

УДК 539.4

© 1994 г. А. С. ГУСЕВ

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ НАГРУЖЕННОСТИ И ОЦЕНКА РЕСУРСА КОНСТРУКЦИЙ

Проанализированы возможности выявления структуры траекторий случайных процессов нагруженности конструкций, заданных корреляционными функциями или спектральными плотностями. Для процессов сложной структуры предложен метод выявления промежуточных циклов и замены их на эквивалентные по повреждающему действию процессы простой структуры.

Нагруженность многих машин и конструкций описывается случайными процессами сложной структуры, в которых число экстремумов намного превышает число пересечений среднего (нулевого) уровня и которые состоят из наложенных друг на друга циклов различной интенсивности и частоты (фиг. 1). В этом случае возможность расчетного прогнозирования прочностных показателей надежности и ресурса конструкций обусловлена возможностью выявить внутреннюю структуру случайного процесса и заменить исходный процесс сложной структуры на эквивалентный по повреждающему действию расчетный процесс с простой структурой, в котором число экстремумов равно числу пересечений среднего уровня (фиг. 2). Это обстоятельство обусловлено тем, что прочностные характеристики материалов конструкций определяются по результатам стандартизованных испытаний на воздействие циклических нагрузок с заданными амплитудами и средними значениями циклов, тогда как эти понятия для случайных процессов сложной структуры однозначно не определяются [1, 2]. Задача осложняется тем, что для описания нагруженности используются методы статистической динамики, которые позволяют относительно просто вычислять корреляционные функции и спектральные плотности случайных процессов на выходе динамических систем, но не позволяют получать их траектории, по которым можно было бы непосредственно выявить их структуру в виде отдельных циклов, составляющих общий процесс нагружения [3].

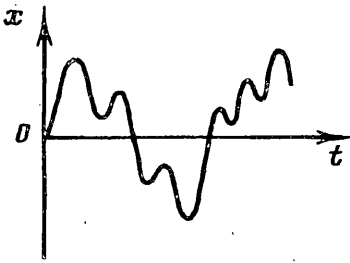
При оценке прочностных показателей надежности в задачу структурного анализа случайных процессов включается определение вероятностных характеристик числа особых точек их траектории (числа пересечений некоторого уровня, числа экстремумов, числа перегибов траектории и т. п.), значений процессов в особых точках и в точке супремума (наибольшего максимума) и так далее. При проведении такого анализа рассмотрим ситуацию, когда нагруженность элемента конструкции описывается гауссовским стационарным процессом $x(t)$ с корреляционной функцией

$$K_x(\tau) = \langle x(t) x(t + \tau) \rangle \quad (1)$$

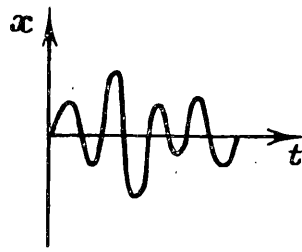
по которой вычисляется взаимная корреляционная функция производных порядка v и l от заданного процесса по формуле:

$$K_x^{(v)l}(\tau) = (-1)^v K_x^{(v+l)}(\tau) \quad (v, l = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

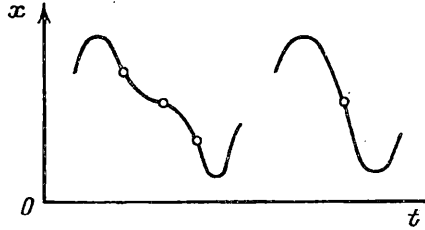
где $\langle \dots \rangle$ — знак вычисления математического ожидания, индексы (v) , (l) и $(v+l)$ указывают на порядок вычисления производных.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Из соотношения (2) при $\tau = 0$ получаем корреляционные моменты взаимного распределения вероятностей для процесса и любого числа его производных, плотность которого обозначается $f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots)$.

