

УДК 624.07:534.1

© 1994 г. А. Н. ДАНИЛИН

## НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИБКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Разработана математическая модель исследования нелинейной нестационарной динамики конструкций, составленных из твердых тел и гибких стержневых элементов. В основе подхода — конечноэлементная дискретизация с использованием точных статических решений.

При математической формулировке нелинейной задачи динамики учитываются геометрические нелинейности упругого деформирования элементов (соответствующие конечным деформациям) и нелинейности инерционных сил, обусловленные вращением, а также изменением геометрии системы вследствие относительных перемещений, поворотов и деформаций.

Исследование ориентировано на выработку подходов [1—6] к решению динамических задач, связанных прежде всего с созданием новых типов управляемых гибких составных конструкций. К таким системам относятся разворачиваемые или собираемые на орбите крупногабаритные космические конструкции (платформы, краны, антенны, большие разворачиваемые телескопы и интерферометры), а также быстродействующие манипуляционные роботы различных схем. Наличие точной математической модели позволяет при проектировании таких систем выполнить расчеты с целью установления, например, действующих на элементы системы нагрузок, быстроты и точности выполнения операций, места расположения приводов и чувствительных элементов системы управления, а также выбора законов управления.

Предлагаемый подход позволяет с единых позиций моделировать для рассматриваемого класса конструкций такие нестационарные процессы; как разворачивание или выдвигание конструкции в космосе, маневрирование, выполнение различных технологических операций, связанных с конечными относительными перемещениями и поворотами упругих стержневых элементов.

В публикуемой работе рассматривается плоская задача динамики, т. е. полагается, что полюса несущих тел и упругие оси стержневых элементов совершают движение в одной плоскости.

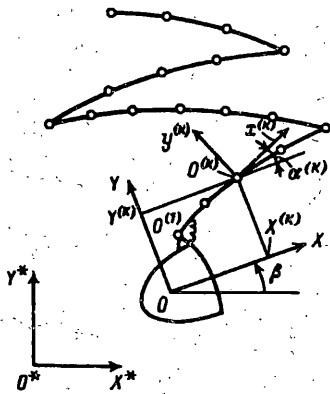
**1. Исходные допущения.** За типовую схему конструкции берется система, составленная из несущего твердого тела и гибкого стержня (фиг. 1). Любая иная конфигурация рассматриваемого класса конструкций может быть набрана из типовых схем.

Стержень разбивается на элементы конечной длины  $l^{(k)}$ . Здесь и далее верхний индекс  $(k)$  обозначает номер элемента;  $k = 1, \dots, N$ , где  $N$  — общее число конечных элементов. Элементы могут быть соединены жестко или шарнирно с заданными законами относительных углов поворота.

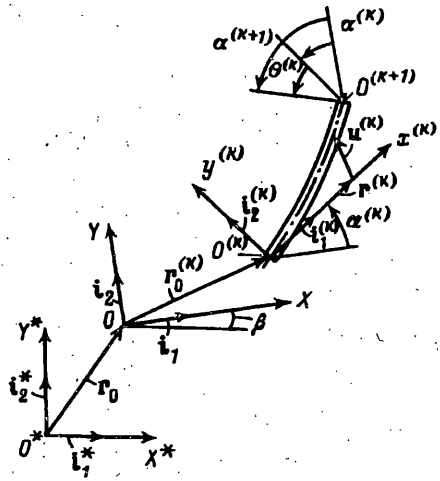
Крепление гибкого стержня к несущему телу осуществляется жестким образом в отношении линейных смещений и упруго в отношении угла поворота. Точка  $O^{(1)}$  моделируется упругим шарниром с жесткостью  $g_0$ . Угол установки гибкого стержня может также изменяться по определенному закону управления.

Считается, что поперечные сечения элементов-стержней смещаются и поворачиваются друг относительно друга, оставаясь плоскими и недеформированными.

Для каждого элемента вводится связанная система координат  $O^{(k)}x^{(k)}y^{(k)}$  таким образом, чтобы одна из осей (например, ось  $x^{(k)}$ , фиг. 2) оставалась нормальной



Фиг. 1



Фиг. 2

к краевому сечению. Локальные системы двигаются относительно системы координат несущего тела  $OXY$ . В свою очередь, система  $OXY$  совершает движение относительно некоторой инерциальной системы координат  $O^*X^*Y^*$ .

Расчленение конструкции на элементы конечной длины позволяет использовать квазистатическую аппроксимацию решения между соседними точками  $O^{(k)}$  и  $O^{(k+1)}$ . Этот прием представляет собой один из методов дискретизации задачи на основе использования точных статических решений. Он опирается на физически ясную идею о том, что массовые характеристики элемента малой длины практически не влияют на его деформирование и последнее определяется только жесткостными характеристиками этого элемента.

Конечные перемещения и конечные повороты связанных систем координат учитываются строго.

Квазистатические зависимости строятся в связанных координатах с помощью решения статической задачи. Здесь возможно построение как линейных решений, так и нелинейных типа эластики Эйлера. Линейные квазистатические аппроксимации предпочтительны. Они просты, удобны и позволяют получить удовлетворительные результаты для большого круга практически интересных задач. Нелинейные аппроксимации можно использовать в уточненных исследованиях, а также для ряда задач о существенном локальном искривлении упругой оси гибкого стержня. Это усложняет вычислительный алгоритм, но позволяет добиться сокращения количества искомых обобщенных координат без потери точности вычислений. В статье используются аппроксимации на основе решения однородной линейной статической задачи.

За обобщенные координаты принимаются компоненты вектора перемещения и угол поворота системы координат несущего тела, а также компоненты векторов перемещений и углы поворотов связанных систем координат относительно осей несущего тела.

2. Потенциальная энергия элемента. Принимается, что плоские сечения элемента-стержня не остаются нормальными к упругой оси этого элемента. Т. е. учитываются деформации сдвига  $\gamma$ , осредненные в некотором (например, энергетическом) смысле.

В главных центральных осях (связанных с конечным элементом) потенциальная энергия стержня

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EF\epsilon^2 + EJ \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 + GF_c \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right)^2 \right] dx$$

$$\varepsilon = du/dx + 1/2 (dv/dx)^2$$

где  $u$ ,  $v$  — продольное и поперечное упругие перемещения оси стержня;  $\theta = dv/dx - \gamma$  — угол поворота сечения;  $EF$ ,  $EJ$  и  $GF_c$  — жесткости на растяжение-сжатие, изгиб и сдвиг (считаются постоянными в пределах длины элемента).

