

УДК 539.3

© 1994 г. Г. Г. ДЕНИСОВ

## О ВОЛНОВОМ ИМПУЛЬСЕ И УСИЛИЯХ, ВОЗНИКАЮЩИХ НА ГРАНИЦЕ ОДНОМЕРНОЙ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ

Вопрос о воздействии волн на преграду возник в начале века в связи с открытием Максвеллом давления света и электромагнитных волн на отражающую их поверхность. По-видимому, Рэлеем впервые был поставлен вопрос о механическом воздействии на преграду или границу волн, распространяющихся в различных средах, и, в частности, в упругой среде [1]. Им было высказано утверждение о наличии импульса (количества движения) у пакета волн, который создает давление на отражающую его поверхность. С этого времени и до сих пор не прекращаются споры о наличии импульса у волн и механизме воздействия их на препятствие или границу среды. Приведем в подтверждение этого некоторые выдержки.

«Вывод о том, что волны наделены импульсом совершенно ошибочен». Л. Бриллюэн, 1925 г. [2].

«Кроме энергии, бегущая волна переносит с собой импульс. Именно наличие импульса у волн позволяет водомерке бежать по воде и оставлять за собой капиллярные волны». Б. Б. Кадомцев. 1981 г. [3].

«Продольные упругие волны в газах, жидкостях, твердых телах способны перемещаться в пространстве и, тем самым, переносить энергию, количество движения (импульс) и другие величины за счет последовательной передачи их от одних частиц к другим без обязательного переноса самих частиц вместе с волной». Физическая энциклопедия. 1988. [4].

Можно привести подобные заключения из других серьезных монографий, статей и учебных пособий, но и из этого видно, что мнения разноречивы, различны и утверждения о механизме воздействия волн на преграду или границу среды, в которой они распространяются.

Вопрос чрезвычайно запутан до сих пор [5], и в последнее время разрешение его связывают с введением новых характеристик, якобы присущих только распределенным системам, волнового импульса и волнового давления [6—9].

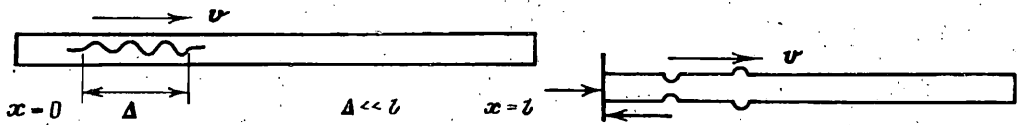
Целью публикуемой работы является показать, что использование этих понятий приводит к неверным результатам при подсчете усилий на границе среды, и выяснить условия возникновения этих усилий.

1. Для большей убедительности в этом затянувшемся споре, ниже намеренно взята одномерная среда (упругий стержень) и рассматриваются только его продольные колебания. В качестве препятствия, испытывающего влияние волн, взята граница среды — конец стержня с условиями его закрепления. Представление об упомянутых волновых характеристиках можно получить в рамках этой простейшей системы в линейной постановке, описываемой уравнением

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0, \quad v^2 = EA\rho_0^{-1}$$

с решением в виде произвольной функции  $u = u(x \pm vt)$ , где  $E$ ,  $A$ ,  $\rho_0$  — модуль Юнга, площадь поперечного сечения и погонная плотность стержня.

После умножения на  $\rho_0 u_x$  уравнение легко преобразуется к виду, называемому уравнением переноса волнового импульса



Фиг. 1

Фиг. 2

$$g_t^v + T_x^v = 0, \quad g^v = -\rho_0 u u_x, \quad T^v = 1/2 (\rho_0 u_t^2 + EA u_x^2)$$

где  $g^v$  — плотность волнового импульса,  $T^v$  — волновое давление.

Отметим основные свойства введенных характеристик: в бегущей волне произвольного вида  $u = u(x - vt) = u(\xi)$  волновой импульс отличен от нуля, так как  $g^v = \rho_0 u u_x^2$  и всегда направлен в сторону движения волны;  $T^v$  и  $g^v$  квадратичны по амплитуде деформаций и волновое давление всегда положительно.

Характеристики  $T^v$ ,  $g^v$ , призванные объяснить воздействие волнового процесса на преграду, сами приводят к противоречиям с законами классической механики. Зафиксируем эти противоречия на простых примерах.