Функционал для определения числа особых точек, в которых некоторая n -я по счету производная детерминированного процесса $x(t)$ за время t равна нулю, можно записать в следующем виде:

$$N_{(n)}(t) = \int_0^t |x^{(n+1)}(t)| \delta \{x^{(n)}(t)\} dt \quad (3)$$

где $\delta(\dots)$ — импульсная дельта-функция Дирака, индексы n и $n+1$ сверху указывают на порядок вычисления производных, индекс n снизу указывает на порядок производной, которая равна нулю в рассматриваемой особой точке, $n = 0, 1, 2, \dots$

Из соотношения (3) следует, что среднюю скорость появления особых точек (число таких точек в единицу времени) можно вычислить по формуле

$$\langle N_{(n)} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x^{(n+1)}| f(0, x^{(n+1)}) dx^{(n+1)} \quad (4)$$

где $f(0, x^{(n+1)})$ — совместная плотность распределения вероятностей для n -ой и $(n+1)$ -ой производных при $x^{(n)} = 0$, которая для случая гауссовских стационарных процессов имеет следующую матрицу корреляционных моментов:

$$\|M\| = (-1)^{(2n+1)} \begin{vmatrix} K_x^{(2n)}(0) & K_x^{(2n+1)}(0) \\ K_x^{(2n+1)}(0) & K_x^{(2n+2)}(0) \end{vmatrix} \quad (5)$$

Используя (5) в соотношении (4), получаем

$$\langle N_n \rangle = \frac{1}{\pi} \sqrt{-K_x^{(2n+2)}(0)/K_x^{(2n)}(0)} \quad (6)$$

Соотношение (6) приводит к последовательности чисел $k_1 = \langle N_1 \rangle / \langle N_0 \rangle$, $k_2 = \langle N_2 \rangle / \langle N_1 \rangle$, \dots , $k_n = \langle N_n \rangle / \langle N_{n+1} \rangle$, которая состоит из отношений ожидаемого числа экстремумов к ожидаемому числу пересечений среднего уровня, ожидаемого числа точек перегиба к ожидаемому числу экстремумов и так далее. Эта по-

следовательность чисел характеризует сложность структуры случайного процесса. При этом наибольшую значимость имеет первый параметр сложности структуры k_1 . Следующие за ним числа имеют всё меньшую и меньшую информативность и при $n \rightarrow \infty$ $k_n \rightarrow 1$. Отметим, что выполняются условия: $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$, а равенства достигаются только при $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_n = 1$.

Из условия, что вероятность события обнаружить особую точку в области (dx, dt) равна произведению вероятностей обнаружить эту точку в полосе dx и полосе dt , получаем следующее выражение для плотности распределения вероятностей значений процесса в особых точках:

$$f_{(n)}(x) = \frac{1}{\langle N_n \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(n+1)} f(x, 0, x^{(n+1)}) dx^{(n+1)} \quad (7)$$

где $f(x, 0, x^{(n+1)})$ — совместная плотность распределения вероятностей для процесса $x(t)$, его n -ой и $(n+1)$ -ой производных при $x^{(n)} = 0$, которая для случая гауссовских стационарных процессов имеет следующую матрицу корреляционных моментов:

$$\|M\| = (-1)^{(2n+1)} \begin{vmatrix} K_x(0) & K_x^{(n)}(0) & K_x^{(n+1)}(0) \\ K_x^{(n)}(0) & K_x^{(2n)}(0) & K_x^{(2n+1)}(0) \\ K_x^{(n+1)}(0) & K_x^{(2n+1)}(0) & K_x^{(2n+2)}(0) \end{vmatrix} \quad (8)$$

Из соотношения (7) при $n = 1$ имеем распределение вероятностей для значений процесса в точках экстремумов, при $n = 2$ — распределение вероятностей для значений процесса в точках перегиба траектории, при $n = 1$ и замене верхнего предела интегрирования с бесконечности на ноль — распределение вероятностей для максимумов и т. д. В частности устанавливается, что распределение вероятностей для значений процесса в точках перегиба траектории является гауссовским со средним значением, равным нулю и вторым моментом распределения, равным $K(0)(k_1^2 - 1)/k_1^2$. Это распределение вероятностей зависит только от первого параметра сложности структуры k_1 . Также только от параметра k_1 зависит закон распределения вероятностей для максимумов и минимумов. При этом при $x \rightarrow \infty$ плотность распределения вероятностей для максимумов описывается выражением