Приравняв нулю вариацию  $U$  без учета первого слагаемого ( $EF\varepsilon^2$ ), приходим к аппроксимирующим соотношениям вида [7]:

$$\begin{aligned} v^\circ &= [1 - (1 - \kappa)\xi - 3\kappa\xi^2 + 2\kappa\xi^3] v_0^\circ + [1/2(1 + \kappa)\xi - 1/2(1 + 3\kappa)\xi^2 + \kappa\xi^3] \theta_0 + \\ &+ [(1 - \kappa)\xi + 3\kappa\xi^2 - 2\kappa\xi^3] v_1^\circ + [-1/2(1 - \kappa)\xi + 1/2(1 - 3\kappa)\xi^2 + \kappa\xi^3] \theta_1, \\ \theta &= 6\kappa(-\xi + \xi^2) v_0^\circ + [1 - (1 + 3\kappa)\xi + 3\kappa\xi^2] \theta_0 + \\ &+ 6\kappa(\xi - \xi^2) v_1^\circ + [(1 - 3\kappa)\xi + 3\kappa\xi^2] \theta_1, \\ \kappa &= (1 + 12EJ / (l^2 GF_c))^{-1} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\xi = x/l$ ,  $v^\circ = v/l$ ,  $v_1^\circ = v_1/l$ ;  $v_i$  и  $\theta_i$  — перемещение и угол поворота краевого сечения ( $i=0$  соответствует начальному сечению,  $i=1$  — конечному). Поскольку ось  $x$  по построению жестко связана с краевым сечением при  $x=0$ , то  $v_0^\circ = \theta_0 = 0$ . Безразмерный параметр  $\kappa$  при  $GF_c \rightarrow \infty$  (пренебрегая сдвигом) стремится к единице.

Считается, что в пределах  $k$ -го элемента продольное усилие постоянно. Так как жесткость  $EF$  также постоянна, то  $\varepsilon = \text{const}$  и отсюда нетрудно получить выражения для  $\varepsilon$  и  $u$ :

$$\varepsilon = u_1^\circ + 1/2 \theta^T P_1 \theta, \quad u^\circ = u_1^\circ \xi + 1/2 \theta^T D \theta \quad (2.2)$$

$$\theta^T = \|v_1^\circ \theta_1\|, \quad u^\circ = u/l, \quad u_1^\circ = u_1/l$$

$$P_1 = \left\| \begin{array}{cc} 1 + \kappa^2/5 & -\kappa^2/10 \\ -\kappa^2/10 & 1/4(1/3 + \kappa^2/5) \end{array} \right\|$$

где  $u_1$  — продольное перемещение краевого сечения при  $x=l$ ,  $D$  — симметричная матрица с элементами

$$d_{11} = 2\kappa(1 - 2/5\kappa)\xi - 6\kappa(1 - \kappa)\xi^2 + 4\kappa(1 - 4\kappa)\xi^3 + 18\kappa^2\xi^4 - 36/5\kappa^2\xi^5$$

$$d_{12} = (1/2 - \kappa + 2/5\kappa^2)\xi - 1/2(1 - \kappa)(1 - 6\kappa)\xi^2 - 4\kappa(1 - 2\kappa)\xi^3 + 3/2\kappa(1 - 6\kappa)\xi^4 + 18/5\kappa^2\xi^5$$

$$d_{22} = 1/2(-1/3 + \kappa - 2/5\kappa^2)\xi + 1/2(1 - \kappa)(1 - 3\kappa)\xi^2 - (1/3 - 3\kappa + 4\kappa^2)\xi^3 - 3/2\kappa(1 - 3\kappa)\xi^4 - 9/5\kappa^2\xi^5$$

Пользуясь выражениями (2.1) и (2.2) нетрудно вычислить потенциальную энергию элемента  $U = U_N + U_M + U_Q$ . Последовательно имеем

$$U_N = \frac{1}{2} \int_0^l EF\varepsilon^2 dx = \frac{EFl}{2} \left( u_1^\circ + \frac{1}{2} \theta^T P_1 \theta \right)^2$$

$$U_M + U_Q = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EJ \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 + GF_c \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right)^2 \right] dx = \frac{EJ}{2l} \theta^T P_2 \theta$$

$$U = 1/2 [EFl(u_1^\circ + 1/2 \theta^T P_1 \theta)^2 + EJ \theta^T P_2 \theta / l] \quad (2.3)$$

$$P_2 = \left\| \begin{array}{cc} 12\kappa & -6\kappa \\ -6\kappa & 1 + 3\kappa \end{array} \right\|$$

3. Кинетическая энергия элемента. Поскольку считается, что сечения элемента смещаются и поворачиваются как жесткие диски, их движение можно описывать уравнениями движения твердого тела.

Вектор перемещения точки упругой линии стержня (линии полюсов сечений)

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_0^{(k)} + \mathbf{r}^{(k)} + \mathbf{u}^{(k)}$ . Обозначения  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}_0^{(k)}$  ясны из фиг. 2. Векторы  $\mathbf{r}^{(k)}$  и  $\mathbf{u}^{(k)}$  представляют собой соответственно вектор начального положения точки оси элемента и вектор упругого смещения этой точки.

Последнюю формулу можно записать в эквивалентной матричной форме следующим образом:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{L}(\beta) \mathbf{r}_0^{(k)} + \mathbf{L}(\beta^{(k)}) (\mathbf{r}^{(k)} + \mathbf{u}^{(k)}) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{r}^T = \|\mathbf{X}^* \mathbf{Y}^*\|, \quad \mathbf{r}_0^T = \|\mathbf{X}_0^* \mathbf{Y}_0^*\|, \quad \mathbf{r}_0^{(k)T} = \|\mathbf{X}_0^{(k)} \mathbf{Y}_0^{(k)}\|$$

$$\mathbf{r}^{(k)T} = \|\mathbf{x}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)}\|, \quad \mathbf{u}^{(k)T} = \|\mathbf{u}^{(k)} \mathbf{v}^{(k)}\|$$

где под  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{r}_0^{(k)}$ ,  $\mathbf{r}^{(k)}$  и  $\mathbf{u}^{(k)}$  подразумеваются уже векторы-столбцы,  $\beta$  — угол поворота несущего тела,  $\beta^{(k)} = \beta + \alpha^{(k)}$ , а  $\alpha^{(k)}$  — угол поворота  $k$ -й связанной системы координат относительно осей несущего тела.

