

УДК 624.07:534.1

© 1994 г. Е. Б. КУЗНЕЦОВ, В. И. ШАЛАШИЛИН

## ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДА ДРОБИ ПО СТВОЛУ

Одной из важнейших характеристик стрелкового оружия при стрельбе дробью является кучность выстрела. Рассеивание дроби при выстреле определяется той деформацией, которую приобрела дробь при движении по стволу ружья. Так как деформированные дробины обладают худшими аэродинамическими характеристиками, то это приводит к увеличению рассеивания. Очевидно, чем больше деформированной дроби имеется на срезе ствола, тем кучность выстрела будет хуже.

Заметим, что анализ движения заряда по стволу позволяет исследовать и другие проблемы, от которых зависит эффективность стрельбы.

**1. Постановка задачи.** Схема дробного заряда показана на фиг. 1. Он состоит из пыжа (1—2—3), который будем моделировать при помощи двух жестких тел 1, 2 с массами  $M_1$ ,  $M_2$ , соответственно, пружины 3, имеющей, вообще говоря, нелинейную характеристику, и снаряда дроби — 4. Полагаем, что ствол 5 является жестким телом вращения с отверстием переменного сечения.

Снаряд дроби будем рассматривать как сплошное тело вращения, претерпевающее осесимметричные деформации. Введем неподвижную систему координат  $\psi$ ,  $r$ . Ось  $\psi$  направим вдоль оси ствола, а ось  $r$  — по нормали к ней. Координату левого конца снаряда обозначим через  $\xi$ . Введем также связанную со снарядом систему координат  $x$ ,  $r$ , где  $x$  — координата, отсчитываемая от левого конца снаряда.

Так как снаряд дроби состоит из отдельных слабосвязанных дробинок, то он мало сопротивляется сдвиговым деформациям. Это позволяет предположить, что касательные напряжения в нём малы и ими можно пренебречь. Поэтому будем считать, что материал снаряда дроби ведет себя как жидкость.

Пусть  $\sigma_x$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  — продольные, радиальные и окружные напряжения в теле снаряда. При осесимметричной деформации уравнения равновесия элемента снаряда получаем из известных уравнений статики [1] при равных нулю касательных напряжениях.

$$\partial \sigma_x / \partial x + q_x = 0 \quad (1.1)$$

$$\partial \sigma_r / \partial r + (\sigma_r - \sigma_\theta) / r + q_r = 0$$

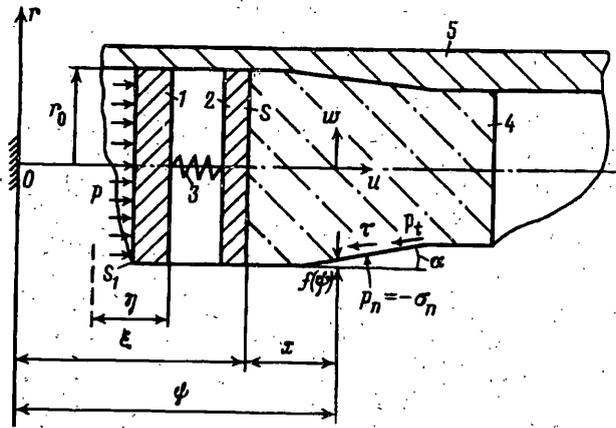
где  $q_x$ ,  $q_r$  — интенсивности продольных и радиальных объемных сил в элементе.

Обозначим через  $u$ ,  $w$  продольные и радиальные смещения точек снаряда (фиг. 1), а через  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_r$ ,  $\epsilon_\theta$  — продольные, радиальные и кольцевые деформации. Тогда имеют место следующие геометрические соотношения:

$$\epsilon_x = \partial u / \partial x, \quad \epsilon_r = \partial w / \partial r, \quad \epsilon_\theta = w / r$$

$$\vartheta = \epsilon_x + \epsilon_r + \epsilon_\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \quad (1.2)$$

где  $\vartheta$  — объемная деформация.