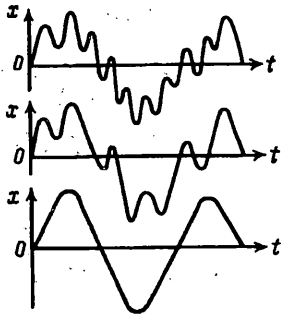
$$f(x) = \frac{x}{k_1} \exp\left(-\frac{x^2}{2K_x(0)}\right) \quad (9)$$

а первые два момента этого распределения определяются по формулам:

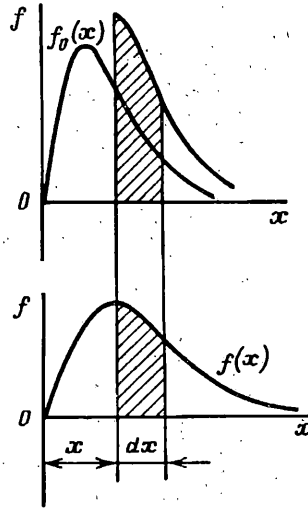
$$\langle x_{\max} \rangle = \frac{1}{k_1} \sqrt{1/2\pi K_x(0)}, \quad \langle x_{\max}^2 \rangle = \frac{K_x(0)}{k_1^2} (k_1^2 + 1) \quad (10)$$

Аналогичные подходы могут быть использованы для получения совместного распределения вероятностей для соседних экстремумов. Такая информация необходима в частности для определения закона распределения вероятностей для амплитуд циклов, определяемых как половина приращения процесса между двумя соседними экстремумами, и для средних значений циклов, определяемых как полусумма значений процесса в двух соседних экстремумах. Решение таких задач связано с большими вычислительными трудностями. Поэтому определенное значение имеют приближенные методы расчета, основанные на использовании некоторых гипотез о структуре случайных процессов, сформулированных по имеющимся экспериментальным данным о реальных траекториях случайных процессов нагруженности конструкций.

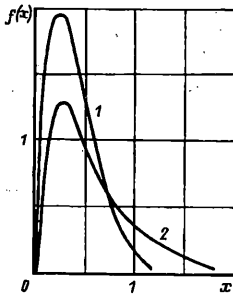
Отметим в связи с этим возможность приближенного определения распределения вероятностей для амплитуд циклов x_m . При этом принимается, что среднее значение цикла нагружения x_m примерно равно значению процесса



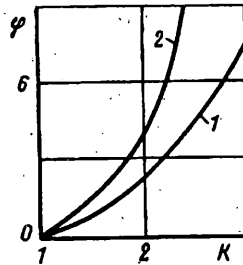
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

x_f в точке перегиба траектории. Тогда из приближенных равенств $x_{\max} = x_a + x_n$ и $\langle x_a x_f \rangle = 0$, которые становятся точными при замене x_f на x_m , получаем следующие выражения для определения первых двух моментов распределения вероятностей для амплитуд циклов:

$$\langle x_a \rangle = \langle x_{\max} \rangle = (1/2\pi K_x(0))^{1/2} / k_1, \quad \langle x_a^2 \rangle = 2K_x(0) / k_1^2$$

Этим двум моментам соответствует закон Релея с плотностью вероятностей

$$f_a(x) = (k_1^2 x / K_x(0)) \exp(1/2 k_1^2 x^2 / K_x(0)) \quad (11)$$

Из (11) следует, что распределение вероятностей для амплитуд циклов также, как и для значений процесса в точках перегиба траектории и точках максимумов, зависит только от первого параметра сложности структуры k_1 . Однако при получении этого результата использовалась гипотеза о том, что число точек перегиба совпадает с числом экстремумов, тогда как в случайных процессах число точек перегиба траектории может оказаться больше числа экстремумов, так как второй параметр сложности структуры $k_2 \geq 1$. При этом на траектории процесса между двумя соседними экстремумами может быть обнаружено любое нечетное число точек перегиба. Для примера на фиг. 3 показано два случая, когда на траектории между двумя соседними экстремумами имеется одна и три точки перегиба. Из геометрических соотношений следует, что «дополнительные»

