

УДК 539.3

© 1994 г. А. Г. ГОРШКОВ, А. Л. МЕДВЕДСКИЙ, Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ  
НАКЛОННЫЙ УДАР АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ЦИЛИНДРА  
ПО УПРУГОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

В настоящее время нестационарные контактные задачи для упругого полупространства привлекают все большее внимание исследователей. Однако, в силу математических сложностей, эффективные аналитические решения удается получить только в автомодельных задачах [1] или на сверхзвуковом этапе внедрения [2], когда граничные условия для полупространства носят несмешанный характер. На дозвуковом участке задача об определении контактных напряжений может быть сведена к решению сингулярного интегрального уравнения. Указанный подход использован также в работах [3, 4] для задач с фиксированной областью контакта. В публикуемой работе предлагается метод решения плоских нестационарных контактных задач для гладких абсолютно твердых ударников и упругого полупространства, основанный на сведении задачи к системе функциональных уравнений с сингулярным оператором. Представлена разностная схема первого порядка для интегрирования полученной системы.

**1. Постановка задачи.** Пусть граница линейно-упругого однородного изотропного полупространства в прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  совпадает с плоскостью  $x_3 = 0$ , причем ось  $Ox_1$  направлена в глубь полупространства, а ось  $Ox_2$  — вдоль свободной поверхности.

Введем безразмерные параметры (штрих далее везде опущен):

$$x_i' = x_i/L_0, \quad \gamma = c_1/c_2, \quad \tau = c_1 t/L_0$$

$$\varphi' = \varphi/L_0^2, \quad \psi' = \psi/L_0^2, \quad u_i' = u_i/L_0$$

$$\kappa = \lambda/(\lambda + 2\mu), \quad c_1 = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$$

$$c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}, \quad \sigma_{ij}' = \sigma_{ij}/(\lambda + 2\mu) \quad (i, j = 1, 2)$$

где  $\lambda, \mu, \rho$  — коэффициенты Ламе и плотность среды,  $L_0$  — характерный размер ударника,  $u_i$  — компоненты вектора перемещения точек полупространства,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $\varphi$  и  $\psi$  — продольный потенциал и ненулевая компонента поперечного потенциала,  $c_1$  и  $c_2$  — скорости волн расширения-сжатия и формоизменения.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для упругого полупространства:

уравнения движения в потенциалах [5]:

$$\ddot{\varphi} = \Delta\varphi, \quad \gamma^2 \ddot{\psi} = \Delta\psi, \quad \Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$$

$$u_1 = \partial\varphi/\partial x_1 + \partial\psi/\partial x_2, \quad u_2 = \partial\varphi/\partial x_2 - \partial\psi/\partial x_1 \quad (1.1)$$

<sup>1</sup> См. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Вертикальный удар цилиндра по упругой полуплоскости // Проблемы взаимодействия деформируемых сред: Тезисы докл. — Ереван: АН Арм. ССР, 1984. С. 125—131.

$$\sigma_{11} = \partial u_1 / \partial x_1 + \kappa \partial u_2 / \partial x_2, \quad \sigma_{22} = \partial u_2 / \partial x_2 + \kappa \partial u_1 / \partial x_1$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

начальные условия

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0 \quad (1.2)$$

граничные условия

$$\dot{u}_i(x_1, x_2, \tau)|_{x_1=0} = w(x_2, \tau), \quad \sigma_{12}(x_1, x_2, \tau)|_{x_1=0} = 0, \quad x_2 \in \Omega(\tau) \quad (1.3)$$

$$\sigma_{11}(x_1, x_2, \tau)|_{x_1=0} = \sigma_{22}(x_1, x_2, \tau)|_{x_1=0} = 0, \quad x_2 \notin \Omega(\tau)$$

$$\varphi(r, \tau) = O(1), \quad \psi(r, \tau) = O(1), \quad r \rightarrow \infty, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Краевые условия (1.3) соответствуют линейной контактной задаче для полупространства при заданной в области контакта  $\Omega(\tau)$  нормальной компоненте вектора перемещений точек поверхности полупространства  $w(x_2, \tau)$ . Контакт абсолютно твердого тела (в дальнейшем ударника) с полупространством происходит в условиях свободного проскальзывания. В общем случае  $\Omega(\tau)$  и  $w(x_2, \tau)$  являются неизвестными и должны определяться в процессе решения задачи.

Рассмотрим ударник, ограниченный гладкой выпуклой поверхностью  $\Pi$ , который в начальный момент времени  $\tau = 0$  касается полупространства в точке  $O$  так, что  $Ox_3 \in \Pi$ . Уравнение направляющей цилиндра в связанных с телом главных центральных осях  $O_1y_1y_2y_3$  имеет вид  $y_1 = f(y_2)$ .

В линейной постановке граничные условия могут быть снесены на невозмущенную поверхность полупространства  $x_1 = 0$ , (1.3). Также будем предполагать, что область контакта  $\Omega(\tau)$  — односвязная. В этом случае  $\Omega(\tau)$  представляет собой отрезок  $[b_1(\tau), b_2(\tau)] \in Ox_2$ , причем в первом приближении  $b_j(\tau)$  ( $j = 1, 2$ ) определяются из условий пересечения образующей ударника с осью  $Ox_2$ :

$$\partial \Omega(\tau) = \{b_j(\tau) \mid g(0, b_j(\tau), \tau) = 0 \quad (j = 1, 2)\} \quad (1.4)$$

где  $g(x_1, x_2, \tau) = 0$  — уравнение направляющей ударника в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ .

Переход от системы координат  $O_1y_1y_2y_3$  к  $Ox_1x_2x_3$  осуществляется известным образом с помощью ортогональной матрицы поворота  $C$ :

$$X = C(\tau) Y + U_c, \quad X^T = (x_1, x_2), \quad Y^T = (y_1, y_2) \quad (1.5)$$

$$C(\tau) = \begin{vmatrix} \cos \theta(\tau) & -\sin \theta(\tau) \\ \sin \theta(\tau) & \cos \theta(\tau) \end{vmatrix}$$

где  $U_c$  — вектор перемещения центра масс ударника,  $\theta$  — угол поворота ударника вокруг центра масс.

Движение ударника описывается в безразмерном виде системой уравнений движения абсолютно твердого тела с соответствующими начальными условиями [6]:

$$m\ddot{V}_c = R_e + R, \quad I\dot{\omega} = M_e + M, \quad \ddot{U}_c = V_c, \quad \dot{\theta} = \omega \quad (1.6)$$

$$U_c|_{\tau=0} = U_{c0}, \quad V_c|_{\tau=0} = V_{c0}, \quad \theta|_{\tau=0} = \theta_0, \quad \omega|_{\tau=0} = \omega_0$$

$$m' = \frac{m}{\rho L_0^2}, \quad I' = \frac{I}{\rho L_0^4}, \quad U_c' = \frac{U_c}{L_0}, \quad V_c' = \frac{V_c}{c_1}$$

$$\omega' = \frac{\omega}{c_1 L_0}, \quad \mathbf{R}' = \frac{\mathbf{R}}{(\lambda + 2\mu) L_0}, \quad \mathbf{R}'_e = \frac{\mathbf{R}_e}{(\lambda + 2\mu) L_0}$$

$$M' = \frac{M}{(\lambda + 2\mu) L_0^2}, \quad M'_e = \frac{M_e}{(\lambda + 2\mu) L_0^2}$$

где  $U_{c0}, V_{c0}, \theta_0, \omega_0$  — начальные значения кинематических параметров ударника;  $m, I$  — масса и главный момент инерции ударника;  $\mathbf{R}_e, M_e$  и  $\mathbf{R}, M$  — соответственно внешние и контактные силы и моменты, действующие на тело (штрих далее везде опущен).

2. Система разрешающих уравнений. В линейной задаче выражения результирующей контактной силы и момента через контактные напряжения  $\sigma_{ij}(x_2, \tau) = \sigma_{ij}(x_1, x_2, \tau)|_{x_1=0}$  имеют вид

$$R^{(j)} = \int_{b_1(\tau)}^{b_2(\tau)} \sigma_{1j0}(\xi, \tau) d\xi, \quad M = M_0 - \int_{b_1(\tau)}^{b_2(\tau)} \xi \sigma_{110}(\xi, \tau) d\xi \quad (2.1)$$

$$M_0 = (U_e, \mathbf{R}, \mathbf{e}_3) \quad (j = 1, 2)$$

где  $\mathbf{e}_3$  — единичный орт оси  $Ox_3$ ,  $R^{(j)}$  — компоненты вектора  $\mathbf{R}$  ( $j = 1, 2$ ).

В силу граничных условий (1.3)  $\sigma_{120}(x_2, \tau) \equiv 0$ . Следовательно, продольная компонента вектора перемещений центра масс ударника  $U_c^{(2)}(\tau)$  может быть найдена из (1.6) явно

$$U_c^{(2)} = m^{-1} \int_0^\tau (\tau - t) R_e^{(2)}(t) dt + V_{c0}^{(2)} \tau + U_{c0}^{(2)} \quad (2.2)$$

где  $R_e^{(j)}$  — компоненты вектора внешней нагрузки,  $U_{c0}^{(j)}$  — компоненты вектора  $U_{c0}$ ,  $V_{c0}^{(j)} = \dot{U}_{c0}^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ).

Аналогично можно записать решения оставшихся пяти скалярных уравнений системы (1.6)

$$U_c^{(1)} = m^{-1} \int_0^\tau (\tau - t) (R_e^{(1)} + R^{(1)}) dt + V_{c0}^{(1)} \tau + U_{c0}^{(1)}$$

$$\theta = I^{-1} \int_0^\tau (\tau - t) (M_e + M) dt + \omega_0 \tau + \theta_0$$

$$V_c^{(j)} = m^{-1} \int_0^\tau (R_e^{(j)} + R^{(j)}) dt + V_{c0}^{(j)} \quad (j = 1, 2) \quad (2.3)$$

$$\omega = I^{-1} \int_0^\tau (M_e + M) dt + \omega_0$$

В дальнейшем обозначим нормальные контактные напряжения следующим образом:  $\sigma(x, \tau) = \sigma_{11}(x_1, x_2, \tau)|_{x_1=0}$ ,  $x = x_2$ . Систему (2.3) с учетом (2.1) можно переписать в виде