При продольных колебаниях стержня, закрепленного с одной стороны  $u(0, t) = 0$  и свободного с другой  $u_x(l, t) = 0$  среднее значение волнового давления в месте закрепления  $\langle T^v(0, t) \rangle = 1/2 EA \langle u_x^2 \rangle \neq 0$ . В то время, как никакого среднего усилия со стороны свободного на одном конце стержня не может быть.

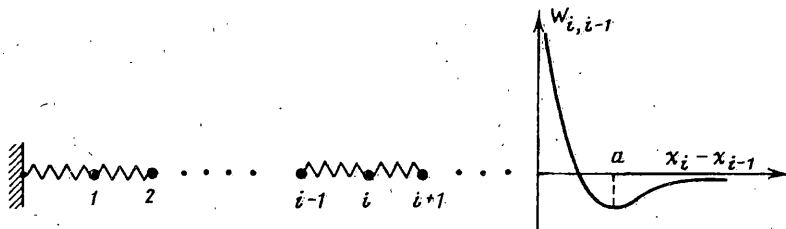
По неподвижному в некоторой системе координат упругому длинному стержню со свободными концами (фиг. 1) бежит пучок продольных волн в виде отрезка синусоиды  $u = u_0 \sin k(x - vt)$  ( $0 \leq x - vt \leq \Delta \ll l$ ) с волновым импульсом, не равным нулю, так как  $g^v = \rho_0 u_0^2 k^2 v \cos^2 k(x - vt)$ . Общий импульс системы равен  $G_0 + \int_0^l g^v dx = G^v = \text{const}$ , так как в выбранной системе координат обычный ньютоновский импульс  $G_0 = 0$ .

При затухании волны за счет внутренних сил трения, не изменяющих общего импульса,  $G^v \rightarrow 0$  в силу чего стержень должен придти в движение. Однако, каждая частица стержня при распространении по нему синусоидального возмущения колеблется возле своего равновесного положения, значит переноса массы нет и нет обычного импульса ни при наличии упругой волны, ни без нее, т. е. стержень останется, как и вначале, неподвижным.

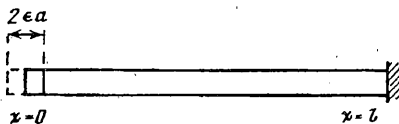
По левому концу свободного стержня  $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$  (фиг. 2) наносится резкий удар вправо, создающий волну уплотнений, затем по фланцу этого же конца — удар влево той же интенсивности и длительности, создающий волну разрежения. Образовавшаяся группа волн  $u = u(x - vt)$  имеет вначале  $G^v \neq 0$ , затем из-за внутреннего трения в стержне  $G^v \rightarrow 0$ , рассуждения второго примера остаются в силе, но стержень не может придти в движение в силу симметрии начального силового воздействия, создавшего упругую бегущую волну.

2. Для разрешения отмеченных противоречий рассмотрим продольные колебания простейшей одномерной упругой системы, состоящей из большого числа частиц массы  $m$ , соединенных между собой упругими пружинами. В такой системе нет понятий волнового импульса и волнового давления, обычный импульс подсчитывается, как сумма импульсов отдельных частиц, а давление на границу при колебаниях системы определяется деформацией крайней пружины. Вместе с тем, при волновых процессах, длина волны которых много больше расстояния между частицами, формулы для волнового давления и импульса записываются также, как и в распределенной системе.

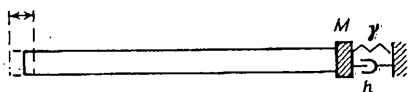
Имея в виду, что  $g^v$  и  $T^v$  квадратичны по деформациям, а получены из линейных уравнений, здесь для подсчета волновых эффектов сразу запишем нелинейные уравнения.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Движение  $i$ -й частицы системы (фиг. 3) под действием упругих сил со стороны соседних частиц описывается уравнением

$$m\ddot{x}_i + \partial W_{i,i-1}/\partial x_i + \partial W_{i,i+1}/\partial x_i = 0.$$

где  $W_{i,i-1} = W(|x_i - x_{i-1}|)$  — потенциальная энергия взаимодействия двух соседних частиц, зависящая только от расстояния между ними и имеющая минимум, когда это расстояние равно  $a$ .

