

УДК 624.07.534.1

© 1994 г. В. А. СВЕТЛИЦКИЙ

## СТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ, ВЫЗВАННЫЕ СЛУЧАЙНЫМ КИНЕМАТИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

Изложен метод численного определения напряженно-деформированного состояния упругих стержневых элементов приборов при малых колебаниях, вызванных случайным кинематическим возбуждением. Приводится алгоритм определения вероятностных характеристик напряженно-деформированного состояния стержня, необходимый для оценки его прочности, надежности и ресурса.

1. Колебания стержня, вызванные случайным смещением основания. Упругие стержневые элементы машин и приборов имеют широкое распространение в технике [1, 2]. Они используются, например, в качестве чувствительных элементов средств измерений и низкочастотных фильтров (фиг. 1) [3]. В реальных условиях работы они нагружаются как детерминированными, так и случайными силами. Действие случайных нагрузок приводит к ошибкам в показаниях прибора, а также к накоплению усталостных повреждений упругих элементов, т. е. к уменьшению их надежности.

Среди причин, вызывающих случайные колебания возможно и случайное кинематическое возбуждение, когда основание, с которым связан упругий элемент или произвольное сечение стержня имеют принудительное случайное смещение. На фиг. 1 принудительное случайное смещение основания обозначено  $u_c(t)$ . Влияние на напряженно-деформированное состояние упругих стержневых элементов случайных составляющих сил инерции были рассмотрены в [2, 4], где приводятся основные уравнения малых колебаний пространственно-криволинейного нерастяжимого (без учета инерции вращения и сдвига) стержня, которые используются в данной работе при исследовании кинематически возбуждаемых колебаний.

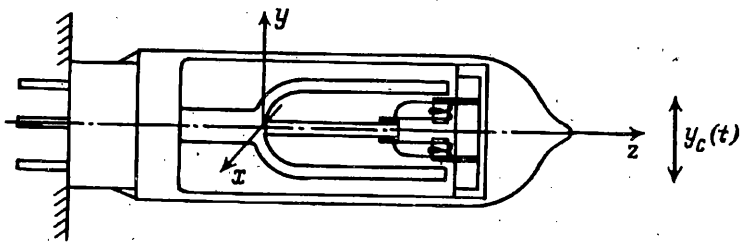
На фиг. 2, а показано исходное состояние стержня. Заделка стержня (точка  $O$ ) поступательно перемещается в заданном направлении. Это перемещение задается случайным по модулю и направлению вектором  $u^{(0)}(0, \tau)$ , где  $\tau$  безразмерное время. Вектор  $u(\varepsilon, \tau)$ , показанный на фиг. 2, б характеризует колебания стержня относительно его исходного состояния в системе декартовых осей  $(x_j)$  поступательно движущихся вместе со стержнем. Вектор перемещения элемента стержня равен

$$r = r_0 + u^{(0)}(0, \tau) + u(\varepsilon, \tau), \quad (u^{(0)}(0, \tau) = u^{(0)}(0, \tau) e_0) \quad (1)$$

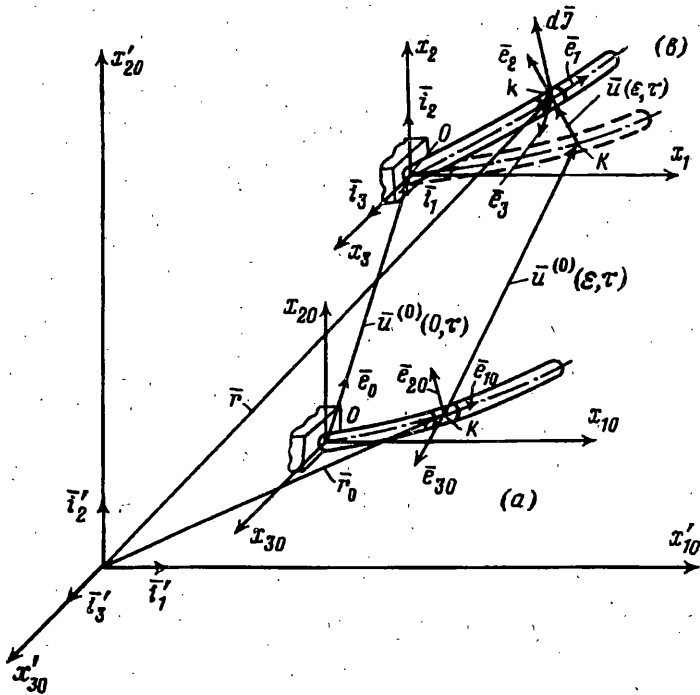
Поэтому после преобразований и приведения к безразмерному виду [2] получаем следующую линейную систему дифференциальных уравнений, описывающих малые колебания стержня относительно состояния равновесия в связанных осях:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial \tau^2} + \alpha_k \frac{\partial u_k}{\partial \tau} - \frac{\partial Q_k}{\partial \varepsilon} - \varepsilon_{klj} \kappa_l Q_{0j} - \varepsilon_{klj} \kappa_l Q_j = - \frac{\partial^2 u_k^{(0)}}{\partial \tau^2} \quad (2)$$

