МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1994

УДК 539.3

© 1994 г. А. В. ЕФИМЕНКО, Г. Н. КУВЫРКИН

НОВЫЕ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ КОМПОЗИТОВ

Известно достаточно много методов расчета эффективных свойств композитов при заданных структуре и свойствах компонентов [1, 2, 3]. Для композитов сложных структур и экспериментальное, и теоретическое определение полного набора компонентов тензора упругих характеристик является крайне сложной проблемой. Если для той или иной модели неоднородной среды получено приближенное решение, судить о достоверности результата можно, сравнив это решение с каким-либо другим, но даже тогда трудно бывает установить степень близости найденных оценок реальным свойствам композита (точнее, его модели). При близких значениях модулей Юнга компонентов как для непосредственной оценки эффективных свойств, так и для проверки, пусть и весьма приблизительной, теоретических методов расчета может быть использован вариационный метод Хашина — Штрикмана [4]. Если модули компонентов различаются более чем в три раза, границы эффективных свойств по Хашину — Штрикману становятся не пригодными к использованию. Поэтому получение простых и в то же время приемлемых по точности оценок является актуальной проблемой.

Ниже предложен способ оценки упругих свойств изотропного композиционного материала из условия минимума энергии взаимодействия компонентов при варьировании полей средних деформаций и напряжений в компонентах и неизменных средних (эффективных) полях напряжений и деформаций в композите в целом. Найденная таким образом область возможных значений упругих модулей уже области Хашина — Штрикмана. В случае изотропии композита верхняя граница этой области есть среднее арифметическое оценок Фойхта и Рейсса. Применением этого метода к частным случаям нагружения композитного образца получена еще одна пара границ в виде зависимостей между эффективными модулями. Проведено сравнение новых границ с границами Хашина — Штрикмана.

Рассмотрим некоторый объем двухкомпонентного композита с произвольной формой включений. Композит в целом, материалы матрицы и включений упруги и изотропны, связь между компонентами идеальная.

Согласно теории эффективных модулей для средних по объему представительного элемента композита, а также для средних по объему компонентов композита напряжений $\overset{\alpha}{\sigma}_{ij}$ и деформаций $\overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}$ справедливы соотношения. (индекс $\alpha = 0, 1, 2$ соответственно, для композита в целом, включений и матрицы)

$$\overset{\alpha}{\sigma}_{ij} = \overset{\alpha}{C}_{ijkl}\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl} \tag{1}$$

$$\overset{0}{\sigma}_{ij} = p_1\overset{1}{\sigma}_{ij} + p_2\overset{2}{\sigma}_{ij}, \quad \overset{0}{\varepsilon}_{ij} = p_1\overset{1}{\varepsilon}_{ij} + p_2\overset{2}{\varepsilon}_{ij} \tag{2}$$

где $\overset{\alpha}{C}_{ijkl}$ – тензор упругих характеристик композита, включений и матрицы, p_α – объемная доля α-го компонента. С помощью (1), (2) можно получить [5]:

$$\overset{\alpha}{\sigma}_{ij} = \overset{\alpha}{A}_{ijkl}\overset{0}{\sigma}_{kl}, \quad \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij} = \overset{\alpha}{B}_{ijkl}\overset{0}{\varepsilon}_{kl} \tag{3}$$

$$p_1\overset{1}{A}_{ijkl} + p_2\overset{2}{A}_{ijkl} = I_{ijkl}, \quad p_1\overset{1}{B}_{ijkl} + p_2\overset{2}{B}_{ijkl} = I_{ijkl}$$

$$p_1\overset{1}{C}_{ijkl}\overset{1}{B}_{klmn} + p_2\overset{2}{C}_{ijkl}\overset{2}{B}_{klmn} = \overset{0}{C}_{ijmn}, \quad p_1\overset{1}{S}_{ijkl}\overset{1}{A}_{klmn} + p_2\overset{2}{S}_{ijkl}\overset{2}{A}_{klmn} = \overset{0}{S}_{ijmn}$$