Фиг. 1

Из предположения о поведении материала снаряда как жидкости следует равенство по всем направлениям напряжений в точке

$$\sigma_x = \sigma_r = \sigma_\theta \quad (1.3)$$

С учетом этого уравнения (1.1) упрощаются

$$\partial \sigma_x / \partial x + q_x = 0 \quad (1.4)$$

$$\partial \sigma_r / \partial r + q_r = 0$$

Уравнения статики (1.4) и геометрические соотношения (1.2) должны быть замкнуты физическими соотношениями, связывающими напряжения с деформациями.

Рассмотрим нагрузки, действующие на элемент. Внутри заряда радиальные объемные силы  $q_r$  возникают за счет действия сил инерции радиального движения  $q_r = -\rho \partial^2 w / \partial t^2$ , где  $\rho$  — плотность материала снаряда дробы. Поскольку радиальные смещения заряда дробы  $w$  и их изменения малы (они заметны только в сужающихся и расширяющихся частях ствола), то их силами инерции можно пренебречь, особенно если иметь в виду, что продольные инерционные силы  $-\rho \partial^2 u / \partial t^2$  значительно больше радиальных. Таким образом, полагаем, что  $q_r = 0$ . Тогда второе уравнение (1.4) принимает вид  $\partial \sigma_r / \partial r = 0$ , т. е. напряжение  $\sigma_r$  не зависит от радиуса, а значит является функцией только координаты  $x$  и времени  $t$ :

$$\sigma_r = \sigma_r(x, t) \quad (1.5)$$

Учитывая, что должны выполняться равенства (1.3), получаем также

$$\sigma_x = \sigma_x(x, t) \quad (1.6)$$

Соотношения (1.5), (1.6) равносильны введению для снаряда дробы гипотезы плоских сечений. Интересно отметить, что закон плоских сечений в данном случае является следствием предположения об отсутствии радиальных сил инерции.

Продольные нагрузки на снаряд складываются из сил инерции продольного движения  $q_1$  и сил взаимодействия снаряда со стволом  $q_2$ .

Инерциальные силы продольного движения образуются за счет ускорений переносного движения  $d^2\xi/dt^2$  и ускорений относительного, деформационного движения  $\partial^2 u / \partial t^2$ :

$$q_1 = -\rho (d^2\xi/dt^2 + \partial^2 u/\partial t^2) \quad (1.7)$$

Взаимодействие снаряда со стволом складывается из сил нормального давления  $p_n$ , которые равны напряжениям в зоне контакта  $p_n = -\sigma_n$  (см. фиг. 1) и сил трения  $p_t$ .

Продольную составляющую  $\tau$  поверхностных сил взаимодействия можно вычислить по формуле

$$\tau = p_n \sin \alpha + p_t \cos \alpha = -(\sigma_x \sin \alpha - p_t \cos \alpha) \quad (1.8)$$

В дальнейшем примем для описания сил трения закон Кулона, тогда  $p_t = f_t \sigma_x$ , где  $f_t$  — коэффициент трения, и равенство (1.8) примет вид  $\tau = \sigma_x (f_t \cos \alpha - \sin \alpha)$ .

Учитывая закон плоских сечений, которому подчиняется деформированное состояние снаряда дроби, поверхностную силу  $\tau$  заменим равномерно распределенной по поперечному сечению силой  $q_2$ . Из условия статической эквивалентности  $\tau$  и  $q_2$  имеем  $2\pi r_0 \tau = \pi r_0^2 q_2$ , откуда

$$q_2 = \varphi \sigma_x, \quad \varphi = 2 (f_t \cos \alpha - \sin \alpha) / r_0 \quad (1.9)$$

Таким образом, первое из уравнений (1.4) примет вид  $\partial \sigma_x / \partial x + q_1 + q_2 = 0$ , а с учетом соотношений (1.7), (1.9) его можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \varphi \sigma_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} \quad (1.10)$$

Как было показано выше, пренебрежение силами инерции радиального движения приводит к заключению о том, что напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_r$  являются постоянными вдоль радиуса. Поскольку эти напряжения определяют объемную деформацию  $\vartheta$ , см. формулу (1.2), то приходим к выводу: объемная деформация также постоянна по радиусу, т. е.

$$\partial \vartheta / \partial r = 0 \quad (1.11)$$

Отсюда с учетом выражения для  $\vartheta$  (1.2) получаем соотношение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial x} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \right) = 0$$