$$U_c^{(1)} = m^{-1} \left( \int_0^\tau (\tau - t) R_e^{(1)} dt + \int_0^\tau dt \int_{b_1(t)}^{b_2(t)} (\tau - t) \sigma(\xi, t) d\xi \right) + V_{c0}^{(1)} \tau + U_{c0}^{(1)}$$

$$\theta = I^{-1} \left( \int_0^\tau (\tau - t) M_e dt + \int_0^\tau (\tau - t) (U_e, \mathbf{R}, \mathbf{e}_3) dt - \right.$$

$$-\int_0^{\tau} dt \int_{b_1(t)}^{b_2(t)} (\tau-t) \xi \sigma(\xi, t) d\xi + \omega_0 \tau + \theta_0$$

$$V_c^{(j)} = m^{-1} \left( \int_0^{\tau} R_c^{(j)} dt + \int_0^{\tau} dt \int_{b_1(t)}^{b_2(t)} \sigma(\xi, t) d\xi \right) + V_{c0}^{(j)} \quad (j=1, 2) \quad (2.4)$$

$$\omega = I^{-1} \left( \int_0^{\tau} M_c dt + \int_0^{\tau} (U_c, R, e_3) dt - \int_0^{\tau} dt \int_{b_1(t)}^{b_2(t)} \xi \sigma(\xi, t) d\xi \right) + \omega_0$$

Из принципа суперпозиции для нормальных перемещений поверхности полупространства в начально-краевой задаче (1.1)—(1.3) следует представление

$$w(x, \tau) = \int_0^{\tau} dt \int_{b_1(t)}^{b_2(t)} F(x - \xi, \tau - t) \sigma(\xi, t) d\xi \quad (2.5)$$

$$\pi F(x, t) = \begin{cases} \gamma^4 x^2 (t^2 - x^2)^{1/2} ((\gamma^2 x^2 - 2t^2)^2 + 4t^2 ((t^2 - x^2)(t^2 - \gamma^2 x^2))^{1/2}) / R_0(x, t), & t > \gamma |x| \\ \gamma^2 x^2 (t^2 - x^2)^{1/2} (\gamma^2 x^2 - 2t^2)^2 / R_0(x, t), & t/\gamma \leq |x| \leq t \end{cases}$$

$$R_0(x, t) = (\gamma^2 x^2 - 2t^2)^4 - 16t^4 (t^2 - x^2) (t^2 - \gamma^2 x^2)$$

Нормальные перемещения точек поверхности полупространства  $F(x, t)$  в (2.5) представляют собой функцию влияния для последнего при следующих граничных условиях [7]:

$$\sigma_{11}(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} = \delta(x_2) \delta(\tau), \quad \sigma_{12}(x_1, x_2, \tau) |_{x_1=0} = 0 \quad (2.6)$$

Для замыкания системы уравнений необходимо выписать явные выражения для  $w(x, \tau)$  через кинетические параметры ударника и систему уравнений для определения  $b_j(\tau)$  ( $j=1, 2$ ). Очевидно, в силу (1.4) и (1.5), уравнение  $g(x_1, x_2, \tau) = 0$  эквивалентно следующей системе уравнений:

$$(x_1, x_2)^T = C(\tau) (f(y_2), y_2)^T + (U_c^{(1)}, U_c^{(2)})^T \quad (2.7)$$

Следовательно, граница  $\partial\Omega(\tau)$  и  $w(x, \tau)$  в силу (1.4) и (2.7) определяются так

$$b_j(\tau): (0, b_j(\tau))^T = C(\tau) (f(y_2), y_2)^T + (U_c^{(1)}, U_c^{(2)})^T$$

$$w(x, \tau): (w, x)^T = C(\tau) (f(y_2), y_2)^T + (U_c^{(1)}, U_c^{(2)})^T \quad (2.8)$$

Введем в рассмотрение следующие интегральные операторы:

$$L_s, L_r^{(m,d)}: R(D) \rightarrow C(R_+), \quad K^{(j)}: R(R_+) \rightarrow C(R_+)$$

$$L_s(\varphi) = \int_D \int F(x - \xi, \tau - t) \varphi(\xi, t) d\mu, \quad K^{(j)}(f) = \int_0^{\tau} (\tau - t) f(t) dt \quad (2.9)$$

$$L_r^{(m,d)}(\psi) = \int_D \int (\tau - t)^m \xi^j \psi(\xi, t) d\mu$$

$$D = \{(\xi, t) \in R_+^2, t \in [0, \tau], \xi \in [b_1(t), b_2(t)]\}$$

$$\varphi, \psi \in R(D), \quad R_+ = \{x \in R \mid x \geq 0\}, \quad R_+^2 = R_+ \times R$$