где $I_{ijkl} = 1/2\,(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ – единичный тензор четвертого ранга, $\overset{\alpha}{S}_{ijkl}$ – тензоры податливостей, δ_{ij} – символ Кронекера. Если тензоры эффективных упругих характеристик известны, то тензоры $\overset{\alpha}{A}_{ijkl}$ и $\overset{\alpha}{B}_{ijkl}$ однозначно определяются из соотношений

$$p_\alpha\,(\overset{\alpha}{S}_{ijkl} - \overset{\beta}{S}_{ijkl})\,\overset{\alpha}{A}_{klmn} = \overset{0}{S}_{ijmn} - \overset{\beta}{S}_{ijmn} \tag{4}$$

$$p_\alpha\,(\overset{\alpha}{C}_{ijkl} - \overset{\beta}{C}_{ijkl})\,\overset{\alpha}{B}_{klmn} = \overset{0}{C}_{ijmn} - \overset{\beta}{C}_{ijmn}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \alpha \neq \beta)$$

Домножая левые и правые части первого уравнения на $\overset{0}{\sigma}_{mn}$, а второго — на $\overset{0}{\varepsilon}_{mn}$, с учетом (3), получим

$$p_\alpha\,(\overset{\alpha}{S}_{ijkl} - \overset{\beta}{S}_{ijkl})\,\overset{\alpha}{\sigma}_{kl} = (\overset{0}{S}_{ijmn} - \overset{\beta}{S}_{ijmn})\,\overset{0}{\sigma}_{mn}$$

$$p_\alpha\,(\overset{\alpha}{C}_{ijkl} - \overset{\beta}{C}_{ijkl})\,\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl} = (\overset{0}{C}_{ijmn} - \overset{\beta}{C}_{ijmn})\,\overset{0}{\varepsilon}_{mn}$$

Используя далее обычные операции, найдем формулы для шаровых и девиаторных составляющих тензоров напряжений и деформаций:

$$p_\alpha\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kk} = \frac{K_0 - K_\beta}{K_\alpha - K_\beta}\,\overset{0}{\varepsilon}_{kk}, \quad p_\alpha\overset{\alpha}{e}_{ij} = \frac{\mu_0 - \mu_\beta}{\mu_\alpha - \mu_\beta}\,\overset{0}{e}_{ij} \tag{5}$$

$$p_\alpha\overset{\alpha}{\sigma}_{kk} = \frac{K_0^{-1} - K_\beta^{-1}}{K_\alpha^{-1} - K_\beta^{-1}}\,\overset{0}{\sigma}_{kk}, \quad p_\alpha\overset{\alpha}{s}_{ij} = \frac{\mu_0^{-1} - \mu_\beta^{-1}}{\mu_\alpha^{-1} - \mu_\beta^{-1}}\,\overset{0}{s}_{ij} \tag{6}$$

$$\overset{\alpha}{s}_{ij} = \overset{\alpha}{\sigma}_{ij} - 1/3\,\delta_{ij}\overset{\alpha}{\sigma}_{kk}, \quad \overset{\alpha}{e}_{ij} = \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij} - 1/3\,\delta_{ij}\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kk} \tag{7}$$

где K_α, μ_α – модули всестороннего сжатия и модули сдвига компонентов и композита в целом.

Энергия деформаций композита в целом

$$W_0 = 1/2\int_V \overset{0}{\sigma}_{ij}\overset{0}{\varepsilon}_{ij}\,dV \tag{8}$$

Подставив (2) в (8), получим

$$W_0 = W_1 + W_2 + W_{12} \tag{9}$$

$$W_\alpha = 1/2\,p_\alpha\int_V \overset{\alpha}{\sigma}_{ij}\overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}\,dV$$

$$W_{12} = \tfrac{1}{2} p_1 p_2 \int\limits_V (\overset{1}{\varepsilon}_{ij} - \overset{2}{\varepsilon}_{ij})(\overset{2}{\sigma}_{ij} - \overset{1}{\sigma}_{ij})\, dV$$

Первые два слагаемые (9) представляют собой среднюю потенциальную энергию деформаций компонентов, а третье — энергию их взаимодействия. Выразив из (7) напряжения и деформации через шаровые и девиаторные составляющие, приведем W_{12} к виду

$$W_{12} = \tfrac{1}{2} A_\mu (\mu_V - \mu_0)(\mu_0 - \mu_R) \int\limits_V \overset{0}{e}_{ij} \overset{0}{e}_{ij}\, dV + \tfrac{1}{2} A_K (K_V - K_0)(K_0 - K_R) \int\limits_V \overset{0}{\varepsilon}{}^2_{kk}\, dV \qquad (10)$$

$$A_\mu = \frac{2\mu_1\mu_2}{p_1 p_2 \mu_R (\mu_1 - \mu_2)^2}, \quad A_K = \frac{K_1 K_2}{p_1 p_2 K_R (K_1 - K_2)^2}$$

$$K_V = p_1 K_1 + p_2 K_2, \quad K_R^{-1} = p_1 K_1^{-1} + p_2 K_2^{-1} \qquad (11)$$

$$\mu_V = p_1 \mu_1 + p_2 \mu_2, \quad \mu_R^{-1} = p_1 \mu_1^{-1} + p_2 \mu_2^{-1}$$

где K_V, μ_V, K_R, μ_R – оценки Фойхта и Рейсса [5].

