемы МКЭ для решения нестационарных задач упругопластического деформирования составных конструкций/В. Г. Баженов и др.//В сб. Численные методы решения

задач теории упругости и пластичности. Материалы XII Всесоюз. конф. Новосибирск: 1992. С. 25—31.

10. *Баженов В. Г., Чекмарев Д. Т.* Вариационно-разностные схемы в нестационарных волновых задачах динамики пластин и оболочек.— Н. Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 1992. 159 с.
11. *Баженов В. Г., Зефиров С. В., Кочетков А. В.* Численное исследование нестационарной дифракции упругой волны на цилиндрической оболочке//Прикл. пробл. прочности и пластичности. 1991. Вып. 48. С. 71—78.
12. Численный анализ осесимметричного упругопластического выпучивания оболочек вращения с присоединенными жесткими и деформируемыми массами при ударе о жесткую преграду/В. Г. Баженов, Г. В. Бригадиров и др.//Прикл. пробл. прочности и пластичности. 1990. Вып. 46. С. 41—47.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
12.X.1993