МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1994

УДК 539.3

© 1994 г. Н. Ф. МОРОЗОВ, В. Г. ОСМОЛОВСКИЙ

УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ТЕЛА, ДОПУСКАЮЩЕГО ДВУХФАЗОВОЕ СОСТОЯНИЕ

Основополагающие результаты Гиббса [1] получили для задач статики математическое оформление в ряде исследований, опубликованных в последнее десятилетие [2—6]. В настоящей работе предпринимается попытка сформулировать задачу о фазовых переходах в упругом теле с учетом динамики.

Нестационарное состояние упругого тела будет определяться полем смещений

$$u(x, t) = (u^1(x, t), \dots, u^3(x, t)), \quad x \in \Omega \subset R^3, \ t \geq 0$$

и характеристической функцией той части Ω, которая после деформации определяет множество, занимаемое первой фазой, $\chi(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \geq 0$.

Тогда потенциальная энергия деформации в момент времени t имеет вид

$$I[u, \chi] = \int_\Omega \{\chi(x, t)\, \rho^+ F^+ (\nabla u(x, t), u(x, t), x) +$$

$$+ (1 - \chi(x, t))\, \rho^- F^- (\nabla u(x, t), u(x, t), x)\} dx + \sigma \int_\Omega |D\chi(x, t)| \tag{1}$$

Здесь $\rho^\pm$ — плотности материала, а $F^\pm$ — плотности свободной энергии первой и второй фазы соответственно.

Кинетическая энергия тела Ω в тот же момент времени определяется равенством

$$K[u, \chi] = \frac{1}{2} \int_\Omega \{\chi(x, t)\, \rho^+ u_t^2(x, t) + (1 - \chi(x, t))\, \rho^- u_t^2(x, t)\} dx \tag{2}$$

Тогда функционал действия $J[u, \chi]$ имеет вид

$$J[u, \chi] = \int_{Q_T} \{\frac{1}{2} \chi \rho^+ u_t^2 + \frac{1}{2} (1 - \chi) \rho^- u_t^2 - \chi \rho^+ F^+ - (1 - \chi) \rho^- F^-\} dx\, dt -$$

$$- \sigma \int_0^T \left(\int_\Omega |D\chi| \right) dt$$

$$Q_T = \Omega \times [0, T] \tag{3}$$

В дальнейшем будем считать $\rho^+ = \rho^- = 1$. Это упрощающее условие можно было бы и не вводить, но тогда следовало бы выписать дополнительное условие сохранения массы

$$\int_\Omega [\chi \rho^+ + (I - \chi) \rho^-]\, dx = \text{const} \tag{4}$$

и варьировать функционал (3) при выполнении условия (4).

Согласно принципу Гамильтона исследуемая упругая среда будет описываться парой $u(x, t)$, $\chi(x, t)$, которая дает функционалу (3) стационарное значение.

Варьирование функционала (3) будем проводить в предположении, что граница раздела $S(t)$ фаз при каждом $t \in [0, T]$ является достаточно гладкой поверхностью, разделяющей тело Ω на две подобласти $\Omega^+(t)$ и $\Omega^-(t)$, гладко зависящей от t. Последнее означает, что в цилиндре Q_T существует достаточно гладкая поверхность Σ, разделяющая цилиндр Q_T на две части, Q_T^+ и Q_T^-, сечение которой плоскостью $t = \mathrm{const}$ при каждом t совпадает с $S(t)$. Будем считать, что функция $u(x, t)$ непрерывна в Q_T и достаточно гладка в $\bar{Q}_T^+$ и $\bar{Q}_T^-$. Предполагается также достаточная гладкость плотностей свободной энергии $F^\pm$.

Для проведения варьирования функционала (3) фиксируем функцию $h(x, t) \in C_0^\infty(Q_T, R^3)$. Тогда при достаточно малых $|\alpha|$ отображение

$$x \to y(x, t, \alpha) = x + \alpha h(x, t), \quad t \to \tau = t \tag{5}$$

будет диффеоморфизмом цилиндра Q_T на себя. Для обратного отображения

$$y \to x = x(y, t, \alpha), \quad \tau \to t = \tau \tag{6}$$

справедливы формулы

$$x(y, t, 0) = y, \quad \frac{\partial x(y, t, 0)}{\partial \alpha} = -h(y, t) \tag{7}$$

$$\frac{\partial (\nabla_y x(y, t, \alpha))^{-1}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = \nabla_y h(y, t), \quad \frac{\partial (\det \nabla_y x(y, t, \alpha))}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = -\operatorname{div} h(y, t)$$

Пусть пара $u(x, t)$, $\chi(x, t)$ является критической точкой функционала (3). Проварьируем функции $u(x, t)$, $\chi(x, t)$ следующим образом:

$$u(x, t) \to u(y(x, t, \alpha), t) + \alpha\eta(y(x, t, \alpha), t), \quad \chi(x, t) \to \chi(y(x, t, \alpha), t) \tag{8}$$