где  $R, C$  — пространства интегрируемых и непрерывных функций на соответствующих множествах,  $D$  — пространственно-временная область контакта (фиг. 1). Ограничимся случаем, когда  $D$  является выпуклой и односвязной. Для этого, в случае гладкого ударника, достаточно потребовать выполнения следующего условия:

$$(-1)^j \ddot{b}_j(\tau) < 0 \quad (j = 1, 2) \quad (2.10)$$

Таким образом, в операторном виде система функциональных уравнений плоской нестационарной контактной задачи примет вид

$$U_c^{(j)} = m^{-1} (K^{(j)} (R_e^{(j)} + \delta_{ij} L_r^{(j,0)}(\sigma)) + V_{c0}^{(j)} \tau + U_{c0}^{(j)} \quad (2.11)$$

$$\theta = I^{-1} (K^{(1)} (M_e) + K^{(1)} ((V_c, R, e_3)) - L_r^{(1,1)}(\sigma)) + \omega_0 \tau + \theta_0$$

$$V_c^{(j)} = m^{-1} (K^{(j)} (R_e^{(j)} + \delta_{ij} L_r^{(j,0)}(\sigma)) + V_{c0}^{(j)} \quad (i, j = 1, 2)$$

$$\omega = I^{-1} (K^{(0)} (M_e) + K^{(0)} ((U_c, R, e_3)) - L_r^{(0,1)}(\sigma)) + \omega_0$$

$$w(x, \tau) = L_s(\sigma)$$

$$(0, b_j)^T = C(\tau) (f(y_2), y_2)^T + (U_c^{(1)}, U_c^{(2)})^T$$

$$(w, x)^T = C(\tau) (f(y_2), y_2)^T + (U_c^{(1)}, U_c^{(2)})^T$$

где  $\delta_{ij}$  — символы Кронекера.

Ядро интегрального оператора  $L_s$  имеет особенность первого порядка, сосредоточенную на прямых  $|x| = c_R t$  ( $c_R$  — скорость волны Релея), поэтому (2.11) представляет собой систему сингулярных функциональных уравнений с интегральным оператором типа Вольтерра. Далее предлагается численная процедура интегрирования системы (2.11).

**3. Аппроксимация пространственно-временной области контакта.** Для аппроксимации области  $D$  (фиг. 1) нанесем на полуплоскость  $R_+^2$  сетку с равномерным шагом  $h$ :

$$t_i = ih, \quad \xi_j = jh, \quad R_+^2 = \bigcup_i \bigcup_j K_{ij} \quad (3.1)$$

$$K_{ij} = \{(t, \xi) \mid t_{i-1} \leq t \leq t_i, \xi_j \leq \xi \leq \xi_{j+1}\}, \quad i \in N, \quad j \in Z$$

Границу области  $\partial\Omega(\tau) = \{b_j(t) \mid t \in [0, \tau] \quad (j = 1, 2)\}$  заменим кусочно-постоянными функциями  $\beta_j(+)$ , определяемыми по формулам

$$\beta_j = (-1)^j [|b_j(t)|/h] h \quad (j = 1, 2) \quad (3.2)$$

В этом случае пространственно-временная область контакта  $D_n$  в момент времени  $\tau = t_n$  будет аппроксимироваться выпуклым многоугольником  $G_n$ :

$$G_n = \bigcup_{i=1}^n K_{ip}, \quad K_l = \bigcup_{j=l_{1l}}^{l_{2l}-1} K_{ij} \quad (3.3)$$

$$l_{kl} = \beta_{kl}/h, \quad \beta_{kl} = \beta_k(t_l) \quad (k = 1, 2)$$

Носитель ядра  $F(x, t)$  оператора  $L_s$  представляет собой прямоугольный равносторонний треугольник

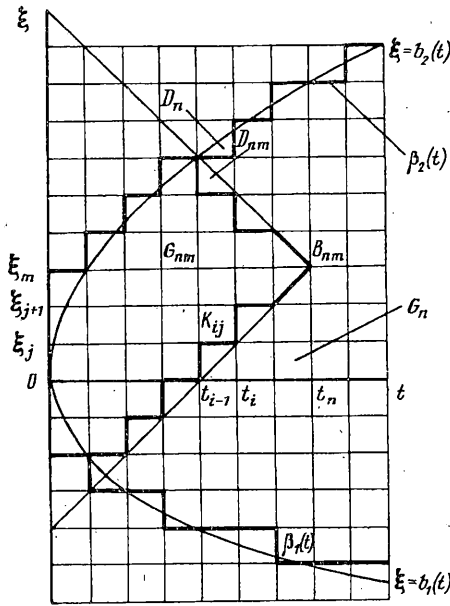
$$\text{supp } F(mh - \xi, nh - t) = \{(t, \xi) \mid 0 \leq t \leq nh, \quad |mh - \xi| \leq nh - t\} \quad (3.4)$$

Следовательно, в операторе  $L_s$  интегрирование по области  $D_n$  с учетом (3.3) и (3.4) можно свести к интегралу по  $G_{nm}$  (фиг. 1):

$$G_{nm} = \left( \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=k_{1i}}^{k_{2i}-1} K_{ij} \right) \cup B_{nm}, \quad B_{nm} = K_n \cap \text{supp } F(mh - \xi, nh - t) \quad (3.5)$$

$$k_{1i} = \max \{l_{1i}, m - n + i\}, \quad k_{2i} = \min \{l_{2i} - 1, m + h - i\}$$