При колебаниях  $x_i - x_{i-1} = a + u_i - u_{i-1}$ , где  $u_i$  — отклонение от состояния равновесия  $i$ -й частицы. Считая отклонения малыми, запишем уравнения движения системы с точностью до членов второго порядка малости

$$\ddot{u}_i + W''(a)(2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}) + 1/2 W'''(a)[(u_i - u_{i-1})^2 - (u_i - u_{i+1})^2] \quad (1)$$

В дальнейшем будем рассматривать волновые процессы с длиной волны много большей, чем расстояние между частицами  $a \ll \lambda$ . Это позволяет ввести приближения

$$u_i = u(x), \quad u_{i\pm 1} = u(x \pm a) \approx u(x) \pm au_x(x) + 1/2 a^2 u_{xx}(x)$$

и снова перейти к уравнению в частных производных

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} + \beta u_x u_{xx} = 0, \quad (2)$$

$$v^2 = (a^2/m) W''(a), \quad \beta = -(a^3/m) W'''(a)$$

Это уравнение эквивалентно следующему уравнению продольных колебаний стержня с учетом его нелинейности (коэффициент  $\beta$ ):

$$(\rho_0 u_t)_t + (-EAu_x + 1/2 \beta \rho_0 u_x^2)_x = 0 \quad (3)$$

$$\rho_0 = m/a, \quad EA = \rho_0 v^2$$

Здесь  $\rho_0 u_t = g$  — плотность обычного импульса,  $-EAu_x + 1/2 \beta \rho_0 u_x^2 = T$  — напряжение (давление). Еще раз подчеркнем, что уравнение в частных

производных (2) описывает лишь длинноволновые процессы дискретной системы (1).

Перейдем теперь к определению усилий, возникающих на границе упругой системы при различных краевых условиях для стоячих и бегущих волн и найдем импульс этой системы при волновом процессе.

1. Рассмотрим стержень с закрепленными концами (фиг. 4). Колебания возбуждаются периодическим смещением левого конца с частотой  $\omega$  и малой амплитудой  $\varepsilon a$  относительно фиксированного среднего положения. Решение с точностью до  $\varepsilon^2$  будет следующим:

$$u \approx \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1$$

$$u_0(0, t) = a \sin \omega t, \quad u(l, t) = 0$$

$$u_0(x, t) = \frac{a}{\sin kl} \sin k(l-x) \sin \omega t, \quad k = \omega/v, \quad kl \neq \pi n$$

$$u_1(x, t) = \frac{\beta k^3 a^2}{16 \omega^2 \sin^2 kl} \{ \sin 2k(x-l) + (1-x/l) \sin 2kl + \\ + k(l-x) \cos 2k(x-l) \cos 2\omega t \}$$

$$\langle T \rangle = \rho_0 \varepsilon^2 \langle -v^2 u_{1x} + 1/2 \beta u_{0x}^2 \rangle = (\varepsilon^2 \rho_0 \beta k^2 a^2) / (8 \sin^2 kl)$$

Таким образом, возникающее при колебаниях среднее давление одинаково во всех сечениях стержня, в том числе и на границе и имеет вид

$$\langle T \rangle = 1/2 \beta \langle w \rangle / v^2, \quad w = 1/2 (\rho_0 u_t^2 + EA u_x^2)$$

где  $w$  — плотность энергии. Давление возникает лишь при наличии нелинейности и может быть как больше, так и меньше ( $\beta < 0$ ) нуля. Это в корне противоречит выводу, следующему из выражения для волнового давления.

2. Стержень, возбуждаемый на левом конце, также, как и в первом случае и свободный на правом

$$u_0(0, t) = a \sin \omega t, \quad u_x(l, t) = 0, \quad kl \neq (n + 1/2) \pi$$

$$u_0(x, t) = \frac{a}{\cos kl} \cos k(l-x) \sin \omega t$$

$$u_1(x, t) = \frac{\beta k^3 a^2}{16 \omega^2 \cos^2 kl} \{ \sin 2k(l-x) - \sin 2kl + 2kx + \\ + [kx \cos 2k(x-l) - 1/2 \sin 2k(x-l)] \cos 2\omega t \}$$

$$\langle T \rangle = 0, \quad \langle u(l, t) \rangle = \frac{\varepsilon^2 \beta k^4 a^2}{8 \omega^2 \cos^2 kl} l$$

В данном случае, среднее давление в любом сечении равно нулю, однако, происходит удлинение стержня, которое можно выразить так

$$u(l, t) = 1/2 \beta \langle w \rangle l / (\rho_0 v^2)$$

Этот эффект сходен тепловому расширению тел, причем плотность энергии является аналогом температуры, а коэффициенту теплового расширения соответствует величина  $1/2 \beta / (\rho_0 v^2)$ . Отметим особо, что при  $\beta < 0$  колебания тела или его разогрев сопровождаются уменьшением его размеров.