В рассматриваемом случае  $\mathbf{r}^{(k)T} = \|\mathbf{x}^{(k)} \mathbf{0}\|$ . Ортогональная матрица

$$\mathbf{L}(\beta) = \begin{vmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$$

При  $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{i}^{(k)}$  имеем  $\mathbf{u}_1^{(k)} = \mathbf{u}_1^{(k)}/l^{(k)} = \mathbf{L}^T(\alpha^{(k)}) (\mathbf{r}_0^{(k+1)} - \mathbf{r}_0^{(k)})/l^{(k)} - \mathbf{0}\mathbf{0}^T$ . Из фиг. 2 также следует простое соотношение

$$\theta_1^{(k)} = \alpha^{(k+1)} - \alpha^{(k)} \quad (3.2)$$

В случае излома гибкого стержня в  $k$ -й точке левую часть (3.2) необходимо заменить на  $\theta_1^{(k)} + \theta_*^{(k)}$ , где  $\theta_*^{(k)}(t)$  — заданная функция времени.

Дифференцируя по времени (3.1) нетрудно получить выражение для вектора-столбца абсолютной скорости полюса произвольного сечения стержня:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{L}(\beta) (\dot{\mathbf{r}}_0^{(k)} - \beta \mathbf{E}^* \mathbf{r}_0^{(k)}) + \mathbf{L}(\beta^{(k)}) [\dot{\mathbf{u}}^{(k)} - \beta^{(k)} \mathbf{E}^* (\mathbf{r}^{(k)} + \mathbf{u}^{(k)})] \quad (3.3)$$

$$\mathbf{E}^* = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Для простоты вычисления кинетической энергии целесообразно отбросить в выражении (3.3) величину  $\mathbf{L}(\beta^{(k)}) (\dot{\mathbf{u}}^{(k)} - \beta^{(k)} \mathbf{E}^* \mathbf{u}^{(k)})$ , соответствующую локальной упругой деформации элемента. Это существенно упрощает вычисления, однако приводит к иной динамической модели. Кинетическая энергия стержня, рассчитанная в этом случае, отвечает движению упругого стержня, массовые характеристики которого «стянуты» в расчетные сечения (или точки  $O^{(k)}$ ;  $k = 1, \dots, N+1$ ). Численные эксперименты показали, что такая модель весьма точна для большого круга задач.

Итоговое выражение для кинетической энергии элемента принимает вид

$$T^{(k)} = 1/2 \{ M^{(k)} [\dot{\mathbf{r}}_0^T \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{v}^{(k)T} \mathbf{v}^{(k)} + 2 \dot{\mathbf{r}}_0^T \mathbf{L}(\beta) \mathbf{v}^{(k)}] + \quad (3.4) \\ + 2 \beta^{(k)} \mathbf{S}^{(k)T} \mathbf{E}^* [\mathbf{L}^T(\beta^{(k)}) \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{L}^T(\alpha^{(k)}) \mathbf{v}^{(k)}] + I^{(k)} \beta^{(k)2} \}$$

$$\mathbf{v}^{(k)} = \dot{\mathbf{r}}_0^{(k)} - \beta \mathbf{E}^* \mathbf{r}_0^{(k)}$$

$$M^{(k)} = \int_{V^{(k)}} \mu dx, \quad \mathbf{S}^{(k)T} = \left( \int_{V^{(k)}} \mu x dx \mid M^{(k)} y_c^{(k)} \right), \quad I^{(k)} = \int_{V^{(k)}} \mu x^2 dx + I^{V^{(k)}} I^{(k)}$$

Здесь  $\mu$  — погонная масса стержня,  $y_c^{(k)}$  — координата центра инерции  $k$ -го сечения в системе  $O^{(k)} y^{(k)} z^{(k)}$ , связанной с этим сечением,  $I^{(k)}$  — массовый момент инерции  $k$ -го сечения относительно оси  $z^{(k)}$ ,  $I^{V^{(k)}}$  — область интегрирования в окрестности  $O^{(k)}$ .

Величины  $\mu$ ,  $y_c^{(k)}$  и  $I^{(k)}$  считаются постоянными в пределах  $k$ -го элемента.

4. Дифференциальные уравнения движения системы. Потенциальная и кинетическая энергии системы элементов-стержней и несущего твердого тела записываются соответственно в виде сумм

$$U^{\Sigma} = U_0 + \sum_{k=1}^N U^{(k)}, \quad T^{\Sigma} = T_0 + \sum_{k=1}^{N+1} T^{(k)} \quad (4.1)$$

где  $U_0 = 1/2 g_0 (\alpha^{(1)} - \alpha_0)^2$  — потенциальная энергия упругого крепления стержня к телу (в точке  $O^{(1)}$ ),  $T_0$  — кинетическая энергия несущего тела,  $U^{(k)}$  и  $T^{(k)}$  даются выражениями (2.3), (3.4) соответственно.

Явный вид формул (4.1) и (2.3), (3.4) позволяет составить уравнения движения системы, например, в форме уравнений Лагранжа. Последние записываются в следующем безразмерном виде:

$$\ddot{r}_0^{\circ} + L(\beta) \left[ \sum_{k=1}^{N+1} M^{\circ(k)} (\ddot{r}_0^{\circ(k)} - 2\beta E^* \dot{r}_0^{\circ(k)}) - (\beta E^* + \beta^2 E) \left( M_0^{\circ} r_c^{\circ} + \sum_{k=1}^{N+1} M^{\circ(k)} r_0^{\circ(k)} \right) \right] - \sum_{k=1}^{N+1} L(\beta^{(k)}) (\beta^{(k)} E^* + \beta^{(k)2} E) S^{\circ(k)} - F_0^{\circ} - \sum_{k=1}^{N+1} F^{\circ(k)} = 0$$

$$I_0^{\circ} \ddot{\beta} + \sum_{k=1}^{N+1} I^{\circ(k)} \ddot{\beta}^{(k)} + \left[ L(\beta) \left( M_0^{\circ} r_c^{\circ} + \sum_{k=1}^{N+1} M^{\circ(k)} r_0^{\circ(k)} \right) + \sum_{k=1}^{N+1} L(\beta^{(k)}) S^{\circ(k)} \right]^T E^* \dot{r}_0^{\circ} + \quad (4.2)$$

$$+ \sum_{k=1}^{N+1} [M^{\circ(k)} r_0^{\circ(k)} + L(\alpha^{(k)}) S^{\circ(k)}]^T (E^* \dot{r}_0^{\circ(k)} + 2\beta \dot{r}_0^{\circ(k)}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N+1} \{ \beta M^{\circ(k)} r_0^{\circ(k)} + L(\alpha^{(k)}) [(\beta + \beta^{(k)}) E + (\beta^2 - \beta^{(k)2}) E^*] S^{\circ(k)} -$$

$$- L^T(\beta) E^* F^{\circ(k)} \}^T r_0^{\circ(k)} - m_0^{\circ} - \sum_{k=1}^{N+1} m^{\circ(k)} = 0$$