**4. Аппроксимация интегральных операторов.** Поставим в соответствие функциям



Фиг. 1

одного и нескольких переменных  $U_c^{(j)}(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $V_c^{(j)}(t)$ ,  $\omega(t)$  и  $\sigma(\xi, t)$  сеточные функции  $u_i^{(j)}$ ,  $\theta_i$ ,  $V_i^{(j)}$ ,  $\omega_i$  и  $\sigma_{ij}$  определенные следующим образом

$$u_i^{(j)} = U_c^{(j)}(t_i), \quad V_i^{(j)} = V_c^{(j)}(t_i), \quad \theta_i = \theta(t_i), \quad \omega_i = \omega(t_i)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma(t_i, \xi_{z(j)}), \quad z(j) = j + \text{mod}(j, 2) \quad (4.1)$$

Введем разностные операторы, которые ставятся в соответствие интегральным операторам задачи (2.11) [8]. Для этого зафиксируем  $\tau = t_n$ ,  $x = \xi_m$  и запишем соответствующие выражения, используя в качестве  $D_n$  и  $D_{nm}$  соответственно  $G_n$  и  $G_{nm}$ .

1. *Оператор  $K^{(j)}$ .* В качестве разностного аналога  $K^{(j)}$  введем оператор  $\Lambda_k^{(j)}$  соответствующий формуле прямоугольников на отрезке  $[0, t_N]$ :

$$\Lambda_k^{(j)} : H_N \rightarrow H_N, \quad \Lambda_k^{(j)} y = h^{1+j} \sum_{i=1}^n (n-i)^j y_i \quad (4.2)$$

$$y \in H_N, \quad y_i = y(t_i)$$

где  $H_N$  — пространство сеточных функций, заданных на сетке  $\omega_h = \{t_i \mid i = \overline{1, N}\}$ .

В силу свойств ядра оператора  $K^{(j)}$  при  $j=1$  значение подынтегральной функции при  $t = t_n$  не войдет в разностное соотношение. Следовательно

$$\Lambda_k^{(0)} y = h \sum_{i=1}^n y_i, \quad \Lambda_k^{(1)} y = h^2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) y_i \quad (4.3)$$

2. *Регулярный оператор  $L_r^{(m,j)}$ .* Интегральному оператору  $L_r^{(m,j)}$  поставим в соответствие разностный оператор формулы прямоугольников  $\Lambda_{L_r}^{(m,j)}$ , определенный на пространстве сеточных функций  $H_{N,M}$ , которые заданы на сетке  $\omega_{nh} = \{t_i, \xi_j \mid i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}\}$ :

$$\Lambda_{L_r}^{(m,j)} f = h^{2+j+m} \sum_{i=1}^n \sum_{k=l_{li}}^{l_{2i}^{-1}} (n-i)^m z(k) f_{ik}, \quad f \in H_{N,M} \quad (4.4)$$

где  $l_{ki}$ ,  $z(k)$  определены в (3.3) и (4.1).

С учетом свойств ядра, аналогично (4.3), значение подынтегральной функции  $f_{nk}$  не войдет в кубатурную формулу. Поэтому окончательно (4.4) примет вид

$$\Lambda_{L_r}^{(0,j)} f = h^{2+j} \sum_{i=1}^n \sum_{k=l_{li}}^{l_{2i}^{-1}} z(k) f_{ik} \quad (j = 0, 1) \quad (4.5)$$

$$\Lambda_{L_r}^{(1,j)} f = h^{3+j} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=l_{li}}^{l_{2i}^{-1}} (n-i) z(k) f_{ik}$$

3. *Сингулярный оператор  $L_s$ .* Ядро оператора  $L_s$  имеет помимо неинтегрируемой особенности на прямых  $|mh - \xi| = c_R(nh - t)$  интегрируемую особенность в точке  $(nh - t, mh - \xi)$ . Для учета последней рассмотрим следующую свертку ( $m = 2k$ ,  $m \neq l_{jn}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$s_{nm} = \int_{B_{nm}} \int F(mh - \xi, nh - t) \sigma(\xi, t) d\mu = \int_{(n-1)h}^{nh} dt \int_{(m-n)h+t}^{(n+m)h-t} F(mh - \xi, nh - t) \sigma(\xi, t) d\xi \quad (4.6)$$

Делая замену переменных  $\eta = \xi - mh$ ,  $\zeta = t - (n-1)h$ , а также принимая во внимание (4.1), четность и однородность  $(-1)$  степени функции влияния  $F(x, t)$ , последний интеграл можно записать в виде

$$s_{nm} = \sigma_{nm} \int_0^h d\zeta \int_{\zeta-h}^{h-\zeta} F(\eta, h - \zeta) d\eta \quad (4.7)$$

Полученный интеграл может быть вычислен аналитически. Для этого рассмотрим вспомогательную начально-краевую задачу для нормальной компоненты вектора перемещений точек упругого полупространства

$$\ddot{u}_1 = \Delta u_1, \quad u_1|_{\tau=0} = \dot{u}_1|_{\tau=0} = 0, \quad u_1|_{x_1=0} = \tau H(\tau) \quad (4.8)$$

где  $H(\tau)$  — функция Хевисайда.