Наглядно этот эффект можно понять по виду потенциальной энергии взаимодействующей пары масс (фиг. 3). В отсутствие колебаний энергия минимальна, расстояние между массами равно  $a$ . При колебаниях среднее расстояние изменяется из-за несимметричности потенциальной ямы ( $\beta \neq 0$ ), что и приводит к изменению длины стержня.

Теперь очевидны выводы предыдущей задачи: колеблющийся стержень стремится расширяться (при  $\beta > 0$ ), чему препятствуют закрепленные концы, и возникает давление.

3. Рассмотрим периодически возбуждаемый на одном конце с фиксированным средним положением и упругодемпфированным закреплением при наличии массы на другом (фиг. 5). Краевые условия

$$u_0(0, t) = a \sin \omega t$$

$$-\rho_0 v^2 u_{0x} = M u_{0tt} + h u_{0t} + \gamma u_0 \quad (x = l)$$

В физических задачах часто с бегущей волной связывают наличие импульса и передачу давления от источника колебаний к противоположному концу. В данном случае при соотношениях между параметрами  $h = \rho_0 v$ ,  $\gamma = M \omega^2$  возникает бегущая волна

$$u_0(x, t) = a \sin(\omega t - kx)$$

$$u_1(x, t) = \frac{\beta a^2 k^4}{8 \omega^2} \left\{ \left( x - l - \frac{\rho_0 \omega^2}{3 \gamma k^2} \right) \cos 2(kx - \omega t) + \frac{2 \rho_0 \omega^2 x}{\gamma k^2 + \rho_0 \omega^2} \right\}$$

$$\langle T \rangle = \frac{\varepsilon^2 a^2 \rho_0 \beta k^4 \gamma}{4(\gamma k^2 + \rho_0 \omega^2)} l = \gamma \langle u(l, t) \rangle$$

$$\gamma \rightarrow 0, \langle T \rangle \rightarrow 0, \langle u(l, t) \rangle \rightarrow \beta \frac{\varepsilon^2 a^2 k^4}{4 \omega^2}$$

Таким образом, удлинение стержня и напряжение в нем при прочих равных условиях для бегущих волн вдвое больше, чем для стоячих. Все эти эффекты, как и в случае стоячих волн, исчезают в линейной системе ( $\beta = 0$ ).

4. Подсчитаем теперь импульс упругой системы в интервале  $\Delta x$  лабораторной системы координат с точностью до величин второго порядка малости. Обычно под этим понимают величину  $\rho u_i \Delta x \approx \rho_0 (1 - u_x) u_i \Delta x$ , где возмущенное значение плотности  $\rho$  получено из равенства массы элементарного участка стержня до и после деформирования  $\rho_0 dx = \rho (dx + du)$ .

Квадратичный член  $\rho_0 u_i u_x$  в точности совпадает с плотностью волнового импульса  $g^v$ , имеет постоянную составляющую при бегущей волне со всеми противоречиями, отмеченными вначале.

Уточним выражение для плотности импульса, рассматривая дискретную цепочку. Ее импульс в интервале  $\Delta x$  равен

$$\Delta G = g \Delta x = m \sum_{k=-k_-}^{k=k_+} \dot{u}_{n+k}$$

где  $n$  — номер частицы недеформированной системы, занимающей среднее положение относительно  $\Delta x$ ,  $k_+$  и  $k_-$  определяют номера частиц, находящихся в данный момент времени на концах интервала  $\Delta x$ . При колебаниях кроме скоростей меняются и пределы суммирования, так как в интервал  $\Delta x$  в разное время попадает разное число частиц.