$$M^{\circ(k)} [\ddot{r}_0^{\circ(k)} + L^T(\beta) \ddot{r}_0^{\circ} - 2\beta E^* \dot{r}_0^{\circ(k)} - (\beta E^* + \beta^2 E) r_0^{\circ(k)}] -$$

$$- L(\alpha^{(k)}) (\beta^{(k)} E^* + \beta^{(k)2} E) S^{\circ(k)} + \sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^2 g_j^{\circ(k-i)} H_{j,\alpha}^{(k,i)} - L^T(\beta) F^{\circ(k)} = 0 \quad (4.3)$$

$$I^{\circ(k)} \ddot{\beta}^{(k)} + S^{\circ(k)T} [E^* L^T(\beta^{(k)}) \ddot{r}_0^{\circ} + E^* L^T(\alpha^{(k)}) \ddot{r}_0^{\circ(k)} + 2\beta L^T(\alpha^{(k)}) \dot{r}_0^{\circ(k)} +$$

$$+ (\beta E - \beta^2 E^*) L^T(\alpha^{(k)}) r_0^{\circ(k)}] + \sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^2 g_j^{\circ(k-i)} H_{j,\alpha}^{(k,i)} - m^{\circ(k)} = 0 \quad (k = 2, \dots, N+1)$$

В случае учета упругости узла крепления стержня к несущему телу ( $g_0 \geq 0$ ) систему уравнений (4.2), (4.3) необходимо дополнить дифференциальным уравнением

$$I^{\circ(1)} \ddot{\beta}^{(1)} + S^{\circ(1)T} [E^* L^T(\beta^{(1)}) \ddot{r}_0^{\circ} + (\beta E - \beta^2 E^*) L^T(\alpha^{(1)}) r_0^{\circ(1)}] +$$

$$+ g_0^{\circ} (\alpha^{(1)} - \alpha_0) + \sum_{j=1}^2 g_j^{\circ(1)} H_{j,\alpha}^{(1,0)} - m^{\circ(1)} = 0 \quad (4.4)$$

Точки над переменными обозначают производные по параметру времени  $t^{\circ} = t/T$ ,  $T$  — характерное время.

В уравнениях (4.2)–(4.4) использованы следующие обозначения:

$$r^{\circ} = \frac{r}{L}, \quad M^{\circ} = \frac{M}{M^2}, \quad S^{\circ} = \frac{S}{M^2 L}, \quad F^{\circ} = \frac{T^2 F}{M^2 L}, \quad I^{\circ} = \frac{I}{M^2 L^2}$$

$$g_0^\circ = \frac{T^2 g_0}{M^2 L^2}, \quad g_1^\circ = \frac{T^2 E F}{M^2 L}, \quad g_2^\circ = \frac{T^2 E J}{M^2 L P}, \quad m^\circ = \frac{T^2}{M^2 L^2}$$

$$H_1^{(k,l)} = \varepsilon^{(k-l)} \left[ \left\| \begin{array}{c} u_{,X}^{\circ(k,l)} \\ u_{,Y}^{\circ(k,l)} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} v_{,X}^{\circ(k,l)} \\ v_{,Y}^{\circ(k,l)} \end{array} \right\| P_1^{(k-l)} \theta^{(k-l)} \right]$$

$$H_2^{(k,l)} = \left\| \begin{array}{c} v_{,X}^{\circ(k,l)} \\ v_{,Y}^{\circ(k,l)} \end{array} \right\| P_2^{(k-l)} \theta^{(k-l)}$$

$$H_{1,\alpha}^{(k,l)} = \varepsilon^{(k-l)} [u_{,\alpha}^{\circ(k,l)} + |w_{,\alpha}^{\circ(k,l)} \theta^{(k,l)}| P_1^{(k-l)} \theta^{(k-l)}]$$

$$H_{2,\alpha}^{(k,l)} = |w_{,\alpha}^{\circ(k,l)} \theta^{(k,l)}| P_2 \theta^{(k-l)}$$

$$\left\| \begin{array}{c} u_{,X}^{\circ(k,l)} v_{,X}^{\circ(k,l)} \\ u_{,Y}^{\circ(k,l)} v_{,Y}^{\circ(k,l)} \end{array} \right\| = (-1)^{l+1} L (\alpha^{(k-l)}), \quad \left\| \begin{array}{c} u_{,\alpha}^{\circ(k,l)} \\ v_{,\alpha}^{\circ(k,l)} \end{array} \right\| = \delta_{k-l,k} l^{\circ(k-l)} \left\| \begin{array}{c} v_1^{\circ(k-l)} \\ -u_1^{\circ(k-l)} - 1 \end{array} \right\|$$

$$\theta_{,\alpha}^{(k,l)} = (-1)^{l+1} l^{\circ(k-l)}, \quad l^{\circ(k-l)} = l^{(k-l)} / L$$

$$\delta_{k-l,k} = 1 \quad (i=0), \quad \delta_{k-l,k} = 0 \quad (i=1)$$

$$F^{(k)} = \int f dx, \quad m^{(k)} = m^{(k)T} \left\| \begin{array}{c} -\sin \beta^{(k)} \\ \cos \beta^{(k)} \end{array} \right\| + m^{V(k)}$$

$$m^{(k)} = \int x f dx, \quad m^{V(k)} = \int \eta dx$$

где  $M_0$ ,  $M^2$  — масса несущего тела и суммарная масса системы;  $g_c$ ,  $I_0$  — радиус-вектор центра инерции несущего тела в системе координат несущего тела и соответствующий момент инерции;  $L$  — характерный размер;  $E$  — единичная матрица;  $F_0$ ,  $m_0$  — вектор сил и момент, действующие на несущее тело;  $f$ ,  $\eta$  — обобщенные погонные вектор сил и момент, действующие на гибкий стержень.