которое можно упростить, так как согласно закону плоских сечений  $\partial u / \partial r = 0$ . Поэтому равенство (1.11) запишется в виде  $\partial / \partial r (\partial w / \partial r + w / r) = 0$  или, учитывая, что имеет место тождество  $\partial w / \partial r + w / r = (1/r) \partial (wr) / \partial r$ , окончательно получаем

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (wr)}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.12)$$

Теперь не составляет труда записать общий интеграл уравнения (1.12)  $w = C(x)r + C_1(x)/r$ , где  $C(x)$ ,  $C_1(x)$  — произвольные функции, зависящие от координаты  $x$ . Так как на оси снаряда, т. е. при  $r=0$  перемещение  $w=0$ , то в силу ограниченности решения следует положить функцию  $C_1(x) = 0$ , поэтому

$$w = C(x)r \quad (1.13)$$

Таким образом, радиальные перемещения снаряда пропорциональны радиусу. Если боковая поверхность снаряда прилегает к поверхности ствола, то функция  $C(x)$  будет определяться формой внутренней поверхности ствола, которая, как видно из фиг. 1, задается функцией  $f(\psi)$ , где  $\psi$  — продольная координата в неподвижной системе координат. Функция  $f(\psi)$  имеет вид  $f(\psi) = -[r_0 -$

$-r(\psi)]$ , где  $r_0$  — радиус начального сечения ствола (фиг. 1),  $r(\psi)$  — функция, описывающая изменение радиуса ствола вдоль его длины. В то же время для сечения  $x$  снаряда, показанного на фиг. 1, смещение на его поверхности как раз равно  $f(\psi)$ . С точностью до малых высшего порядка можно записать  $C(x) = w(r_0)/r_0 = f(\psi)/r_0 = f(x + \xi)/r_0$ ,

Поскольку  $\xi = \xi(t)$ , то

$$C(x) = C(x, t) = f[x + \xi(t)]/r_0 \quad (1.14)$$

и, принимая во внимание (1.13), объемную деформацию  $\vartheta$  (1.2) теперь можно представить в следующем виде:

$$\vartheta = \partial u / \partial x + 2C(x, t) = \partial u / \partial x + 2f(x + \xi)/r_0 \quad (1.15)$$

где функция  $C(x, t)$  определяется согласно формуле (1.14).

Для того, чтобы быть уверенными в результатах исследований, перед тем как изучить общий случай, рассмотрим в начале поведение упругого снаряда. Для упругого материала закон Гука в рассматриваемом случае имеет вид

$$\sigma_x = E\vartheta \quad (1.16)$$

После подстановки этого соотношения в уравнение (1.10) с учетом выражения (1.15) получаем уравнение, описывающее движение снаряда как упругого стержня

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\rho \xi - \frac{2E}{r_0} \left( \varphi f - \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (1.17)$$

$$(\xi = d^2 \xi / dt^2)$$

Уравнение движения пыжа, который моделируется жесткими телами 1 и 2, соединенными пружиной 3 (фиг. 1) будет описываться следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$M_1 \frac{d^2 \xi}{dt^2} + d^2 \eta / dt^2 = S_1 p - F(\eta) \quad (1.18)$$

$$M_2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} = F(\eta) + ES \left[ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \frac{2}{r_0} f(\xi) \right] = F(\eta) + S \sigma_x |_{x=0}$$

Здесь  $\eta$  — координата, определяющая перемещение тела 1, отсчитываемая в подвижной системе координат от недеформированного положения пыжа;  $S_1$  — площадь поверхности пыжа, на которую действует давление пороховых газов  $p$ ;  $F(\eta)$  — нелинейная функция описывающая деформационную характеристику пыжа, равная  $k_1 \eta$ , где  $k_1$  — постоянная, для упругого случая;  $S$  — площадь поверхности контакта дробового снаряда с пыжом. Заметим, что второе слагаемое в правой части второго уравнения (1.18) описывает контактное усилие, возникающее между дробью и пыжом.