Воспользуемся, как и выше, длинноволновым приближением

$$\dot{u}_{n+k} \approx u_t(x) + k a u_{xt}(x).$$

Выражение для  $\Delta G$  распадается на две части:

$$\Delta G = m (k_+ + k_-) u_t + 1/2 m a (k_+ + k_-) (k_+ - k_-) u_{tx}$$

причем, кроме скоростей  $u_t$  частиц вклад в импульс даёт и член  $u_{tx}$ , коэффициент перед которым равен сумме чисел от  $-k_-$  до  $k_+$ .

Так как  $u_{n+k_+}$  соответствует правому краю интервала, а  $u_{n-k_-}$  — левому краю, то можно записать

$$k_+ a + u_{n+k_+} = 1/2 \Delta x \approx k_+ a (1 + u_x) + u$$

$$-k_- a + u_{n-k_-} = -1/2 \Delta x \approx -k_- a (1 + u_x) + u$$

Выразив из полученной системы  $k_+$ ,  $k_-$ , ограничиваясь членами второго порядка малости, получим

$$g = \Delta G / \Delta x \approx \rho_0 (u_t - u_x u_x - u u_{xx}) = \rho_0 (u - u u_x)_t$$

Это и есть плотность импульса в лабораторной системе координат, записанная с точностью до членов второго порядка малости. Этот же результат другим способом получен в [2]. Плотность волнового импульса  $\rho_0 u_x u_x$  является лишь частью квадратичной поправки, обусловленной деформированием стержня при колебаниях. При подстановке  $u(x, t)$  в виде синусоидальной бегущей волны в полученное выражение, будем иметь  $\langle g \rangle = 0$ , что разрешает противоречие, указанное выше.

Выясним теперь, вид группы волн, обладающей ньютоновским импульсом. Пусть профиль бегущей вправо волны имеет общий вид  $u = u(x - vt)$ . Учитывая, что  $\partial/\partial t = -v\partial/\partial x$ , запишем

$$G = -\rho_0 v \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (u - u u_x) dx = \rho_0 v [u(x_1) - u(x_2)]$$

Интегрирование произведено в то время, когда группа волн занимала интервал  $[x_1, x_2]$ . Здесь использовано, что вне этого интервала  $u_x = 0$ . Отсюда следует, что импульс группы волн не зависит от ее вида, а определяется лишь разницей уровней до и после нее и может быть направлен как по движению волны, так и в противоположную сторону.

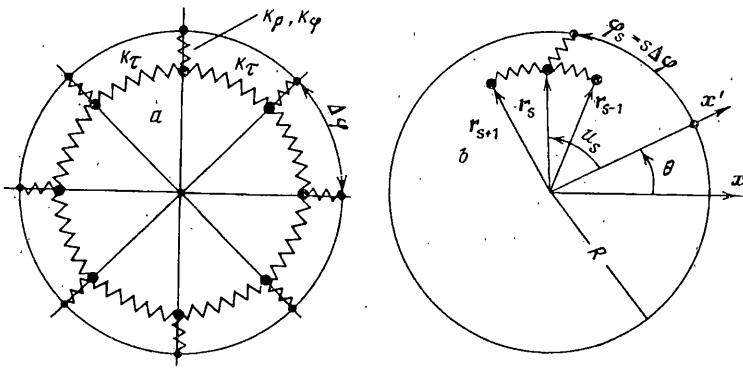
Рассмотрим теперь действие группы волн на границу. Пусть эта группа при  $t = t_1$  расположена целиком между  $x = 0$  и границей среды  $x = l$  и движется в сторону границы, а при  $t = t_2$  (после отражения) она занимает то же место, но движется в другую сторону. Воспользуемся уравнением (3), проинтегрировав его сначала по времени, а затем по координате

$$\int_{t_1}^{t_2} T(l, t) dt = \int_0^l [g(t_1) - g(t_2)] dx = G(t_1) - G(t_2)$$

Здесь учтено, что при  $t_1 \leq t \leq t_2$ ,  $T(0, t) = 0$ .

Таким образом, суммарное воздействие на границу определяется начальным импульсом  $G(t_1)$  группы волн и условиями закрепления на конце стержня, от которых зависит  $G(t_2)$ . Так, при закрепленном конце  $u(l, t) = 0$ ,  $G(t_2) = -G(t_1)$  и суммарное усилие, возникающее на конце максимально, при полностью поглощающих падающую волну условиях закрепления, когда  $G(t_2) = 0$ , это усилие вдвое меньше, а при свободном конце  $u_x(l, t) = 0$ ,  $G(t_2) = G(t_1)$  и суммарное усилие равно нулю.