Уравнения (4.2), описывающие движение несущего тела, допускают дальнейшие упрощения. Для этого необходимо воспользоваться выражениями из системы (4.3) для  $\ddot{r}_0^{\circ(k)}$  и  $\ddot{\beta}^{(k)}$ . В итоге получим

$$\begin{aligned} & (M_0^\circ + M^{\circ(1)}) \ddot{r}_0^\circ - L(\beta) \left[ (\beta E^* + \beta^2 E) (M_0^\circ r_c^\circ + M^{\circ(1)} r_0^{\circ(1)}) - \sum_{j=1}^2 g_j^{\circ(1)} H_{j,\alpha}^{(2,1)} \right] - \\ & - L(\beta^{(1)}) (\beta^{(1)} E^* + \beta^{(1)2} E) S^{\circ(1)} - F_0^\circ - F^{\circ(1)} = 0 \\ & \{U_0^\circ + r_0^{\circ(1)T} [M^{(1)} r_0^{(1)} + L(\alpha^{(1)}) S^{\circ(1)}]\} \beta + \\ & + [l^{\circ(1)} + r_0^{\circ(1)T} L(\alpha^{(1)}) S^{\circ(1)}] \beta^{(1)} + (\beta^2 - \beta^{(1)2}) r_0^{\circ(1)T} E^* L(\alpha^{(1)}) S^{\circ(1)} + \\ & + [S_0^\circ + M^{\circ(1)} r_0^{\circ(1)} + L(\alpha^{(1)}) S^{\circ(1)}]^T L^T(\beta) E^* r_0^\circ + \\ & + \sum_{j=1}^2 g_j^{\circ(1)} (r_0^{\circ(2)T} E^* H_{j,\alpha}^{(2,1)} + H_{j,\alpha}^{(2,1)}) - m_0^\circ - m^{\circ(1)} = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Второе уравнение системы (4.3) (для фиксированного  $k$ ) также можно преобразовать с учетом первого и привести к виду

$$\begin{aligned} & (l^{\circ(k)} - M^{\circ(k)-1} S^{\circ(k)T} S^{\circ(k)}) \beta^{(k)} + \sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^2 g_j^{\circ(k-i)} H_{j,\alpha}^{(k,i)} - \\ & - M^{\circ(k)-1} S^{\circ(k)T} L^T(\alpha^{(k)}) E^* \left( \sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^2 g_j^{\circ(k-i)} H_{j,\alpha}^{(k,i)} - L^T(\beta) F^{\circ(k)} \right) - m^{\circ(k)} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

5. Численное интегрирование нелинейных уравнений движения. Обычно для решения системы связанных линейных уравнений движения используется метод разложения по собственным формам, позволяющий записать эти уравнения в несвязанном виде путем перехода к нормальным координатам. Однако для задач нелинейной динамики упругих систем это осуществить не удастся. Поэтому в работе используется прямое пошаговое интегрирование уравнений движения.

Известны многочисленные алгоритмы прямого численного интегрирования: одношаговые и многошаговые методы, явные и неявные схемы. Однако не существует таких алгоритмов, которые были бы одновременно просты в реализации, устойчивы и не связаны с искусственным затуханием решения. Тем не менее определенные успехи в этом направлении известны. Наиболее подходящими считаются метод Ньюмарка [8, 9] и  $\theta$ -метод Вилсона [8, 10], хотя каждый из них обладает недостатками в конкретных задачах.

В работе используется неявный  $\theta$ -метод Вилсона. Этот выбор сделан на основе опыта настоящих исследований и рекомендаций, известных в литературе (см., например, [11]).

Кратко остановимся на сути  $\theta$ -метода Вилсона. Предполагается, что ускорение изменяется линейно на некотором расширенном интервале времени  $T = \theta\tau$ , где  $\tau$  — временной шаг,  $\theta > 1,37$  [8, 10].

Пусть  $v(t)$  — вектор-столбец решения задачи. Нижним индексом будем помечать величину  $v$  на конце  $i$ -го шага по времени.

Для текущего момента времени  $t$  из отрезка  $0 \leq t \leq T$  принимается линейная зависимость вектора

$$\ddot{v}(t) = \ddot{v}_i + \frac{t}{T} (\ddot{v}_{i+1}^+ - \ddot{v}_i) \quad (5.1)$$

где знак плюс отвечает вектору на конце расширенного временного интервала.

Интегрируя по времени (5.1), получим

$$\dot{v}(t) = \dot{v}_i + t\ddot{v}_i + \frac{t^2}{2T} (\ddot{v}_{i+1}^+ - \ddot{v}_i)$$

$$v(t) = v_i + t\dot{v}_i + \frac{t^2}{2} \ddot{v}_i + \frac{t^3}{6T} (\ddot{v}_{i+1}^+ - \ddot{v}_i)$$

Для момента  $t = T$ :

$$\dot{v}_{i+1}^+ = \dot{v}_i + \frac{T}{2} (\ddot{v}_{i+1}^+ + \ddot{v}_i) \quad (5.2)$$

$$v_{i+1}^+ = v_i + T\dot{v}_i + \frac{T^2}{6} (\ddot{v}_{i+1}^+ + 2\ddot{v}_i)$$

Из последнего выражения получаем

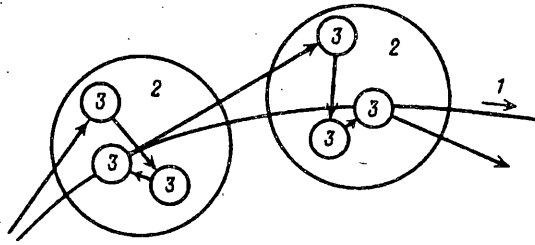
$$\ddot{v}_{i+1}^+ = \frac{6}{T^2} (v_{i+1}^+ - v_i) - \frac{6}{T} \dot{v}_i - 2\ddot{v}_i \quad (5.3)$$

Подставляя (5.3) в (5.2), приходим к выражению и для  $\dot{v}_{i+1}^+$ :

$$\dot{v}_{i+1}^+ = \frac{3}{T} (v_{i+1}^+ - v_i) - 2\dot{v}_i - \frac{T}{2} \ddot{v}_i \quad (5.4)$$

Для определения  $v_{i+1}^+$  используются уравнения движения при  $t = T$ . После этого вычисляются искомые векторы на конце обычного шага  $\tau$ , являющиеся начальными условиями для следующего шага вычислений:

$$\ddot{v}_{i+1} = \frac{6\tau}{T^3} (v_{i+1}^+ - v_i) - \frac{6\tau}{T^2} \dot{v}_i + (1 - \frac{3\tau}{T}) \ddot{v}_i$$



Фиг. 3

$$\dot{v}_{i+1} = \dot{v}_i + \frac{\tau}{2} (\ddot{v}_{i+1} + \ddot{v}_i)$$

$$v_{i+1} = v_i + \tau \dot{v}_i + \frac{\tau^2}{6} (\ddot{v}_{i+1} + 2\ddot{v}_i)$$

6. Схема построения алгоритма. После подстановки формул (5.3), (5.4) в уравнения движения (4.3)—(4.6), получаем весьма сложную неалгебраическую систему уравнений относительно искомого вектора  $v_{i+1}^*$ . Для решения этой системы используется итеративная процедура Ньютона — Рафсона.