Основные уравнения теории эффективных модулей совпадают с уравнениями теории упругости [1]. Для нее справедливы все классические теоремы о минимуме (потенциальной энергии деформаций, дополнительной энергии и так далее), связанные с варьированием полей перемещений, деформаций и напряжений. Если эффективные модули фиксированы, то любое изменение эффективных напряжений и деформаций приводит к соответствующему изменению средних напряжений и деформаций в компонентах. С другой стороны, можно задать вариации средних перемещений, деформаций и напряжений в компонентах, не меняя значения эффективных переменных. Это приводит к изменению величины эффективных модулей. Покажем, что в этом случае истинные перемещения, напряжения и деформации доставляют минимум потенциальной энергии деформации и дополнительной энергии. Одновременно будут получены ограничения на величину эффективных модулей.

Пусть $\overset{\alpha}{u}_i$, $\overset{\alpha}{\sigma}_{ij}$, $\overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}$ – истинные поля перемещений, напряжений и деформаций. Введем перемещения $\overset{\alpha}{u}{}^*_{ij}$ такие, что на поверхности рассматриваемого тела

$$\overset{\alpha}{u}{}^*_i = \overset{\alpha}{u}_i \qquad (12)$$

Потребуем, чтобы для соответствующих им деформаций выполнялись условия

$$p_1 \overset{1}{\varepsilon}{}^*_{ij} + p_2 \overset{2}{\varepsilon}{}^*_{ij} = \overset{0}{\varepsilon}_{ij} \qquad (13)$$

$$p_1 \delta \overset{1}{\varepsilon}_{ij} + p_2 \delta \overset{2}{\varepsilon}_{ij} = 0 \qquad (14)$$

где $\delta \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij} = \overset{\alpha}{\varepsilon}{}^*_{ij} - \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}$ – вариации деформаций. Из (5) следует

$$p_\alpha \overset{\alpha}{\varepsilon}{}^*_{kk} = \frac{K^* - K_\beta}{K_\alpha - K_\beta} \overset{0}{\varepsilon}_{kk}, \quad p_\alpha \overset{\alpha}{e}{}^*_{ij} = \frac{\mu^* - \mu_\beta}{\mu_\alpha - \mu_\beta} \overset{0}{e}_{ij} \qquad (15)$$

$$p_\alpha \delta\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kk} = \frac{\delta K^*}{K_\alpha - K_\beta}\overset{0}{\varepsilon}_{kk}, \quad p_\alpha \delta\overset{\alpha}{e}_{ij} = \frac{\delta\mu^*}{\mu_\alpha - \mu_\beta}\overset{0}{e}_{ij}$$

Если ранее эффективные модули K_0 и μ_0 были постоянными, то величины модулей K^* и μ^* и их вариации δK^*, $\delta\mu^*$, как и составляющие тензора деформаций $\overset{\alpha}{\varepsilon}{}^*$ и $\overset{\alpha}{e}{}^*$ и их вариации, являются функциями пространственных координат. Таким образом, реальное тело с фиксированными свойствами заменяется телом с переменными упругими свойствами. Покажем, что энергия деформаций возможного поля перемещений W_0^*, удовлетворяющего условиям (12)—(14), больше, чем энергия деформаций истинного поля перемещений W_0. Зададим два поля возможных перемещений так, что для первого

$$\delta\overset{0}{\varepsilon}_{ij}{}' = p_1\delta\overset{1}{\varepsilon}_{ij}{}', \quad \delta\overset{2}{\varepsilon}_{ij}{}' = 0 \tag{16}$$

для второго

$$\delta\overset{0}{\varepsilon}_{ij}{}'' = p_2\delta\overset{2}{\varepsilon}_{ij}{}'', \quad \delta\overset{1}{\varepsilon}_{ij}{}'' = 0 \tag{17}$$

Как в первом, так и во втором состоянии изменение энергии $\delta W_0' > 0$, $\delta W_0'' > 0$. Наложим эти два поля одно на другое, потребовав, чтобы

$$\delta\overset{0}{\varepsilon}_{ij}{}' + \delta\overset{0}{\varepsilon}_{ij}{}'' = 0 \tag{18}$$

Тогда условия (12)—(14) будут выполнены, а общее изменение энергии будет положительным, т. е. $W_0^* > W_0$.