Уравнения (1.17), (1.18) составляют полную систему уравнений движения, описывающих поведение заряда, состоящего из пыжа и снаряда упругой дроби. Эту систему уравнений следует интегрировать при нулевых начальных условиях, т. е. при  $t = 0$

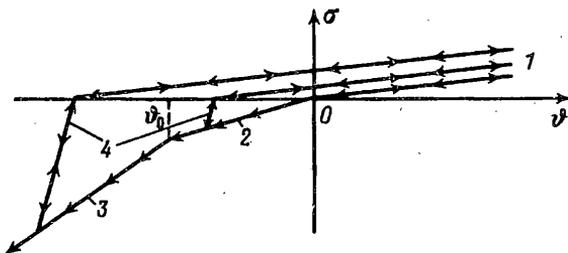
$$\xi = \frac{d\xi}{dt} = \eta = \frac{d\eta}{dt} = u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (1.19)$$

Решение же уравнения (1.17) должно также удовлетворять граничным условиям, которые следует взять в виде

$$u(0, t) = 0, \quad \sigma_x |_{x=l} = \begin{cases} -k [u(l, t) + \xi], & \Delta < u_0 \\ 0, & \Delta \geq u_0 \end{cases} \quad (1.20)$$

$$\Delta = u(l, t) + \xi$$

где  $l$  — первоначальная длина дробового снаряда. Первое условие отражает тот факт, что в подвижной системе координат левый конец снаряда неподвижен.



Фиг. 2

Второе условие (1.20) учитывает, что при начале движения заряда его правому концу приходится преодолевать завальцовку гильзы, которая рассматривается как упругая пружина с жесткостью  $k$ , причем эта пружина работает только на участке ствола длиной  $u_0$ . Учитывая представления (1.16), (1.15), граничные условия (1.20) удобнее записать в виде

$$u(0, t) = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \beta(u + \xi) \right]_{x=l} = -\frac{2}{r_0} f(\xi + l) \quad (1.21)$$

$$\beta = k/E \quad (\Delta < u_0), \quad \beta = 0 \quad (\Delta \geq u_0)$$

Таким образом, в данном случае проблема заключается в интегрировании системы уравнений (1.17), (1.18) с начальными условиями (1.19) и граничными (1.20) или (1.21).

Теперь может быть сделан следующий шаг в уточнении модели заряда, состоящий в учете неупругих деформаций снаряда дробы. В экспериментах установлена связь между напряжениями и деформациями снаряда дробы, которая с достаточной точностью может быть аппроксимирована кусочнолинейными зависимостями, показанными на фиг. 2, где для упрощения расчета предполагается, что появление растягивающих напряжений в снаряде дробы возможно при  $\vartheta > 0$ , но деформации при этом считаются упругими с очень малым модулем упругости  $E_1$ , см. прямые, обозначенные цифрой 1. Сжатие заряда дробы от недеформированного состояния до некоторого значения объемной деформации  $\vartheta = \vartheta_0$ , (отрезок 2) описывается законом Гука с модулем упругости  $E_2$ , а при  $\vartheta < \vartheta_0$  (прямая 3) с модулем  $E_3$ . Разгрузка материала (отрезки 4) характеризуется модулем упругости  $E_4$ . Отметим, что в случае появления остаточных деформаций, процесс нагружения от уровня  $\sigma_x = 0$  следует вначале по отрезкам 4, а затем по 2 или 3, см. фиг. 2.

Очевидно что в данном случае связь между напряжениями и деформациями будет описываться более сложными, чем (1.16) линейными зависимостями, содержащими в правых частях свободные члены, алгоритм определения которых непрост.

В этом случае поведение неупругого снаряда кажется более удобным описывать следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \varphi \sigma_x \right) - \frac{d^2 \xi}{dt^2} \quad (1.22)$$

$$\sigma_x = \sigma_x(\vartheta),$$

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{r_0} f(x + \xi)$$

Здесь первое уравнение — это иначе записанное уравнение (1.10); третье уравнение — это уравнение (1.15); второе равенство определяет связь между напряжением  $\sigma_x$  и объемной деформацией, вид которой приводится на фиг. 2 и

которую можно алгоритмизировать, если известна остаточная деформация  $\vartheta_m$  в каждой точке снаряда дробы и знак скорости изменения объемной деформации.