Условно расчет можно представить в виде трех вложенных друг в друга численных процесса (фиг. 3). Первый — движение по линии конфигураций модели с шагом по параметру времени методом Вилсона. Второй — итеративный процесс по схеме Ньютона — Рафсона, позволяющий свести решение системы нелинейных уравнений к упорядоченному решению серии связанных линейных задач. Выбор относительно малого шага интегрирования обуславливает сходимость последовательности решений этих линейных задач. И наконец третий процесс — решение для данной итерации линейной алгебраической системы уравнений.

Итеративный процесс Ньютона — Рафсона сопряжен с вычислением матрицы Якоби. Последняя имеет квазиленточный вид. Это свойство можно использовать для компактного размещения элементов матрицы Якоби в матричные блоки, что позволяет экономно организовать алгоритм вычислений и хранение массивов в памяти компьютера.

Следует отметить, что вычисление матрицы Якоби, ее обращение или приведение к треугольному виду (при решении линейной системы методом Гаусса) для каждой итерации не целесообразно. Достаточно сделать это один раз в пределах нескольких ( $\sim 5-10$ ) итераций. Это позволяет заметно сократить время расчетов несмотря на увеличение числа итераций.

Элементы матрицы Якоби можно вычислять численно. Однако в работе для производных по обобщенным координатам получены аналитические выражения. Эта операция оказывается не столь трудоемкой, если заметить, что основное затруднение вызывает вычисление производных величин  $N_j$  и  $H_{j,\alpha}$  ( $j=1,2$ ; см. пояснения к уравнениям (4.3), (4.4)).

Если ввести обозначения

$$H_{j,(p)}^{(k,i)} = \left\| \frac{\partial N_j^{(k,i)}}{\partial X_0^{\circ(p)}} \quad \frac{\partial N_j^{(k,i)}}{\partial Y_0^{\circ(p)}} \right\|_{4 \times 4}, \quad H_{j,\alpha,(p)}^{(k,i)} = \left\| \frac{\partial H_{j,\alpha}^{(k,i)}}{\partial X_0^{\circ(p)}} \quad \frac{\partial H_{j,\alpha}^{(k,i)}}{\partial Y_0^{\circ(p)}} \right\|_{2 \times 1}$$

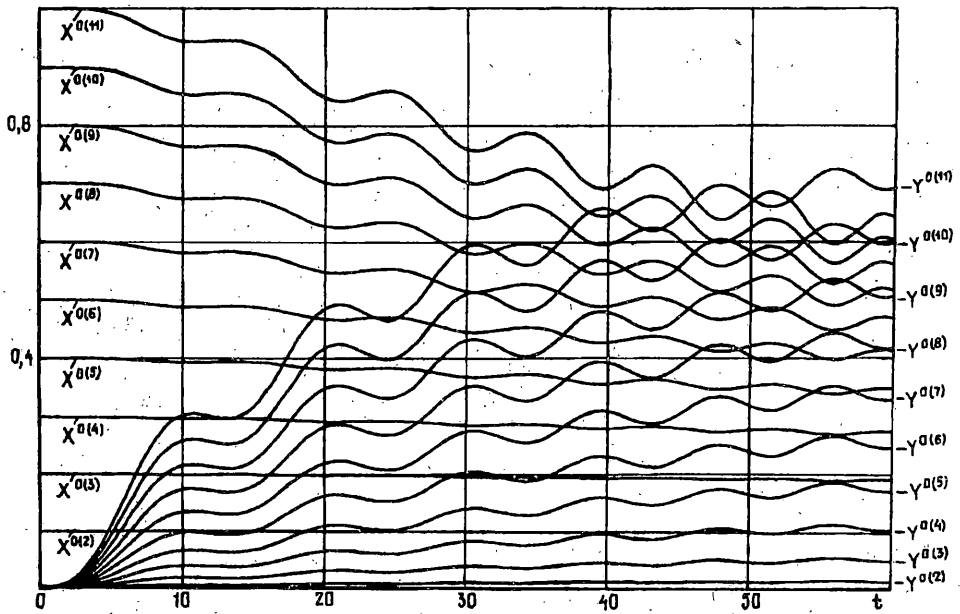
(где  $X_0^{\circ(p)}$  и  $Y_0^{\circ(p)}$  — компоненты вектора-столбца  $r_0^{\circ(p)} = r_0^{(p)} / L$ )

$$N_{j,\alpha(p)}^{(k,i)} = \partial N_j^{(k,i)} / \partial \alpha^{(p)}, \quad H_{j,\alpha,\alpha(p)}^{(k,i)} = \partial H_{j,\alpha}^{(k,i)} / \partial \alpha^{(p)}$$

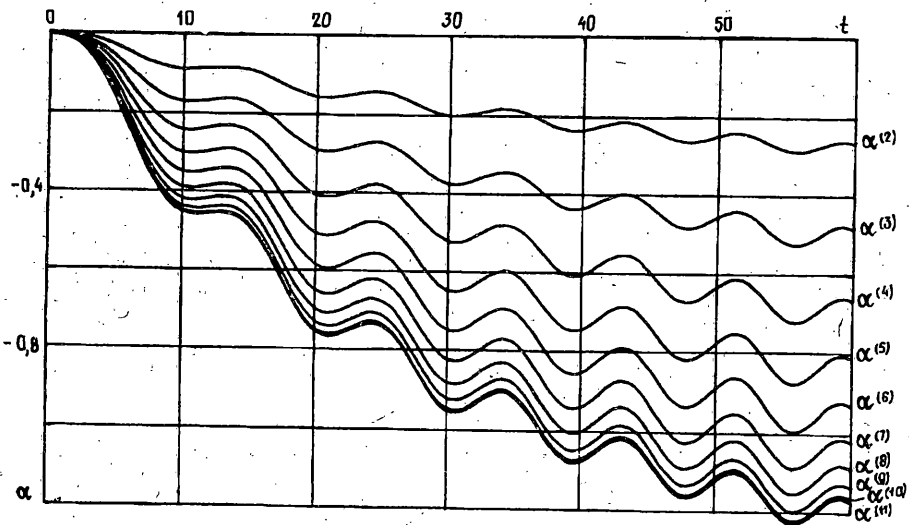
причем эти величины равны тождественно нулю при  $p \neq k-1, k, k+1$ , то можно установить следующие связи:

$$N_{j,\alpha(k+1)}^{(k,0)} = -N_{j,\alpha(k+1)}^{(k+1,1)}, \quad H_{j,\alpha,\alpha(k+1)}^{(k,0)} = H_{j,\alpha,\alpha(k)}^{(k+1,1)}$$