При постоянных деформациях увеличение потенциальной энергии W_0 может быть обеспечено только положительными вариациями модулей $\delta K_0 > 0$ и $\delta\mu_0 > 0$. Следовательно, модули K_0 и μ_0 возрастают.

Покажем, что энергия взаимодействия увеличивается. Вариация $\delta W_{12}'$ для состояния (16) равна

$$\delta W_{12}' = 1/2 \int_V [\delta\overset{1}{\varepsilon}_{ij}{}' (\overset{1}{\sigma}_{ij} - \overset{2}{\sigma}_{ij}) - (\overset{2}{\varepsilon}_{ij} - \overset{1}{\varepsilon}_{ij})\delta\overset{1}{\sigma}_{ij}{}']\, dV$$

Представляя деформации в виде шаровой и девиаторной составляющих и учитывая соотношения (15), приведем $\delta W_{12}'$ к виду

$$\delta W_{12}' = -1/2\, A_k \int_V [\, (K^* - K_R) + K_R/K_2\, (K_V - K^*)\,]\delta\overset{1}{\varepsilon}_{kk}{}'\overset{0}{\varepsilon}_{kk}\, dV -$$

$$- 1/2 A_\mu \int_V [(\mu^* - \mu_R) + \mu_R/\mu_2\, (\mu_V - \mu^*)\,]\delta\overset{1}{e}_{ij}{}'\overset{0}{e}_{ij}\, dV$$

Выражение для $\delta W_{12}''$ состояния (17) получается перестановкой в правой части последнего соотношения индексов 1 и 2. Выражения в квадратных скобках всегда положительны. Используя (16), (17) и (18), получим

$$\delta W_{12} = \delta W_{12}' + \delta W_{12}'' = 1/2 \int_V F_1\, (K^*, K_1, K_2)\, \delta\overset{0}{\varepsilon}_{kk}{}''\overset{0}{\varepsilon}_{kk}\, dV +$$

$$+ 1/2 \int_V F_2\, (\mu^*, \mu_1, \mu_2)\, \delta\overset{0}{e}_{ij}{}''\overset{0}{e}_{ij}\, dV > 0 \tag{19}$$

где F_1 и F_2 обозначены положительные функции модулей K_α, μ_α.

Представим модули K^* и μ^* в виде суммы средних значений $\langle K^*\rangle$, $\langle\mu^*\rangle$ и флуктуаций K', μ':

$$K^* = \langle K^*\rangle + K', \quad \mu^* = \langle\mu^*\rangle + \mu' \tag{20}$$

$$\langle K^*\rangle = 1/V \int_V K^*\, dV, \quad \langle\mu^*\rangle = 1/V \int_V \mu^*\, dV$$

$$\int_V K'\, dV = \int_V \mu'\, dV = 0$$

С учетом (20) получим

$$\delta W_{12} = \tfrac{1}{2}A_K\, [(K_V - \langle K^*\rangle)(\langle K^*\rangle - K_R) - (K_V - K_0)(K_0 - K_R)] \int_V \overset{0}{\varepsilon}{}^2_{kk}\, dV +$$

$$+ \tfrac{1}{2}A_\mu\, [(\mu_V - \langle\mu^*\rangle)(\langle\mu^*\rangle - \mu_R) - (\mu_V - \mu_0)(\mu_0 - \mu_R)] \int_V \overset{0}{e}_{ij}\overset{0}{e}_{ij}\, dV -$$

$$-\tfrac{1}{2}A_K \int_V (K')^2\overset{0}{\varepsilon}{}_{kk}\, dV - \tfrac{1}{2}A_\mu \int_V (\mu')^2\overset{0}{e}_{ij}\overset{0}{e}_{ij}\, dV \tag{21}$$