точки перегиба не нарушают равенства $x_j = x_m$ в среднем, но придают большее рассеивание для значений процесса в точках перегиба по сравнению с рассеиванием средних значений циклов. Т. е. оказывается, что второй момент распределения вероятностей для значений процесса в точках перегиба больше второго момента распределения вероятностей для средних значений циклов. Отсюда следует, что второй момент распределения вероятностей для амплитуд зависит не только от параметра k_1 , но и от параметра k_2 и будет большим, чем это следует из выражений (10). Уточненное соотношение для определения второго момента распределения вероятностей для амплитуд циклов можно, например, принять в виде

$$\langle x_a^2 \rangle = 2K_x(0)k_2^2/k_1^2 \quad (12)$$

Таким образом, для получения более точных выражений для характеристик распределения вероятностей амплитуд следует учитывать параметры сложности структуры более высокого порядка. Тогда плотность распределения вероятностей для амплитуд циклов выражается как $f_a(x, k_1, \dots, k_n)$. Покажем для этого случая возможность выявления всех промежуточных циклов, на которые можно разложить заданный процесс нагружения сложной структуры. Для этого используется процедура постепенного исключения из заданного процесса промежуточных циклов со всё большими значениями амплитуд [2]. При этом исходный процесс сложной структуры постепенно переходит в процесс с простой структурой (фиг. 4).

Таким же процессом с простой структурой будет и формируемый из выделенных циклов эквивалентный процесс нагружения. Искомую плотность распределения вероятностей для амплитуд в этом процессе обозначим через $f(x)$ и рассмотрим момент исключения промежуточных циклов, когда из заданного процесса исключены циклы с амплитудами до некоторого значения x включительно (фиг. 5). Пусть при этом параметры сложности структуры процесса приняли некоторые новые значения, зависящие от уровня x : $k_1(x), k_2(x), \dots, k_n(x)$. Поскольку в принятой процедуре число исключаемых из заданного процесса циклов равно числу включаемых в формируемый процесс циклов, то имеем следующие равенства:

$$-dN_1(x) = N_1(x) f_a[x, k_1(x), k_2(x), \dots, k_n(x)] dx = N_1(0) f(x) dx \quad (13)$$

где $N_1(0)$ — начальное значение числа экстремумов. Из (13) получаем выражения

$$f(x) = (N_1(x)/N_1(0)) f_a[x, k_1(x), k_2(x), \dots, k_n(x)] \quad (14)$$

$$N_1'(x) = -N_1(x) f_a[x, k_1(x), k_2(x), \dots, k_n(x)] \quad (15)$$

Соотношение (14) определяет искомую плотность распределения вероятностей для амплитуд по $(n+1)$ неизвестной $N_1(x), k_1(x) = N_1(x)/N_0(x), \dots, k_n(x) = N_n(x)/N_{n-1}(x)$. Для их определения к уравнению (15) добавим ещё n уравнений, выражающих гипотезу о том, что исключение экстремумов происходит в $k_1(x)$ раз более интенсивно, чем исключение нулей, а исключение точек перегиба происходит в $k_2(x)$ раз более интенсивно, чем исключение экстремумов и так далее

$$N_i'(x)/N_i(x) = k_i N_{i-1}'(x)/N_{i-1}(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

Таким образом получаем полную систему уравнений для решения поставленной задачи.