Фиг. 4



Фиг. 5

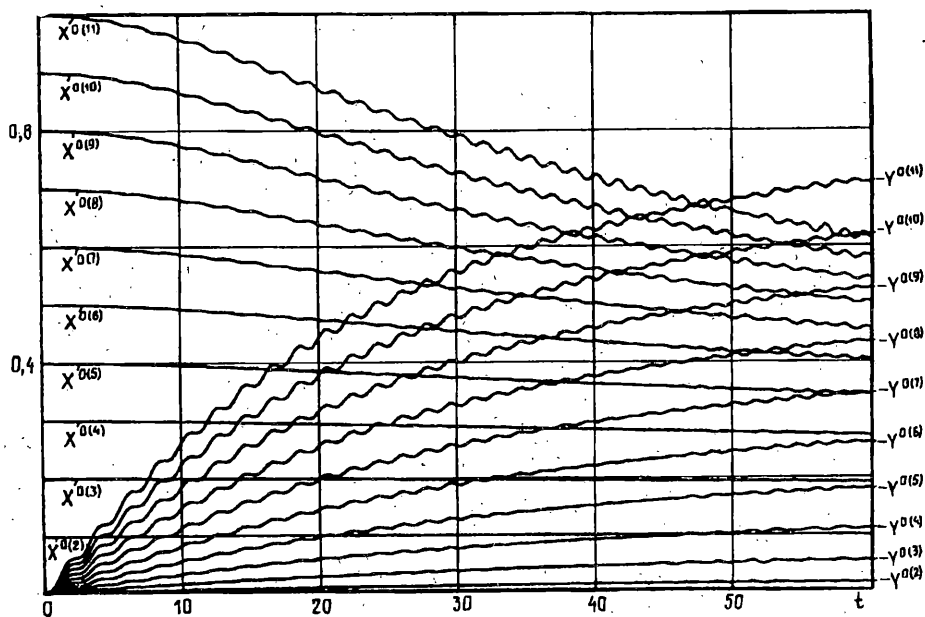
$$H_{j,\alpha(k+1)}^{(k,0)} = -H_{j,\alpha(k+1)}^{(k+1,1)}, \quad H_{j,\alpha(k+1)}^{(k,0)} = H_{j,\alpha(k)}^{(k+1,1)}$$

$$H_{j,\alpha(k)}^{(k,0)} = -H_{j,\alpha(k)}^{(k+1,1)}, \quad H_{j,\alpha(k)}^{(k,0)} = H_{j,\alpha(k+1)}^{(k+1,1)}$$

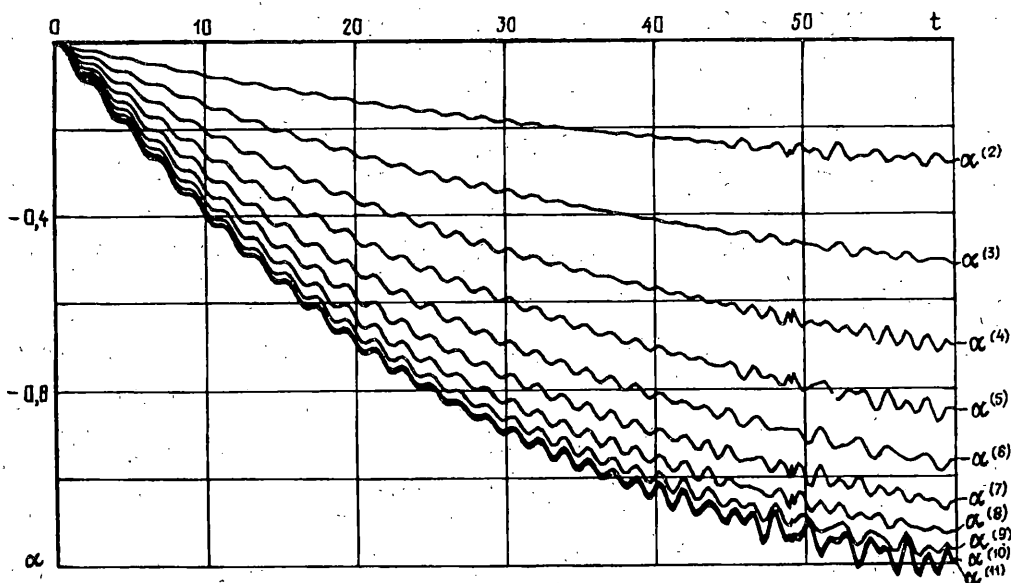
$$H_{j,\alpha(k)}^{(k,0)} = H_{j,\alpha(k)}^{(k,0)}, \quad H_{j,\alpha(k)}^{(k,1)} = H_{j,\alpha(k)}^{(k,1)}$$

$$H_{j,\alpha(k-1)}^{(k,1)} = -H_{j,\alpha(k)}^{(k,1)}, \quad H_{j,\alpha(k-1)}^{(k,1)} = -H_{j,\alpha(k)}^{(k,1)}$$

Эти формулы упрощают алгоритм, сводя к минимуму требуемые вычисления.