Поскольку

$$\frac{d}{dK_0}(K_V - K_0)(K_0 - K_R) = K_V + K_R - 2K_0$$

$$\frac{d}{d\mu_0}(\mu_V - \mu_0)(\mu_0 - \mu_R) = \mu_V + \mu_R - 2\mu_0$$

получим

$$\delta W_{12} = \tfrac{1}{2}A_K\, (K_V + K_R - 2K_0)\, \delta K_0 \int_V \overset{0}{\varepsilon}{}^2_{kk}\, dV + \tfrac{1}{2}A_\mu\, (\mu_V + \mu_R - 2\mu_0)\, \delta\mu_0 \int_V \overset{0}{e}_{ij}\overset{0}{e}_{ij} dV - \tag{22}$$

$$-\tfrac{1}{2}A_K \int_V (K')^2\overset{0}{\varepsilon}{}^2_{kk}\, dV - \tfrac{1}{2}A_\mu \int_V (\mu')^2\, \overset{0}{e}_{ij}\overset{0}{e}_{ij}\, dV$$

$$\delta K_0 = \langle K^*\rangle - K_0, \quad \delta\mu_0 = \langle\mu^*\rangle - \mu_0$$

Два последних слагаемых в (22) имеют более высокий порядок малости, поэтому с учетом (19) можно записать

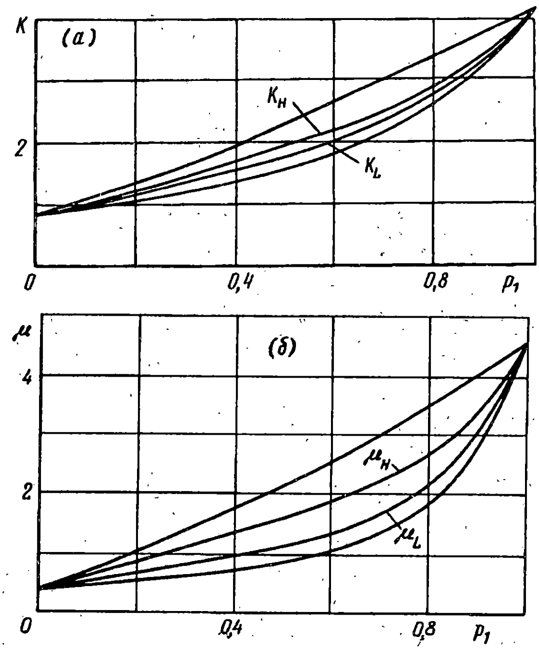
$$(K_V + K_R - 2K_0)\delta K_0 > 0, \quad (\mu_V + \mu_R - 2\mu_0)\, \delta\mu_0 > 0 \tag{23}$$

Варьируя подобным же образом поля напряжений, получим

$$(K_V^{-1} + K_R^{-1} - 2K_0^{-1})\, \delta K_0 > 0, \quad (\mu_V^{-1} + \mu_R^{-1} - 2\mu_0^{-1})\, \delta\mu_0 > 0 \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует

$$\delta K_0 > 0, \quad \delta\mu_0 > 0$$



Фиг. 1

$$K_0 < 1/2\,(K_V + K_R), \quad \mu_0 < 1/2\,(\mu_V + \mu_R) \tag{25}$$

$$K_0^{-1} < 1/2\,(K_V^{-1} + K_R^{-1}), \quad \mu_0^{-1} < 1/2\,(\mu_V^{-1} + \mu_R^{-1}) \tag{26}$$

Таким образом, истинным полям напряжений и деформаций в компонентах отвечает минимальное значение энергии взаимодействия, при этом эффективные модули композита должны удовлетворять неравенствам (25) и (26). Далее максимально возможные значения модулей в неравенствах (25) и (26) будем обозначать K_H, μ_H, минимальные — K_L, μ_L.

Изложенный выше способ варьирования переменных можно использовать для получения еще одной пары границ эффективных модулей.