где $\eta(x, t) \in C_0^\infty(Q_T, R^3)$. На семействе (8) функционал (3) примет вид

$$\Phi(\alpha) \equiv \int_{Q_T} \frac{1}{2}\left[(u(y(x, t, \alpha), t) + \alpha\eta(y(x, t, \alpha), t))_t^2\right] dx\, dt -$$

$$- \int_{Q_T} \chi(y(x, t, \alpha), t)\, F^+((\nabla u(y(x, t, \alpha), t) + \alpha\nabla\eta(y(x, t, \alpha), t))\, \nabla y(x, t, \alpha)$$

$$u(y(x, t, \alpha), t) + \alpha\eta(y(x, t, \alpha), x)\, dx\, dt -$$

$$- \int_{Q_T} (1 - \chi(y(x, t, \alpha), t))\, F^-((\nabla u(y(x, t, \alpha), t) + \alpha\nabla\eta(y(x, t, \alpha), t))\, \nabla y(x, t, \alpha)$$

$$u(y(x, t, \alpha), t) + \alpha\eta(y(x, t, \alpha), x)\, dx\, dt - \sigma \int_0^T \left[\int_\Omega |D_x \chi(y(x, t, \alpha), t)|\right] dt$$

Поскольку параметр α входит в недифференцируемые по всему цилиндру функции u и χ, то для доказательства дифференцируемости Φ по α и вычисления ее производной полезно сделать в правой части последнего равенства замену координат (5). Тогда

$$\Phi(\alpha) = \int_{Q_T} \frac{1}{2}(u_t(y, t) + \alpha\eta(y, t) + \nabla u(y, t)\, y_t(x(y, t, \alpha), t) +$$

$$+ \alpha\nabla\eta(y, t)\, y_t(x(y, t, \alpha), t))\det \nabla x(y, t, \alpha)\, dy\, dt -$$

$$- \int_{Q_T} \chi(y, t)\, F^+((\nabla u(y, t) + \alpha\nabla\eta(y, t))\,(\nabla x(y, t, \alpha))^{-1}, u(y, t) + \alpha\eta(y, t)$$

$$x(y, t, \alpha))\det \nabla x(y, t, \alpha)\, dy\, dt -$$

$$-\int_{Q_T}(1-\chi(y,t))\,F^-((\nabla u(y,t)+\alpha\nabla\eta(y,t))(\nabla x(y,t,\alpha)^{-1},\ u(y,t)+\alpha\eta(y,t)$$

$$x(y,t,\alpha))\det\nabla x(y,t,\alpha)\,dy\,dt-\sigma\int_0^T\int_{S(t)}|(\det\nabla x(y,t,\alpha))(\nabla x(y,t,\alpha))^{-1}\nu(y,t)|\,dS_y$$

где $\nu(y,t)$ — единичная нормаль к $S(t)$ в точке y, внешняя по отношению к $\Omega^+(t)$. Из этого представления видна дифференцируемость функции $\Phi(\alpha)$ при достаточно малых $|\alpha|$. Поскольку $\Phi'(0)=0$, то пользуясь формулами (7), получим

$$O=\int_{Q_T}\{u_t\eta_t+u_t\nabla u h_t-\frac{u_t^2}{2}\,\mathrm{div}h\}\,dx\,dt-$$

$$-\int_{Q_T}\chi\{F^+_{u^l_{x_j}}(u^l_{x_k}h^k_{x_j}+\eta^l_{x_j})+F^+_{u^l}\eta^l-F^+_{x_l}h^l-F^+\mathrm{div}h\}\,dx\,dt- \tag{9}$$

$$-\int_{Q_T}(1-\chi)\{F^-_{u^l_{x_j}}(u^l_{x_k}h^k_{x_j}+\eta^l_{x_j})+F^-_{u^l}\eta^l-F^-_{x_l}h^l-F^-\mathrm{div}h\}\,dx\,dt-\sigma\int_0^T\int_{S(t)}\delta_l h^l dS\,dt$$

$$u=u(x,t),\ \eta=\eta(x,t),\ h=h(x,t),\ \ F^\pm=F^\pm(\nabla u,u,x),\ \ \delta_l=\frac{\partial}{\partial x_l}-\nu_l\nu_k\frac{\partial}{\partial x_k}$$

Пусть $\hat\nu$ — поле единичных нормалей к Σ, внешних по отношению к Q_T. Тогда при каждом $t\in[0,T]$ выполняются соотношения

$$\cos(\nu,x_i)=\cos(\hat\nu,x_i)/\sin(\hat\nu,t),\qquad d\Sigma=dt\,dS(t)/\sin(\hat\nu,t) \tag{10}$$