Таким образом, задача исследования движения заряда с неупругим снарядом дробы состоит в интегрировании систем уравнений (1.18), (1.22) с начальными условиями (1.19), которые следует дополнить равенством  $\sigma_x = 0$ , и условиями (1.20). Заметим также, что второе уравнение системы (1.18) в данном случае следует взять в виде

$$M_2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} = F(\eta) + S \sigma_x |_{x=0}$$

где  $\sigma_x |_{x=0}$  — напряжение в сечении контакта дробового снаряда и пыжа.

Для того, чтобы быть уверенными в правильной работе программы, необходимо иметь тестовый пример, с которым было бы можно сравнить полученное численное решение. В качестве такого примера можно использовать аналитическое решение задачи, которое может быть получено при некоторых допущениях.

2. Аналитическое решение задачи. В математическую модель механической системы, предложенную в предыдущем пункте, введем следующие допущения:

а) полагаем, что параметр  $\varphi$ , вычисляемый по формуле (1.9) изменяется незначительно, так что можно считать, что

$$\varphi = \varphi_0 = 2(f_m \cos \alpha - \sin \alpha)/r_0 = \text{const} \quad (2.1)$$

б) граничные условия на правом конце снаряда дробы примем в виде

$$\partial u / \partial x |_{x=l} = 0 \quad (2.2)$$

в) считаем, что тело массой  $M_2$  (см. фиг. 1) движется совместно с зарядом дробы массой  $M_3$  как одно тело массой  $M = M_2 + M_3$ ;

д) давление пороховых газов  $p$  есть функция только времени  $t$ , т. е.  $p = p(t)$ .

Первое допущение выполняется почти всюду в стволе в силу его формы.

Второе условие будет вносить погрешность в модель только в начальный момент времени пока не нарушится завальцовка патрона.

Третье допущение учитывается только при исследовании движения сосредоточенного элемента заряда массой  $M$ .

Четвертое допущение выполняется, если рассматривать задачу как несвязанную.

Из сказанного следует, что введенные допущения не будут существенными для описываемого процесса.

В такой постановке задача для упругого снаряда дробы сведётся к интегрированию следующей системы уравнений:

$$M_1 (\ddot{\xi} + \ddot{\eta}) = S_1 p(t) - k_1 \eta \quad (2.3)$$

$$M \ddot{\xi} = k_1 \eta \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \Phi(x, t) \quad (2.5)$$

$$a_1^2 = E/\rho, \quad a_2^2 = a_1^2 \varphi_0$$

$$\Phi(x, t) = -\ddot{\xi} - 2E [\varphi f(\xi + x) - f'(\xi + x)] / (\rho r_0)$$

где точка обозначает производную по времени  $t$ , а остальные обозначения описаны ранее.

Заметим, что уравнения (2.3)—(2.5) вытекают из уравнений (1.17), (1.18).

Вышеописанную систему уравнений следует решать при начальных условиях (1.19) и граничных условиях

$$u(0, t) = \partial u(l, t) / \partial x = 0 \quad (2.6)$$

При сделанных допущениях система (2.3)—(2.5) оказывается не связанной, в том смысле, что решение уравнений (2.3), (2.4) не зависит от решения (2.5), поэтому решение исследуемой системы начнем с уравнений (2.3), (2.4). Исключая из этих уравнений неизвестную функцию  $\xi$ , приходим к уравнению относительно функции  $\eta$ :

$$\ddot{\eta} + a^2 \eta = P(t) \quad (2.7)$$

$$a^2 = k_1 \frac{M_1 + M}{MM_1}, \quad P(t) = \frac{S_1}{M_1} p(t)$$

Однородное уравнение, соответствующее (2.7), имеет решение  $\eta(t) = C_1 \cos(at) + C_2 \sin(at)$ . Для получения решения неоднородного уравнения (2.7) используем метод вариации произвольных постоянных. Тогда с учетом начальных условий (1.19) приходим к решению

$$\eta(t) = \frac{1}{a} \left[ \sin(at) \int_0^t P(\tau) \cos(a\tau) d\tau - \cos(at) \int_0^t P(\tau) \sin(a\tau) d\tau \right]$$

или окончательно

$$\eta(t) = \frac{1}{a} \int_0^t P(\tau) \sin[a(t - \tau)] d\tau$$

С учетом (2.4) получаем, что

$$\xi = \frac{k_1}{aM} \int_0^t P(\tau) \sin[a(t - \tau)] d\tau$$

или, принимая во внимание нулевые начальные условия (1.19)

$$\xi(t) = \frac{k_1}{aM} \int_0^t \int_0^t \int_0^t P(\tau) \sin[a(t - \tau)] d\tau dt dt \quad (2.8)$$