Зададим систему нагрузок некоторого образца так, чтобы сечения, перпендикулярные оси 1, остались плоскими, при этом деформации $\overset{0}{\varepsilon}_{1i} = 0$ и $\overset{0}{e}_{1i} = -1/3\,\overset{0}{\varepsilon}_{kk}\delta_{1i}$

Предположим, что и в компонентах композита тоже реализуется плоское деформированное состояние $\overset{\alpha}{\varepsilon}_{1i} = 0$ и $\overset{\alpha}{e}_{1i} = -1/3\,\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kk}\delta_{1i}$. Тогда из (5) и (7) следует

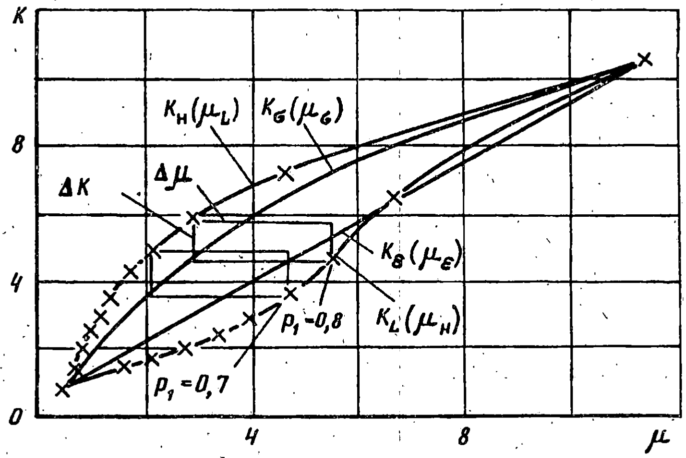
$$(K_0 - K_2)/(K_1 - K_2) = (\mu_0 - \mu_2)/(\mu_1 - \mu_2) \tag{27}$$

Аналогично для плоского напряженного состояния получим зависимость

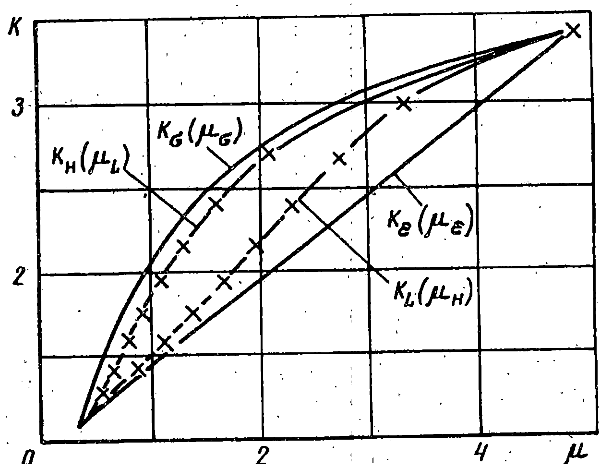
$$(K_0^{-1} - K_2^{-1})/(K_1^{-1} - K_2^{-1}) = (\mu_0^{-1} - \mu_2^{-1})/(\mu_1^{-1} - \mu_2^{-1}) \tag{28}$$

Модули, входящие в (27) и (28), есть, соответственно, верхние и нижние оценки истинных модулей K_0 и μ_0. Модули, связанные зависимостью (27), будем обозначать K_ε и μ_ε, а модули из (28) — K_σ и μ_σ:

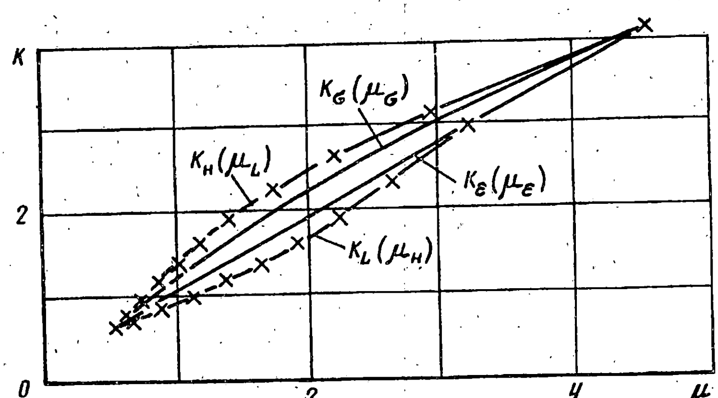
$$K_\sigma \le K_0 \le K_\varepsilon, \quad \mu_\sigma \le \mu_0 \le \mu_\varepsilon \tag{29}$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Действительно, введением в компонентах композита плоского деформированного состояния $\overset{\alpha}{\varepsilon}_{ll} = 0$ фактически задаются ненулевые деформации $\delta\overset{\alpha}{\varepsilon}_{11}$ при одновременном выполнении условий (12)—(14). Следовательно, полученные оценки K_ε и μ_ε являются верхними границами модулей K_0 и μ_0.