Производя в первых трех слагаемых из (9) интегрирование по частям и пользуясь формулами (10) для четвертого слагаемого, получим

$$O=\int_{Q_T^+}\Big\{-u^l_{tt}-\Big(-\frac{d}{dx_j}F^+_{u^l_{x_j}}+F^+_{u^l}\Big)\Big\}(\eta^l+u^l_{x_k}h^k)\,dx\,dt+$$

$$+\int_{Q_T^-}\Big\{-u^l_{tt}-\Big(-\frac{d}{dx_j}F^-_{u^l_{x_j}}+F^-_{u^l}\Big)\Big\}(\eta^l+u^l_{x_k}h^k)\,dx\,dt+$$

$$+\int_{\Sigma}\{[u^l_t\cos(\hat\nu,t)-F_{u^l_{x_j}}\cos(\hat\nu,x_j)]\,\eta^l+[(u^l_t\cos(\hat\nu,t)-F_{u^l_{x_j}}\cos(\hat\nu,x_j))\,u^l_{x_k}+$$

$$+\Big(F-\frac{u_t^2}{2}\Big)\cos(\hat\nu,x_k)]\,h^k-\sigma H\cos(\hat\nu,x_k)\}\,d\Sigma \tag{11}$$

где $H=H(x,t)$ — средняя кривизна поверхности $S(t)$ в точке x в момент времени t, а $[A]=A^+-A^-$ означает скачок величины A при переходе через поверхность Σ.

Пользуясь произволом η и h из (11) находим

$$u^l_{tt}=\frac{d}{dx_j}F^\pm_{u^l_{x_j}}-F^\pm_{u^l}\quad(i=1,\ldots,3)\ \ x,t\in Q_T^\pm \tag{12}$$

$$[u^l_t\cos(\hat\nu,t)-F_{u^l_{x_j}}\cos(\hat\nu,x_j)]=0\ \ (i=1,\ldots,3)\ \ x,t\in\Sigma \tag{13}$$

$$[(u^l_t\cos(\hat\nu,t)-F_{u^l_{x_j}}\cos(\hat\nu,x_j))\,u^l_{x_k}+\Big(F-\frac{u_t^2}{2}\Big)\cos(\hat\nu,x_k)]-\sigma H\cos(\hat\nu,x_k)=0$$

$$(k=1,\ldots,3)\ \ x,t\in\Sigma \tag{14}$$

Уравнение (12) и условия (13), (14) на свободной поверхности Σ вместе с граничными условиями для $u(x, t)$ и начальными данными $u(x, t)$, $u_t(x, 0)$, $\Sigma|_{t=0} = S(0)$ является системой для определения $u(x, t)$ и $S(t)$.

В стационарном случае уравнение (12) будет уравнением равновесия среды в областях $\Omega^\pm$, условие (13) перейдет в условие сопряжения для контактной задачи на поверхности S, а равенство (14) позволит определить среднюю кривизну свободной поверхности S через скачок химического потенциала.

Пусть Ω — шар радиуса R. В радиально симметричной задаче $u(x, t) = v(r, t)\, x/|x|$, где v — скалярная функция, $r = |x|$, плотности $F^\pm$ имеют вид $F^\pm(\nabla u, u, x) = \hat{F}^\pm(\partial v/\partial r, v, r)$, а свободную поверхность Σ можно задать равенством $r = r_0(t)$. Тогда $Q_T = \{r, t\colon 0 \le r \le r_0(t),\ 0 \le t \le T\}$ и

$$\cos(\hat{\nu}, t) = \frac{-r_0'}{(1 + r_0'^2)^{1/2}}, \quad \cos\left(\hat{\nu}, \frac{x}{|x|}\right) = \frac{1}{(1 + r_0'^2)^{1/2}} \tag{15}$$

Поскольку для сферы радиуса $r_0(t)$ справедлива формула $H = 2/r_0(t)$, то с помощью (15) выражения (12)—(14) перепишутся в виде

$$v_{tt} = r^{-2}\frac{d}{dr} r^2 \hat{F}^\pm_{v'} - \hat{F}^\pm_v, \quad r, t \in Q_T^\pm \tag{16}$$

$$[v_t r_0' + \hat{F}_{v'}] = 0, \quad \left[(v_t r_0' + \hat{F}_{v'})\, v' + \left(\hat{F} - \frac{v_t^2}{2}\right)\right] - \sigma\frac{2}{r_0} = 0 \tag{17}$$

где $[A]$ означает скачок величины A в точке $r = r_0(t)$. Уравнение (16) вместе с условиями (17), начальными условиями для v и r_0 и граничными условиями для v являются системой для определения $v(r, t)$ и $r_0(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гиббс Дж. Б.* Термодинамические работы. М.: ГИТТЛ. 1951.
2. *Гринфельд М. А.* Об условиях термодинамического равновесия фаз нелинейного упругого материала // ДАН СССР. 1980. Т. 251. № 4. С. 824—828.
3. *Кандауров В. И., Никитин Л. В.* О фазовых переходах первого рода // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1348—1351.
4. *Кубланов Л. В., Фрейдин А. Б.* Зародыши твердой фазы в деформируемых материалах. ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 493—501.
5. *Еремеев В. А., Зубов Л. М.* Условия фазового равновесия // ДАН СССР. 1992. Т. 322. № 6. С. 1052—1056.
6. *Ball J. M., James R. D.* Fine mixtures as minimizers of energy // Arch. Ration. Mech. Anal. 1988. V. 100. No 1. P. 13—52.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
2.XI.1993