Тогда выражение для  $\Phi(x, t)$  примет вид

$$\Phi(x, t) = -\frac{k_1}{aM} \int_0^t P(\tau) \sin[a(t - \tau)] d\tau - \frac{2E}{\rho r_0} [\varphi(\xi + x) - f'(\xi + x)] \quad (2.9)$$

где  $\varphi, f, \xi$  — известные функции, причем функция  $\xi(t)$  определяется по формуле (2.8).

Перейдем теперь к решению уравнения (2.5). Вначале рассмотрим решение соответствующего однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.10)$$

которое будем отыскивать при помощи метода разделения переменных Фурье, т. е. представим функцию  $u = u(x, t)$  в виде

$$u(x, t) = X(x) T(t) \quad (2.11)$$

Тогда уравнение (2.10) можно преобразовать к виду  $T''/(a_1^2 T) = (X'' - \varphi_0 X')/X = -\omega^2$ , где  $\omega^2$  — некоторая положительная константа, и проблема сводится к решению уравнений

$$X'' - \varphi_0 X' + \omega^2 X = 0 \quad (2.12)$$

$$T'' + a_1^2 \omega^2 T = 0 \quad (2.13)$$

Причем решение уравнения (2.12) должно удовлетворять крайним условиям

$$X(0) = X'(l) = 0 \quad (2.14)$$

Таким образом, приходим к задаче на собственные значения (2.12), (2.14).  
Общее решение уравнения (2.12) имеет вид

$$X(x) = [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] \exp(\varphi_0 x/2)$$

$$\beta = (4\omega^2 - \varphi_0^2)^{1/2}/2$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.14) получаем, что собственные значения задачи  $\mu_n = \beta_n l$  должны быть корнями уравнения

$$\operatorname{tg} \mu_n = -2\mu_n / (\varphi_0 l) \quad (2.15)$$

Собственному значению  $\mu_n$  будет соответствовать собственная функция

$$X_n(x) = \exp(\varphi_0 x/2) \sin(\mu_n x/l) \quad (2.16)$$

Учитывая, что уравнение (2.13) имеет общее решение вида

$$T(t) = A_n \cos(a_1 \omega_n t) + B_n \sin(a_1 \omega_n t), \quad \omega_n = (4\beta_n^2 + \varphi_0^2)^{1/2}/2$$

получаем, согласно (2.11), частное решение уравнения (2.10) в виде

$$u_n(x, t) = [A_n \cos(v_n t) + B_n \sin(v_n t)] \exp(\varphi_0 x/2) \sin(\mu_n x/l)$$

$$v_n = a_1 (4\mu_n^2/l^2 + \varphi_0^2)^{1/2}/2$$

В силу линейности задачи (2.10), её общее решение можно представить как

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(v_n t) + B_n \sin(v_n t)] \exp(\varphi_0 x/2) \sin(\mu_n x/l) \quad (2.17)$$

Решение неоднородного уравнения (2.5) согласно [2] можно записать в форме

$$u(x, t) = \int_0^t w[x, t - \tau, \Phi(x, \tau)] d\tau \quad (2.18)$$

где  $w(x, t, \Phi)$  есть решение однородного уравнения (2.10) с начальными условиями

$$w|_{t=0} = 0, \quad \partial w / \partial t|_{t=0} = \Phi(x) \quad (2.19)$$

Удовлетворяя в выражении (2.17) условиям (2.19), получим, что

$$w(x, t, \Phi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(v_n t) \exp(\varphi_0 x/2) \sin(\mu_n x/l) \quad (2.20)$$

причем коэффициенты  $B_n$  должны удовлетворять условию разложимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n v_n \exp(\varphi_0 x/2) \sin(\mu_n x/l) = \Phi(x) \quad (2.21)$$