Итак, стационарные колебательные и волновые движения в линейном случае ( $\beta = 0$ ) (стоячие или бегущие волны) не оказывают давления на границу вне зависимости от краевых условий. Следовательно, понятия волнового давления и волнового импульса в данной системе является математической фикцией. Давление на границу упругой системы возникает только при наличии нелинейности ( $\beta \neq 0$ ) и при сдерживающих краевых условиях на границах системы. В основе этого эффекта лежит стремление к изменению длины упругой нелинейной системы



Фиг. 6

при наличии колебаний, подобное тепловому расширению. Давление может быть как положительным, так и отрицательным.

Плотность ньютоновского импульса бегущей синусоидальной волны равна нулю, равно как и импульс цуга, состоящего из целого числа волн, поэтому, отражаясь от границы, они не производят среднего усилия. Давление возникает при перепаде деформации между началом и концом волнового процесса, пропорционально этому перепаду и поэтому легко может быть подсчитано для произвольной группы волн. Перепад деформации определяет импульс группы волн.

3. Рассмотрим теперь кольцевую упругую систему (фиг. 6). К диску, имеющему возможность свободно вращаться вокруг своей оси, с помощью разножестких  $k_p, k_\varphi$  пружин прикреплены грузики массы  $m$ , соединенные между собой упруго ( $k_\tau$ ). Идея перехода к кольцевой системе проста: здесь нет трудностей, связанных с краевыми условиями, поскольку система изолирована, в ней выполняется закон постоянства момента количества движения. В силу этого и с учетом выше изложенного, возбужденная бегущая волна не должна вызвать вращения системы после затухания из-за внутренней диссипации, так как каждая частица при этом колеблется относительно своего состояния равновесия и плотность импульса равна нулю. Однако, это не так.

Введем инерциальную ( $x$ ) и связанную с диском ( $x'$ ) системы координат. Обозначим через  $J$  момент инерции диска,  $\theta$  его угол поворота и через  $r_s = \rho_s \cos(u_s + \theta) \mathbf{i} + \rho_s \sin(u_s + \theta) \mathbf{j}$  радиус-вектор  $s$ -й частицы. Взяв за обобщенные координаты системы  $\theta, \rho_s, u_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) запишем функцию Лагранжа

$$L = \frac{m}{2} \sum_s [\dot{\rho}_s^2 + (\dot{u}_s + \dot{\theta})^2 \rho_s^2] + \frac{J}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{k_p}{2} \sum_s [R - \rho_s \cos(u_s - \varphi_s)]^2 - \\ - \frac{k_\tau}{2} \sum_s [\rho_s^2 + \rho_{s-1}^2 + 2\rho_s \rho_{s-1} \cos(u_s - u_{s-1})] - \frac{k_\varphi}{2} \sum_s \rho_s^2 \sin^2(u_s - \varphi_s)$$

функцию диссипации

$$\Phi = \frac{h}{2} \sum_s (\dot{\rho}_s^2 + \rho_s^2 \dot{u}_s^2)$$

и уравнения движения

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m \sum_s \rho_s^2 (\dot{u}_s + \dot{\theta}) + J \dot{\theta} = H = \text{const}$$

$$m \ddot{\rho}_s - m \rho_s (\dot{u}_s + \dot{\theta})^2 - k_p [R - \rho_s \cos(u_s - \varphi_s)] \cos(u_s - \varphi_s) +$$

$$+ k_\tau [\rho_s - \rho_{s-1} \cos(u_s - u_{s-1})] + k_\varphi \rho_s \sin^2(u_s - \varphi_s) + h \dot{\rho}_s = 0$$

$$m \frac{d}{dt} [\rho_s^2 (\dot{u}_s + \dot{\theta})] + k_\rho [R - \rho_s \cos(u_s - \varphi_s)] \rho_s \sin(u_s - \varphi_s) +$$

$$+ k_\tau \rho_s \rho_{s-1} \sin(u_s - \varphi_s) + k_\varphi \rho_s^2 \sin(u_s - \varphi_s) \cos(u_s - \varphi_s) + h \rho_s^2 \dot{u}_s = 0$$

где  $H$  — кинетический момент,  $h$  — коэффициент трения, возникающего при движении грузовиков относительно диска.