Решение задачи (4.8) может быть получено элементарными методами теории упругости

$$u_1(x_1, x_2, \tau) = (\tau - x_1) H(\tau - x_1), \quad \sigma_{11}|_{x_1=0} = -H(\tau - x_1) \quad (4.9)$$

С другой стороны, из принципа суперпозиции при  $\tau = nh$  имеем

$$u_1|_{x_1=0} = nh = - \int_0^{nh} dt \int_{t-nh}^{nh-t} F(\xi, nh - t) d\xi \quad (4.10)$$

Сравнивая (4.7) с (4.10) при  $n=1$  и делая аналогичные выкладки при  $m = l_{jn}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $m = 2k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , приходим к следующим соотношениям:

$$\int_0^h dt \int_{t-h}^{h-t} F(\xi, h - t) d\xi = -h \quad (4.11)$$

$$s_{nm} = -h \sigma_{nm} \quad (m \neq l_{jn}), \quad s_{nm} = - (h/2) \sigma_{nm} \quad (m = l_{jn})$$

$$(j = 1, 2, m = 2k, k = 0, 1, 2, \dots)$$

Для получения кубатурных формул по области  $G_{nm} \setminus B_{nm}$  рассмотрим следующее представление

$$\int_{G_{nm} \setminus B_{nm}} \int F(mh - \xi, nh - t) \sigma(\xi, t) d\xi dt = \int_{G_{nm} \setminus B_{nm}} \int F_s(mh - \xi, nh - t) \sigma(\xi, t) d\xi dt +$$

$$+ \int_{G_{nm} \setminus B_{nm}} \int F_r(mh - \xi, nh - t) (nh - t)^{-2} \sigma(\xi, t) d\xi dt$$

$$F_r(x, t) = t^2 (F_1(x, t) - a_0 t) / (x^2 - c_R^2 t^2) \quad (4.12)$$

$$F_s(x, t) = a_0 t / (x^2 - c_R^2 t^2), \quad a_0 = F_1(c_R, 1)$$

Регулярная составляющая ядра  $F_r(x, t)$  является функцией класса  $C(G_{nm})$ , поэтому коэффициенты кубатур  $d_{mnij}^{(r)}$  по элементарной области  $K_{ij}$  (3.3) могут быть найдены численно с заданной точностью  $\varepsilon$ , например, с помощью формулы прямоугольников для интеграла с весом  $\vartheta_1(t) = t^{-2}$ :

$$d_{mnij}^{(r)} = h^{-1} \int_{K_{ij}} \int F_r(mh - \xi, nh - t) d\mu = q^{-1} \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{q-1} f_{n-l, m-j, k, l}^{(r)} \varphi_{n-l, m-j, k} \quad (4.13)$$

$$f_{prkl}^{(r)} = F_r(qp - k, q(r+1) - l)$$

$$\varphi_{prk} = [(q(p+1) - k)(q(p+1) - k + 1)]^{-1}$$

где  $q$  определяется точностью  $\varepsilon$ .

Для сингулярной составляющей ядра  $F_s(x, t)$  могут быть получены формулы для  $d_{mnij}^{(s)}$ , учитывающие неинтегрируемые особенности ядра, которые совпадают с кубатурами для интеграла с весом  $\vartheta_2(x, t) = (x^2 - c_R^2 t^2)^{-1}$ :

$$d_{mnij}^{(s)} = h^{-1} \int_{K_{ij}} \int F_s(mh - \xi, nh - t) d\mu = a_0 p^{-1} \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{p-1} \Psi_{n-l, m-j, k, l}$$

$$\Psi_{qrkl} = \frac{1}{2c_R^2} \sum_{l, j, m=0}^1 (-1)^{j+m} \sqrt{\nu_{qrkl}^{(ijm)}} \ln |\nu_{qrkl}^{(ijm)}| \quad (4.14)$$

$$\nu_{qrkl}^{(ijm)} = pr - l - j + (-1)^{l+1} c_R (p(q+1) - k + m)$$

где  $p$  определяется точностью  $\varepsilon$ .

Из вышеизложенного следует, что сингулярному оператору  $L_s$  можно поставить в соответствие разностный оператор  $\Lambda_{L_s}$ , определенный на пространстве сеточных функций  $H_{N, M}$ :

$$\Lambda_{L_s} f = h \left( \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{j=k_{li}}^{k_{2l-1}} (d_{mnij}^{(r)} + d_{mnij}^{(s)}) f_{ij} + r_{nm} f_{nm} \right)$$

$$r_{nm} = -1 \quad (m \neq l_{jn}), \quad r_{nm} = -0,5 \quad (m = l_{jn}) \quad (4.15)$$

$$(j = 1, 2, \quad m = 2k, \quad k = 0, 1, 2 \dots), \quad f \in H_{N, M}$$

**5. Разностная схема для системы функциональных уравнений.** Пользуясь результатами предыдущего пункта, запишем дискретный аналог первых шести уравнений системы (2.11) в точке  $\tau = t_n$ :