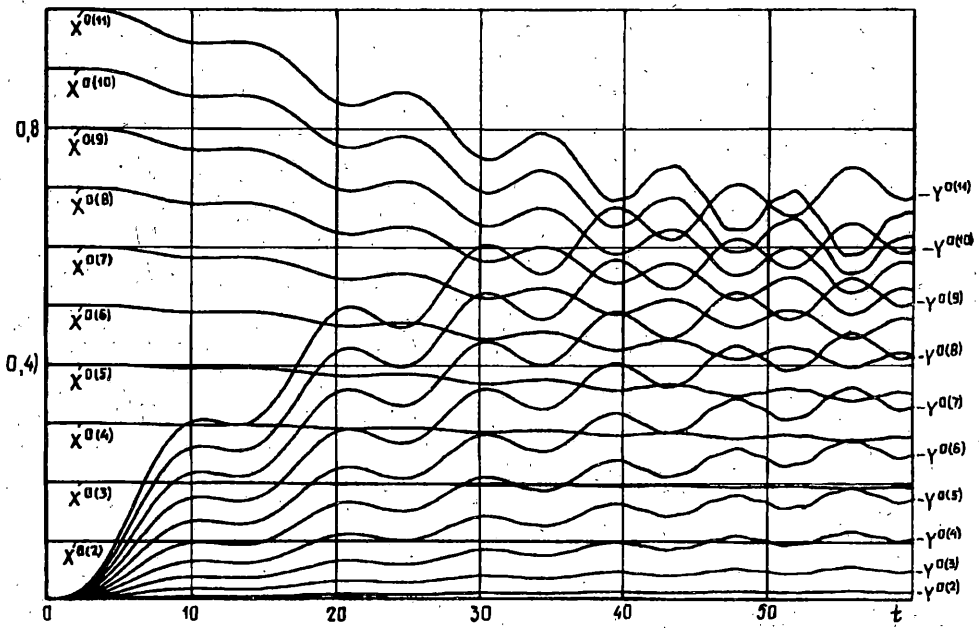
Фиг. 6



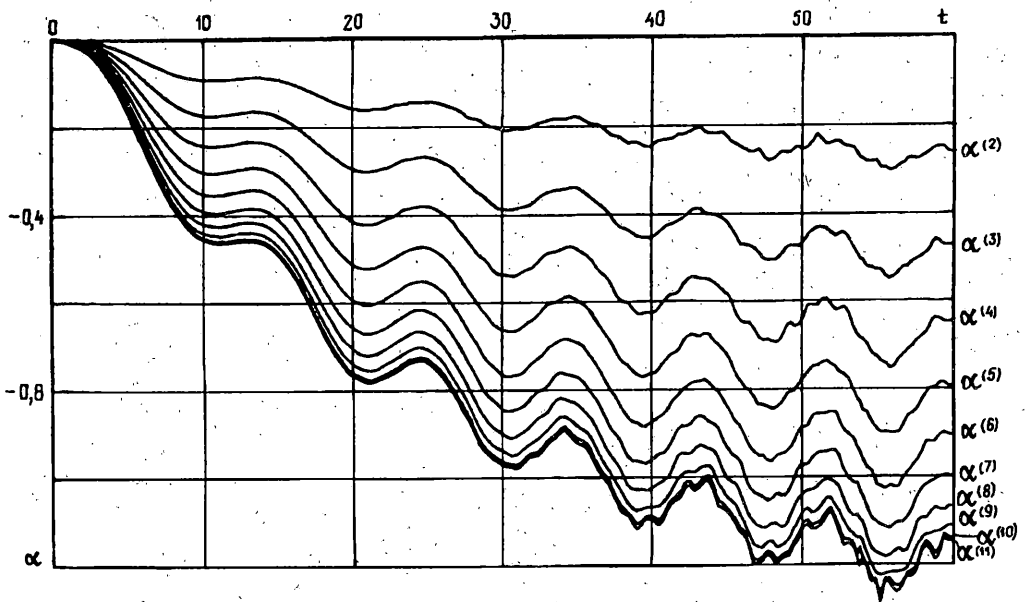
Фиг. 7

Расчеты осуществлялись на Micro VAX-II в операционной среде VAX/VMS.

7. Пример расчета и оценки точности. Исследовалась динамическая реакция гибкого прямолинейного стержня длиной 10 м, консольно закрепленного на одном конце и нагруженного на другом силой  $P$ . Характеристики стержня: плотность  $\rho = 0,28 \cdot 10^4$  [кг/м<sup>3</sup>],  $EF = 0,72 \cdot 10^7$  [Н],  $EJ = 0,6 \cdot 10^2$  [Н · м<sup>2</sup>],  $GF_c = 0,28 \cdot 10^7$  [Н]. Нагружение осуществлялось параллельно оси  $Y$  по закону:  $P = -t/20$  [Н],  $0 \leq t \leq 60$  [с]. Стержень сначала разбивался на 10 элементов, затем на 20.



Фиг. 8



Фиг. 9

Интегрирование осуществлялось с шагом 0,01 секунды; шаг записи информации составлял 0,3 секунды.

Сравнение результатов при  $N = 10$  и  $N = 20$  ( $N$  — число элементов) показало их полное совпадение по перемещениям, углам поворота и линейным скоростям. Наблюдалось незначительное отличие лишь по угловым скоростям. На фиг. 4 и 5 представлено развитие прогиба во времени. Здесь и далее на фигурах по оси абсцисс отсчитывается время в секундах, по оси ординат отсчитываются относительные координаты расчетных точек  $X^{(k)} = X^{(k)}/L$ ,  $Y^{(k)} = Y^{(k)}/L$  ( $L = 10$  м) и углы поворота сечений  $\alpha^{(k)}$  [рад]. Колебания происходят относительно кривых точного статического решения — элаستي Эйлера.

Очевидно, что при уменьшении массовых характеристик стержня решение должно стремиться к статическому решению. Такой эксперимент был осуществлен: исследовалась динамика того же стержня, массовые характеристики которого были искусственно уменьшены по сравнению с исходными в 30 раз. Результаты показали хорошее соответствие физическим представлениям о характере деформирования (фиг. 6, 7). Шаг интегрирования составлял 0,004 секунды.

Наконец, проанализировано влияние учета квадратичных членов в представлении (2.2) на решение задачи. Был произведен расчет при  $P_1 = 0$ . Сходимость итерационного процесса обеспечивалась уже меньшим шагом интегрирования, величина которого выбиралась от 0,001 до 0,008 секунды. Результаты показаны на фиг. 8, 9. Интересно отметить их отличие от соответствующих кривых на фиг. 4, 5: наблюдается высокочастотное искажение динамической реакции стержня. В этом случае по-видимому можно говорить об освобождении системы от дополнительных «связей», делающих систему более инерционной или динамически жесткой. Это указывает на то, что уточненный динамический расчет гибкой системы должен опираться на нелинейные выражения для деформаций элементов системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.  
Код 93-013-16490.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. 824 с.
2. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987. 232 с.
3. Светлицкий В. А. Механика стержней. В двух частях. М.: Высш. школа, 1987; Ч. 1: Статика, 320 с.; Ч. 2: Динамика, 304 с.
4. Усюкин В. И. Строительная механика конструкций космической техники.— М.: Машиностроение, 1998, 392 с.
5. Simo J. C., Vu-Quoc L. On the dynamics in space of rods undergoing large motion — A geometrically exact approach//Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 1988. № 66. P. 125—161.
6. Iura M., Atluri S. N. On a consistent theory, and variational formulation of finitely stretched and rotated 3—D space-curved beams//Comp. Mechanics. 1989. № 4: P. 73—88.
7. Строительная механика летательных аппаратов./Под ред. И. Ф. Образцова. М.: Машиностроение, 1986. 536 с.
8. Еришов Н. Ф., Шахверди Г. Г. Метод конечных элементов в задачах гидродинамики и гидроупругости.— Л.: Судостроение, 1984. 236 с.
9. Newmark N. M. A method of computation for structural Dynamics//J. Eng. Mech. Division: ASCE. 1959. V. 85. EM3. P. 67—69.
10. Bathe K. J., Wilson E. L. Stability and accuracy analysis of direct integration methods//Earth. Eng. Struct. Dynamics. 1973. V. 1. P. 283.
11. Weeks G. E. Dynamic Analysis of a Deployable Space Structure//J. Spac. and Rock. 1986. V. 23. № 1. P. 102—107.

Москва

Поступила в редакцию  
28.VII.1993