Используя первое уравнение, выражающее закон сохранения момента количества системы, рассмотрим ситуацию, при которой вначале имелась бегущая волна относительно неподвижного диска, а затем эта волна с течением времени затухает. Следовательно, можно записать

$$t = 0: \dot{\theta}_0 = 0, \quad m \sum_s (\rho_s^2 \dot{u}_s)_0 = H$$

$$t \rightarrow \infty: (mN\rho_0^2 + J) \dot{\theta}_\infty = H$$

Отсюда следует

$$\dot{\theta}_\infty = m \sum_s (\rho_s^2 \dot{u}_s)_0 (M\rho_0^2 + J)^{-1}, \quad M = mN$$

Это означает, что диск придет в движение, если числитель полученного выражения не равен нулю для волнового движения упругой системы. Рассмотрим с этой целью последние два уравнения для  $\rho_s$  и  $u_s$ , предварительно сделав переход к более простой распределенной системе по формулам

$$\rho_s = \rho_0 + w(\varphi_s), \quad \rho_0 u_s = \rho_0 \Delta \varphi_s + v(\varphi_s)$$

$$\Delta \varphi = 2\pi/N \ll 1$$

где  $w$ ,  $v$  означают смещения элементов упругой системы вдоль и поперек радиуса диска. В результате будем иметь

$$\ddot{w} + (\kappa_c + \kappa_\rho) w - \kappa_c w'' + h \dot{w} - 2\dot{\theta} \dot{v} + 2\kappa_c v' = 0$$

$$2\dot{\theta} \dot{w} - 2\kappa_c w' + \ddot{v} + (\kappa_c + \kappa_\varphi) v - \kappa_c v' + h \dot{v} = 0$$

Здесь точкой обозначены производные по времени, а штрихом по углу  $\varphi$ . Отметим, что структура этих уравнений во многом сходна со структурой уравнений вращающегося упругого растяжимого кольца [9] и данная система частиц, замкнутых упругими элементами в кольцо, может рассматриваться как модель волнового твердотельного гироскопа. Выражение для угловой скорости диска будет иметь вид

$$\dot{\theta}_\infty = - \frac{M}{2\pi (M\rho_0^2 + J)} \int_0^{2\pi} (\rho_0 + 2w) \dot{w} d\varphi$$

Рассмотрим случай  $h = 0$ ,  $\dot{\theta} \ll \omega$  и будем искать волновое решение в форме  $w = w_0 \sin(\omega t + k\varphi)$ ,  $v = v_0 \cos(\omega t + k\varphi)$ , представляющее собой при одинаковых знаках  $\omega$  и  $k$  волну, бегущую по часовой стрелке. Вместе с этим, каждый элемент упругой системы ( $\varphi$  фиксировано, но произвольно) движется по эллипсу тоже по часовой стрелке, если  $v_0 w_0 > 0$ . Для нетривиальности решений должны выполняться соотношения

$$[-\omega^2 + \kappa_\rho + (1 + k^2) \kappa_c] w_0 - 2k\kappa_c v_0 = 0$$

$$- 2k\kappa_c w_0 + [-\omega^2 + \kappa_\varphi + (1 + k^2) \kappa_c] v_0 = 0 \quad (4)$$

$$\omega^4 - [\kappa_\rho + \kappa_\varphi + 2(1 + k^2) \kappa_c] \omega^2 + \kappa_\rho \kappa_\varphi +$$



$$+ (1 + k^2) \kappa_c (\kappa_\varphi + \kappa_\rho) + (1 - k^2)^2 \kappa_c^2 = 0$$

Каждому значению  $k$  соответствуют два значения  $\omega^2$  или две пары волн разных частот, бегущие против и по часовой стрелке. Учитывая теперь пусть очень малое, но конечное значение  $h$ , можно записать предельное значение для угловой скорости диска через начальные значения упругих деформаций следующим образом:

$$\dot{\theta}_\infty = -M\omega_0 w_0 (M\rho_0^2 + J)^{-1}$$

где величина  $\omega$  и соотношения между  $w_0$  и  $v_0$  взяты из формул (4).