Справедливость левой части неравенств (29) доказывается аналогично.

Данный метод может быть распространен на композиты более сложных типов структур, причем для некоторых из них зависимости типа (27) и (28) могут связывать и точные значения модулей. В частности, для волокнистого однонаправленного композита такие зависимости можно найти в статье [6]. Для трансверсально изотропных композитов произвольной структуры эти точные зависимости становятся уравнениями границ области возможных значений.

На фиг. 1 изображены границы Хашина — Штрикмана [4] (необходимые формулы можно также найти в [1, 2]) и границы (25) и (26). Величины модулей Юнга E_α взяты в условных единицах, ν_α — коэффициенты Пуассона. Видно, что расхождение между ними довольно велико. Расчеты показывают, что новые границы всегда уже границ Хашина—Штрикмана, и только при близких значениях модулей Юнга области возможных значений практически совпадают.

Особенность зависимостей (27) и (28) заключается в том, что при заданных модулях и объемных долях компонентов из них невозможно определить оценки эффективных модулей, поэтому сравнение границ (25), (26) и (27), (28) возможно только в координатах $K(\mu)$ (фиг. 2—4). Каждой фигуре соответствуют параметры $E_1/E_2 = 25$; $\nu_1 = 0{,}1$; $\nu_2 = 0{,}3$; (10; 0,01; 0,35), (10; 0,1; 0,2). Для наглядности построены зависимости $K_H(\mu_L)$ и $K_L(\mu_H)$, а не $K_H(\mu_H)$ и $K_L(\mu_L)$, тем более, что имеют смысл не сами кривые, а область возможных значений, которая для заданной величины p_α в этих координатах есть прямоугольник со сторонами, равными ΔK и $\Delta\mu$. Звездочками на кривых $K_H(\mu_L)$ и $K_L(\mu_H)$ отмечены значения модулей для объемных долей компонентов $p_\alpha = 0$; 0,1; 0,2; . . . ; 1.

Видно, что ΔK меньше $\Delta\mu$, причем на $\Delta\mu$ сильно влияет величина ν_α коэффициентов Пуассона: чем больше ν_2/ν_1, тем уже область возможных значений. Общие размеры области с границами (25), (26) растут с увеличением E_1/E_2.

Если кривые (27), (28) лежат внутри области возможных значений (фиг. 2, 4), то с их помощью могут быть получены более точные, чем (25) и (26) оценки. Это возможно, если из расчета или из эксперимента известно значение одного из модулей. Так, если из опыта найдена величина модуля Юнга E_0, то оценки коэффициентов Пуассона можно определить из равенств

$$\frac{\nu_\sigma - \nu_2}{\nu_1 - \nu_2} = \frac{E_0 - E_2}{E_1 - E_2}, \quad \frac{\nu_\varepsilon^{-1} - \nu_2^{-1}}{\nu_1^{-1} - \nu_2^{-1}} = \frac{E_0^{-1} - E_2^{-1}}{E_1^{-1} - E_2^{-1}}$$

Важно отметить, что относительная ширина области, ограниченной кривыми (27), (28), зависит только от коэффициентов Пуассона

$$\frac{K_\varepsilon - K_\sigma}{K_1 - K_2} \le \frac{((1 - 2\nu_1)/(1 - 2\nu_2))^{1/2} - ((1 + \nu_1)/(1 + \nu_2))^{1/2}}{((1 - 2\nu_1)/(1 - 2\nu_2))^{1/2} + ((1 + \nu_1)/(1 + \nu_2))^{1/2}}$$

При $\nu_1 = \nu_2$ границы (27) и (28) совпадают. Таким образом, этими границами следует пользоваться при близких значениях ν_α или если отношение E_1/E_2 велико. Оценки (25), (26) точнее при сильно различающихся коэффициентах Пуассона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
2. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
3. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 336 с.
4. *Hashin Z., Shtrikman S.* On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elastisity// J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10. No. 4. P. 335—342.
5. *Hill R.* Theory of mechanical properties of fibre-strengthening material. I. Elastic behaviour// J. Mech. and Phys. Solids. 1964. V. 12. No. 4. P. 199—212.
6. *Hill R.* Elastic Properties of reinforced solids; some theoretical principles//J. Mech. and Phys. Solids. 1963. V. 11, No. 5. P. 357—372.

Москва

Поступила в редакцию
10. X.1993