$$u_n^{(j)} = m^{-1} (\Lambda_k^{(j)} R_e^{(j)} + \delta_{lj} \Lambda_{L_r}^{(j,0)} \sigma) + V_0^{(j)} nh + u_0^{(j)} \quad (5.1)$$

$$\theta_n = I^{-1} (\Lambda_k^{(j)} M_e + \Lambda_k^{(j)} (U_c, R, e_3) - \Lambda_{L_r}^{(j,1)} \sigma) + \omega_0 nh + \theta_0 \quad (j = 1, 2)$$

$$V_n^{(j)} = m^{-1} (\Lambda_k^{(j)} R_e^{(j)} + \delta_{lj} \Lambda_{L_r}^{(j,0)} \sigma) + V_0^{(j)}$$



$$\omega = \Gamma^{-1} (\Lambda_k^{(0)} M_e + \Lambda_k^{(0)} (U_c, R, e_3) - \Lambda_{L_r}^{(0,1)} \sigma) + \omega_0$$

Из (5.1) с учетом (4.3) и (4.5) для любого  $n \geq 1$  найдем

$$u_n^{(j)} = u_{n-1}^{(j)} + h V_{n-1}^{(j)} \quad (j = 1, 2), \quad \theta_n = \theta_{n-1} + h \omega_{n-1}$$

$$V_n^{(j)} = V_{n-1}^{(j)} + m^{-1} h (R_{en}^{(j)} + \delta_{ij} h \sum_{k=l_{1n}}^{l_{2n-1}} \sigma_{nk})$$

$$\omega_n = \omega_{n-1} + \Gamma^{-1} h (M_{en} + h \sum_{k=l_{1n}}^{l_{2n-1}} (u_n^{(2)} - h z(k)) \sigma_{nk}) \quad (5.2)$$

$$R_{en} = R_e(t_n), \quad M_{en} = M_e(t_n)$$

Как следует из первых трех уравнений (5.2) в момент времени  $t_n$  для определения кинематических параметров ударника  $u_n^{(j)}$  и  $\theta_n$  ( $j = 1, 2$ ) не требуется знание контактных напряжений на этом же шаге. С другой стороны, из двух предпоследних соотношений (2.11) вытекает, что граница области контакта  $b_{jn} = b_j(t_n)$  ( $j = 1, 2$ ) не зависит от вектора скорости центра масс и угловой скорости вращения  $V_c$  и  $\omega$ , а определяется только величинами  $U_c$  и  $\theta$ . Поэтому поставленная контактная задача может быть решена в следующей последовательности.

На первом этапе по известным значениям  $V_{n-1}^{(j)}$  и  $\omega_{n-1}$  из первых трех уравнений (5.2) определяются  $u_n^{(j)}$  и  $\theta_n$  ( $j = 1, 2$ ), которые в свою очередь позволяют найти границу области контакта  $b_{jn}$  из решения следующей системы нелинейных уравнений

$$f(y_{2n}^{(j)}) \cos \theta_n - y_{2n}^{(j)} \sin \theta_n + u_n^{(1)} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (5.3)$$

$$f(y_{2n}^{(j)}) \sin \theta_n + y_{2n}^{(j)} \cos \theta_n + u_n^{(2)} = b_{jn}$$

где  $(b_{jn}, y_{2n}^{(j)})$  — корни системы.

При известной пространственно-временной области контакта  $G_n$ , а соответственно и  $G_{nm}$  для любого четного  $m$ , решается задача об определении контактных напряжений  $\sigma_{nm}$  на  $n$ -шаге. Разностная схема для расчета контактных напряжений с учетом (4.15) имеет вид

$$w_{nm} = h \left( \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=k_{li}}^{k_{2i-1}} (d_{mni}^{(r)} + d_{mni}^{(s)}) \sigma_{ij} + r_{nm} \sigma_{nm} \right) \quad w_{nm} = w(t_n, \xi_m) \quad (5.4)$$

Используя последнее соотношение в (2.11) в качестве неявной функции  $w = w(t, \xi)$ , получим

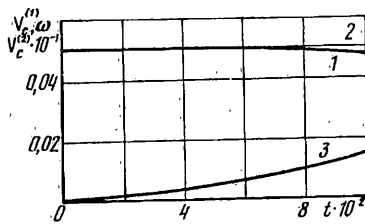
$$\sigma_{nm} = (r_{nm} h)^{-1} \left( w_{nm} - h \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=k_{li}}^{k_{2i-1}} (d_{mni}^{(r)} + d_{mni}^{(s)}) \sigma_{ij} \right)$$

$$w_{nm} = f(y_{2nm}) \cos \theta_n + y_{2nm} \sin \theta_n + u_n^{(1)} \quad (5.5)$$

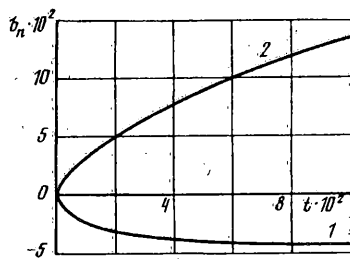
$$\xi_m = -f(y_{2nm}) \sin \theta_n + y_{2nm} \cos \theta_n + u_n^{(2)}$$

И наконец, последние три формулы в (5.2) позволяют определить скоростные характеристики ударника при известных контактных напряжениях  $\sigma_{ij}$ .