Можно показать, что если уравнение (2.12) умножить на  $\exp(-\varphi_0 x)$ , то получится самосопряженный дифференциальный оператор, поэтому собственные функции  $X_n(x)$  (2.16) будут ортогональны на отрезке  $[0, l]$  с весом  $\exp(-\varphi_0 x)$ , и в разложении (2.21) коэффициенты  $B_n$  будут определяться по формулам

$$B_n = \int_0^l \Phi(x) \exp(-\varphi_0 x/2) \sin(\mu_n x/l) dx / (v_n \int_0^l \sin^2(\mu_n x/l) dx)$$

или

$$B_n = \frac{1}{\Omega_n} \int_0^l \Phi(x) \exp(-\varphi_0 x/2) \sin(\mu_n x/l) dx$$

$$\Omega_n = \frac{v_n l \varphi_0^2 l^2 + 2\varphi_0 l + 4\mu_n^2}{2(4\mu_n^2 + \varphi_0^2 l^2)}$$

Поэтому согласно формуле (2.20) выражение для  $w(x, t, \Phi)$  примет вид

$$w(x, t, \Phi) = \exp\left(\varphi_0 \frac{x}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Omega_n} \left[ \int_0^l \Phi(x) \exp\left(-\varphi_0 \frac{x}{2}\right) \sin\left(\mu_n \frac{x}{l}\right) dx \right] \times \\ \times \sin(v_n t) \sin\left(\mu_n \frac{x}{l}\right)$$

тогда формула (2.18) позволяет получить решение исходной задачи для неоднородного уравнения (2.5):

$$u(x, t) = \exp\left(\varphi_0 \frac{x}{2}\right) \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Omega_n} \left[ \int_0^l \Phi(\xi, \tau) \exp\left(-\varphi_0 \frac{\xi}{2}\right) \sin\left(\mu_n \frac{\xi}{l}\right) d\xi \right] \times \\ \times \sin[v_n(t - \tau)] \sin\left(\mu_n \frac{x}{l}\right) d\tau \quad (2.22)$$

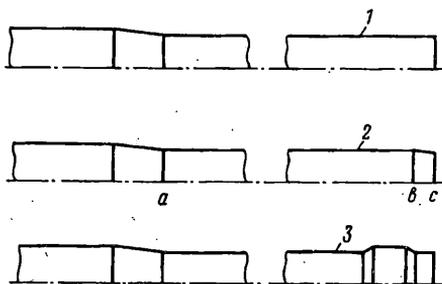
Если в этом выражении функцию  $\Phi(x, t)$  определить по формуле (2.9), то получим решение поставленной задачи (2.3)—(2.5).

**3. Численное решение и результаты.** Для решения проблемы, сформулированной в первом пункте, была написана на алгоритмическом языке ФОРТРАН программа, предназначенная для использования на персональных компьютерах. Для решения уравнений (1.17), (1.22) использовался метод прямых по координате  $x$ . В этом случае вся проблема сводится к интегрированию задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. К этой системе уравнений применялось преобразование, предложенное в [3], и полученная система дифференциальных уравнений интегрировалась при помощи метода прогноза и коррекции первого порядка, описанного в [4]. Отметим, что программа построена таким образом, что в случае нарушения контакта дробового снаряда с пьезом вместо граничного условия  $u(0, t) = 0$  учитывалось условие  $\epsilon_x|_{x=0} = 0$ . Модуль упругости  $E_1$  полагался равным нулю, что ближе к реальному положению вещей.

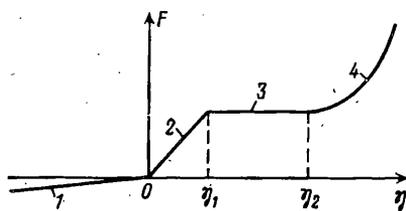
При помощи этой программы была решена задача для упругого снаряда (1.17), (1.18). Согласно методу прямых снаряд разбивался на десять участков. Использовались центральные разности второго порядка точности. Полученные результаты хорошо согласовались с аналитическим решением задачи (2.3)—(2.5), при построении которого решение нелинейного уравнения (2.15) уточнялось методом Ньютона — Рафсона. При более густой сетке разбиения снаряда (двадцать частей) существенного отличия в решении не наблюдалось, но время счета значительно возрастало. Сформулированная задача Коши интегрировалась также методом Рунге — Кутты, но в данном случае много времени требовалось на подбор подходящего шага интегрирования. Причем, этот шаг не будет эффективным, так как интегрирование уравнений при помощи метода прогноза и коррекции показало, что в течение рассматриваемого промежутка времени (пока заряд не покидал ствол) начальный шаг интегрирования, равный 0,01, при точности вычислений  $10^{-4}$  изменялся более двухсот раз. Применение преобразования [3] позволило существенно сократить время счета.