Рассмотрим случай  $\kappa_\varphi \gg \kappa_\rho$ ,  $\kappa_c$ , когда жесткости связи частиц с диском в радиальном направлении и между собой существенно меньше, чем жесткость связи в азимутальном направлении. Поскольку частоты при этом сильно отличаются  $\omega_-^2 \ll \omega_+^2$ , воспользуемся их приближенным выражением.

Для нижней частоты

$$\omega_-^2 \approx \kappa_\rho + \kappa_c (1 + k^2) - 4k^2 \kappa_c^2 \kappa_\varphi^{-1}$$

$$w_0 = \frac{2k\kappa_c v_0}{-\omega_-^2 + \kappa_\rho + \kappa_c (1 + k^2)} \approx \frac{\kappa_\rho}{2k\kappa_c} v_0$$

Эти колебания происходят по сильно вытянутому вдоль радиуса диска эллипсу по часовой стрелке при  $\omega k > 0$ , так как  $w_0, v_0$  одного знака и  $|w_0| \gg |v_0|$ .

$$H = -2M\omega k \frac{\kappa_c}{\kappa_\rho} w_0^2, \quad \dot{\theta}_\infty = \frac{H}{M\rho_0^2 + J} < 0$$

Таким образом, для данной частоты упругая волна, идущая по часовой стрелке ( $\omega k > 0$ ), доставляет кинетический момент системе за счет вращательного движения частиц по ходу стрелки часов. Поэтому, в силу закона о сохранении момента количества движения, диск при затухании упругой волны начинает вращаться также по часовой стрелке.

Для верхней частоты

$$\omega_+^2 = \kappa_\rho + \kappa_c (1 + k^2) + 4k^2 \kappa_c^2 \kappa_\varphi^{-1}$$

$$w_0 \approx -2k\kappa_c \kappa_\varphi^{-1} v_0$$

$$H = 2M\omega k \kappa_c \kappa_\varphi^{-1} v_0^2, \quad \dot{\theta}_\infty = \frac{H}{M\rho_0^2 + J} > 0$$

Для этой частоты волне, бегущей по часовой стрелке ( $\omega k > 0$ ), соответствует движение каждой частицы против часовой стрелки ( $w_0 v_0 < 0$ ) по сильно вытянутому вдоль касательной к упругому кольцу эллипсу ( $|w_0| \ll |v_0|$ ). После затухания упругих колебаний этого типа возникает вращение против часовой стрелки, совпадающее по направлению с начальным движением частиц и противоположное направлению распространения волны.

Таким образом, кинетический момент упругому телу может быть доставлен созданием бегущей волны, которая сопровождается вращательным движением частиц без вращения тела как целого подобно микроскопическим токам Ампера, создающим намагниченность постоянных магнитов. Ориентация кинетического момента определяется не направлением распространения волны, а направлением вращательного движения частиц упругого тела.

На основании изложенного можно сделать такое парадоксальное высказывание: волновой твердотельный гироскоп обладает нулевым кинетическим моментом, поскольку он работает в режиме стоячей волны, которую можно рассматривать как две одинаковых бегущих в разные стороны и поэтому доставляющих упругому

телу равные по величине, но противоположно направленные кинетические моменты.

К выводу о том, что бегущая волна в упругом теле доставляет ему кинетический момент, независимо пришел В. Ф. Журавлев. Автор признателен ему за внимание к работе и обсуждение ее результатов, а также Хасанову Ш. М. за полезные обсуждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rayleigh, Lord.* On the pressure of vibrations // *Phil. Mag.* 1902. V. 3. P. 338—346.
2. *Brillouin L.* Sur les tensions de radiation // *Annale de Physique.* 1925. V. 4. P. 528—586.
3. *Кадомцев Б. Б., Рыдник В. И.* Волны вокруг нас. М.: Знание, 1981. 150 с.
4. Физическая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1988. Т. 1. С. 315.
5. *Мак-Интайр М.* Миф о волновом импульсе. Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир. 1984. 500 с.
6. *Лич Дж. У.* Классическая механика. Издат. ин. лит. М. 1961. 172 с.
7. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
8. *Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Уткин Г. А.* Законы изменения энергии и импульса одномерных распределенных систем с движущимися границами и нагрузками // *ПММ.* 1983. Т. 47. № 5. С. 863—866.
9. *Островский Л. А., Потанов А. И.* Модулированные волны в линейных средах с дисперсией. Горький: Горьковск. университет, 1988. 96 с.
10. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию  
14.X.1993