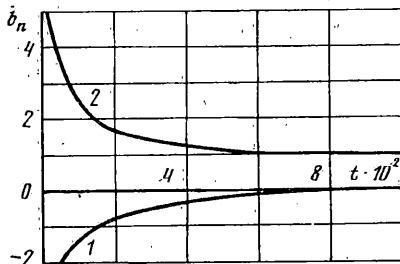
Таким образом, соотношения (5.2) — (5.5) определяют явную разностную схему первого порядка для интегрирования системы функциональных уравнений плоской нестационарной контактной задачи (2.11).



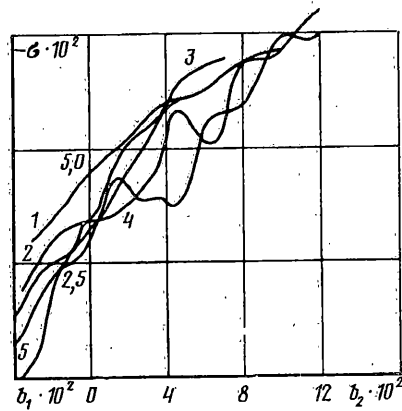
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

6. Пример расчета. Ниже приводятся результаты решения задачи о наклонном ударе эллиптического цилиндра с большой полуосью  $a=1$  по упругому полупространству. Материал полупространства — среда Римана ( $\gamma = 1,73$ ). Образующая ударника задается уравнением

$$y_1 = (1 - y_2^2 / (1 - e^2))^{1/2} \quad (6.1)$$

где  $e$  — эксцентриситет.

Расчеты проводились при следующих начальных значениях кинематических и инерционных параметров ударника  $V_c^{(1)}(0) = 0,05$ ,  $V_c^{(2)}(0) = 0,5$ ,  $\omega(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 45^\circ$ ,  $e = 0,6$ ,  $m = \pi$ ,  $I = 1,61$ . Условие касания цилиндра в начальный момент времени  $\tau = 0$  поверхности полупространства в точке  $O$  имеет вид

$$u_0^{(1)} = -y_{10} \cos \theta_0 + y_{20} \sin \theta_0, \quad u_0^{(2)} = -y_{10} \sin \theta_0 - y_{20} \cos \theta_0$$

$$y_{20} = -(1 - e^2) \operatorname{tg} \theta_0 / (1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 \theta_0)^{1/2} \quad (6.2)$$

$$y_{10} = (1 - y_{20}^2 / (1 - e^2))^{1/2} \quad (-\pi/2 < \theta_0 < \pi/2)$$

В соотношениях (6.2)  $\theta_0$  является параметром, определяющим начальные координаты центра масс ударника  $u_0^{(1)}$  и  $u_0^{(2)}$ . Коэффициенты кубатур  $d_{mnij}^{(s)}$  и  $d_{mnij}^{(s)}$  вычислялись с точностью  $\epsilon = 10^{-3}$ , шаг временной дискретизации  $h = 5 \cdot 10^{-3}$ .

На фиг. 2 представлены зависимости компонент  $V_c^{(1)}$  и  $V_c^{(2)}$  вектора скорости центра масс ударника  $V_c$  и угловой скорости  $\omega$  от безразмерного времени  $\tau$  (кривая 1 соответствует зависимости  $V_c^{(1)}(\tau)$ , кривая 2 —  $V_c^{(2)}(\tau)$ , кривая 3 —  $\omega(\tau)$ ).

На фиг. 3, 4 изображены пространственно-временная область контакта  $D_n$ , а также зависимость скорости расширения границы последней от времени. Номера кривых  $n$  соответствуют  $b_n(t)$  на обоих рисунках.

Распределение контактных напряжений  $\sigma(x, \tau)$  под ударником в различные моменты времени представлено на фиг. 5 (номера кривых соответствуют  $\tau = 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,10$ ).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ). Код проекта 93-013-16508.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Robinson A. R., Thompson J. C.* Transient stresses in an elastic half-space resulting from the frictionless indentation of a rigid wedge-shaped die//*Z. angew. Math. und Mech.* 1974. Bd. 54. № 3. S. 139—144.
2. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Динамические контактные задачи для абсолютно жестких тел и упругого полупространства. Препринт/МАИ.— М., 1989.— 49 с.
3. *Скалиух А. С.* О приближенном решении некоторых интегральных уравнений 1-го рода, возникающих в динамических смешанных задачах теории упругости//*Изв. Сев.-Кавказ. научн. центра высш. шк. Естеств. науки.* 1983. № 4. С. 34—37.
4. *Ткачев Г. В.* К решению одной неустановившейся задачи теории упругости//*Ж. прикл. мех. и техн. физ.* 1988. № 6. С. 144—148.
5. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. М.: Высшая школа, 1976. 272 с.
6. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. 1. М.: Наука, 1972. 468 с.
7. *Слепян Л. И., Яковлев Ю. С.* Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение, 1980. 344 с.
8. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977: 653 с.

Москва

Поступила в редакцию  
14.X.1993