Исследовалось взаимодействие дроби различной твердости (различные диаграммы, типа приведенных на фиг. 2) с тремя видами стволов, внутренний профиль которых показан на фиг. 3. Здесь цифрой 1 помечен цилиндрический ствол, цифрой 2 — ствол с получоком и цифрой 3 с чоком. Рассматривались пьезы с различными характеристиками нагрузки ( $F$ ) — прогиб ( $\eta$ ), общий вид которых приведен на фиг. 4. Здесь на участках 1, 2, 3 имеет место линейная зависимость, а на участке 4 поведение описывается функцией  $F = (\eta/\eta_0)^\alpha$ , где  $\eta_0$  и  $\alpha$  — заданные постоянные. Давление пороховых газов, полученное из эксперимента, достаточно точно аппроксимировалось зависимостью  $p(t) = at \exp(-bt)$ , где  $a$  и  $b$  — числа.

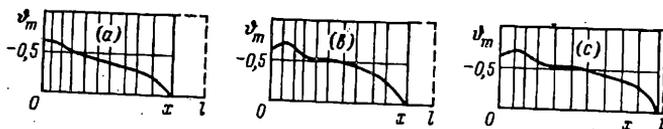
На фиг. 5 показаны распределения остаточных деформаций для ствола с получоком в момент



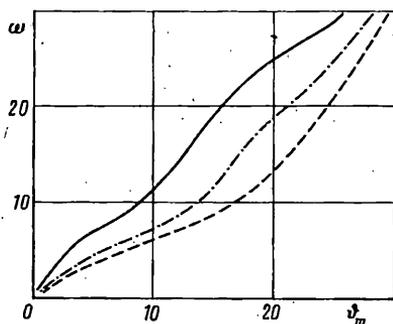
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

прохождения снарядом дробы сечений, помеченных на фиг. 4 буквами *a*, *b*, *c*. Штрихом обозначен первоначальный размер снаряда, а полосы определяют положения сечений разбивания.

На фиг. 6 для одного и того же типа ствола и пыжа показана зависимость  $\omega$  — доли дробы в процентах деформированной менее чем на  $\phi_m$  процентов в зависимости от самой объемной деформации  $\phi_m$ . Штриховая кривая соответствует мягкой дробе, сплошная — твердой, а штрих-пунктирная — средней.

Проведенные численные исследования показали следующее: в наибольшей степени дробовый снаряд и дробь деформируются в начальные моменты при проходе через сужающуюся часть входа в ствол;

при проходе через полочок дробь получает некоторую дополнительную деформацию, однако дробовый заряд растягивается, становясь менее плотным. Прохождение через чок приводит к более сильному деформированию дробы и менее значительному разуплотнению снаряда;

при стрельбе из цилиндрического ствола дробовый снаряд при выходе из ствола имеет большую среднюю плотность, чем исходный снаряд;

наибольшее влияние на плотность оказывает твердость дробы: с повышением твердости плотность снижается (увеличивается длина снаряда), причем для твердой дробы выходная длина больше начальной;

увеличение твердости дробы приводит к уменьшению остаточных деформаций;

наличие полочка незначительно влияет на деформацию дробы, а прохождение через чок заметно увеличивает её деформацию;

значительное увеличение жесткости пыжа приводит к существенному уменьшению остаточной деформации дробы за счет перераспределения энергии деформации между пыжом и дробью.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Я., Соловьев Ю. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Наука, 1978. 462 с.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
3. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Задача Коши для нелинейно деформируемых систем как задача продолжения решения по параметру//ДАН. 1993. Т. 329. № 4. С. 426—428.
4. Кузнецов Е. Б., Шалашилин В. И. Задача Коши для деформируемых систем как задача продолжения решения по параметру//Изв. АН.МТТ. 1993. № 6. с. 145—152.

Москва

Поступила в редакцию  
18.X.1993