Реализацию описанной выше процедуры рассмотрим для случая, когда распределение вероятностей для амплитуд циклов в исходном процессе описывается соотношением (11). Для этого случая при $K_x(0) = 1$ соотношения (14), (15) и (16) принимают вид

$$f(x) = xN_1(x)k^2(x)/N_1(0) \quad (17)$$

$$N_1'(x) = -xN_1^3(x)/N_0^2(x) \quad (18)$$

$$N_1'(x)/N_1(x) = k(x)N_0'(x)/N_0(x) \quad (19)$$

Здесь и ниже индекс 1 для функции $k_1(x)$ опущен. Из (18) и (19) следуют равенства

$$N_1'(x)/N_1(x) = -xk^2(x) \quad (20)$$

$$N_0'(x)/N_0(x) = -xk(x) \quad (21)$$

Отсюда находим

$$N_1(x) = N_1(0) \exp \left[- \int_0^x xk^2(x) dx \right] \quad (22)$$

$$N_0(x) = N_0(0) \exp \left[- \int_0^x xk(x) dx \right] \quad (23)$$

где $N_1(0)$, $N_0(0)$ — начальные значения числа экстремумов и нулей.

Исключив из (22) и (23) функции $N_1(x)$ и $N_0(x)$, получаем равенство

$$k(x) \exp \left[- \int_0^x xk(x) dx \right] = k_0 \exp \left[- \int_0^x xk^2(x) dx \right] \quad (24)$$

где k_0 — начальное значение параметра сложности структуры.

Дифференцируя (24), получаем следующее дифференциальное уравнение для определения функции $k(x)$:

$$k'(x) + xk^2(x) [k(x) - 1] = 0 \quad (25)$$

Из (25) следует равенство

$$dk/[k^2(k-1)] = -x dx \quad (26)$$

Отсюда получаем алгебраическое уравнение для определения функции $k(x)$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k_0} + \ln \frac{k_0(k-1)}{k(k_0-1)} = -\frac{x^2}{2} \quad (27)$$

Подставив (26) в (22) и (23), находим

$$N_0(x) = N_0(0) k_0 [k(x) - 1]/(k(x)(k_0 - 1)) \quad (28)$$

$$N_1(x) = N_1(0) [k(x) - 1]/(k_0 - 1) \quad (29)$$

Подставив (29) в (17), находим плотность распределения вероятностей для амплитуд полных циклов

$$f(x) = xk^2(x) [k(x) - 1]/(k_0 - 1) \quad (30)$$

При $x \rightarrow \infty$:

$$k(x) \rightarrow 1, \quad N_0(x) \rightarrow 0, \quad N_1(x) \rightarrow 0$$

$$f(x) \rightarrow (x/k_0) \exp(-x^2/2) \quad (31)$$

Из (9) и (31) следует, что при больших значениях x распределение вероятностей для максимумов и амплитуд полных циклов совпадают. Различие в распределениях вероятностей для амплитуд ($k=3$) в исходном процессе и для амплитуд полных циклов показано на фиг. 6: 1 — исходный процесс, 2 — формируемый процесс. Это различие предопределяет и различие в оценках усталостной долговечности

конструкций, определяемой в соответствии с линейной гипотезой накопления усталостных повреждений как

$$N_* = \left(\int_0^{\infty} \frac{f(x) dx}{N(x)} \right)^{-1}$$

где N_* — оценка ожидаемого числа циклов нагружения до разрушения конструкции, $N(x)$ — число циклов до разрушения при гармоническом нагружении с уровнем амплитуд напряжений x .

Сопоставление значений долговечности, получаемых с использованием распределений (11) и (30), можно сделать с помощью соотношения $N_{*1} = N_{*2} (1 + \varphi)$, где N_{*1} , N_{*2} — оценки долговечности с использованием формул (11) и (30), соответственно, а коэффициент φ зависит от параметра сложности структуры k . Две зависимости $\varphi(k)$ при степенном уравнении кривой усталости с параметром $m = 3$ и различных значениях предела выносливости x_{-1} приведены на фиг. 7 (кривая 1 соответствует $x_{-1} = (K(0))^{1/2}$, а 2 — $x_{-1} = 2(K(0))^{1/2}$).

Проведенный анализ показал, что исследование динамических систем методами статистической динамики может быть завершено выявлением структуры случайных процессов и получением оценок ожидаемой долговечности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В. В. Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 447 с.
2. Гусев А. С. Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках. М.: Машиностроение, 1989. 141 с.
3. Светлицкий В. А. Случайные колебания механических систем. М.: Машиностроение, 1991. 316 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.IX.1993