$$\partial M_k / \partial \varepsilon + \varepsilon_{klj} \kappa_l M_{0j} + \varepsilon_{klj} \kappa_l M_j + \varepsilon_{kl} Q_l = 0 \quad (3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\partial \vartheta_k / \partial \varepsilon + \varepsilon_{klj} \kappa_{0l} \vartheta_j - \kappa_k = 0 \quad (4)$$

$$\partial u_k / \partial \varepsilon + \varepsilon_{klj} \kappa_{0l} u_j - \varepsilon_{klj} \vartheta_l = 0, \quad (5)$$

$$M_k = A_{(kk)} \kappa_k \quad (6)$$

где  $\varepsilon_{klj}$  — символы Леви-Чивита;  $Q_k$ ,  $M_k$  — соответственно проекции внутренней силы и момента, возникающих при колебаниях;  $Q_{0k}$ ,  $M_{0k}$  — статические составляющие векторов  $Q$  и  $M$ ;  $\kappa_k$  — кручение ( $k=1$ ) и кривизны ( $k=2, 3$ ) осевой линии стержня приращения;  $\kappa_{0l}$  — компоненты вектора  $\kappa^{(0)}$ , характеризующего статическое состояние стержня;  $\vartheta_k$  — углы поворота связанных осей;  $\alpha_k$  — коэффициенты сил вязкого сопротивления;  $\varepsilon$ ,  $\tau$  — соответственно безразмерная дуговая координата и безразмерное время.

Кинематическое возмущение входит только в уравнения (2), так как рассматривается случайное линейное смещение основания. Возможны, конечно, и более сложные кинематические возбуждения, когда основание получает случайные

как линейные, так и угловые смещения. В уравнения (2)—(6) входят величины, характеризующие статическое напряженно-деформированное состояние  $Q_{0k}$ ,  $M_{0k}$  и  $\kappa_{0k}$ , которые определяются в общем случае из системы нелинейных уравнений равновесия стержня [1].

Для дальнейших преобразований и численного решения систему линейных уравнений (2)—(6) удобнее представить как систему векторных уравнений вида (исключив  $\kappa$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau^2} + A_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} - A_Q A^{-1} \mathbf{M} - A_x \mathbf{Q} &= -\frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(0)}}{\partial \tau^2} \\ \partial \mathbf{M} / \partial \varepsilon + (A_M A^{-1} + A_x) \mathbf{M} + A_1 \mathbf{Q} &= 0 \\ \partial \mathbf{\vartheta} / \partial \varepsilon + A_x \mathbf{\vartheta} - A^{-1} \mathbf{M} &= 0 \\ \partial \mathbf{u} / \partial \varepsilon + A_x \mathbf{u} + A_1 \mathbf{\vartheta} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} A_x &= \begin{vmatrix} 0 & -\kappa_{03} & \kappa_{02} \\ \kappa_{03} & 0 & -\kappa_{01} \\ -\kappa_{02} & \kappa_{01} & 0 \end{vmatrix}, & A_Q &= \begin{vmatrix} 0 & Q_{03} & -Q_{02} \\ -Q_{03} & 0 & Q_{01} \\ Q_{02} & -Q_{01} & 0 \end{vmatrix}, & A_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ A_M &= \begin{vmatrix} 0 & M_{03} & -M_{02} \\ -M_{03} & 0 & M_{01} \\ M_{02} & -M_{01} & 0 \end{vmatrix}, & A_\alpha &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{vmatrix}, & A &= \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Для численного решения систему уравнений (7) удобнее представить в виде одного векторного уравнения

$$\mathbf{L} = A^{(1)} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial \tau^2} + A^{(2)} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \varepsilon} + A^{(3)} \mathbf{Z} - \mathbf{b}_0 = 0 \quad (8)$$

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4)^T = (\mathbf{Q}, \mathbf{M}, \mathbf{\vartheta}, \mathbf{u})^T, \quad \mathbf{b}_0 = \left( -\frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(0)}}{\partial \tau^2}, 0, 0, 0 \right)^T$$

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & A^{(2)} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -A_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ A^{(3)} &= \begin{vmatrix} A_x & A_Q A^{-1} & 0 & 0 \\ A_1 & A_M A^{-1} + A_x & 0 & 0 \\ 0 & -A^{-1} & A_x & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Для анализа влияния кинематического случайного перемещения опоры на напряженно-деформированное состояние стержня надо решить систему (7) или уравнение (8) и найти вероятностные характеристики компонент векторов  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{\vartheta}$ ,  $\mathbf{u}$ . Приближенное решение уравнения (8) можно получить полагая:

$$\mathbf{Z} = \sum_{j=1}^n f^j(\tau) \mathbf{Z}_0^{(j)}(\varepsilon) \quad (9)$$

где  $\mathbf{Z}_0^{(k)}$  — собственные векторы краевой задачи, которые определяются при решении уравнения свободных колебаний стержня (уравнение (8) при  $\mathbf{b}_0 = 0$ ,  $\alpha_j = 0$ ):

$$A^{(1)} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}^{(0)}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \mathbf{Z}^{(0)}}{\partial \varepsilon} + A^{(2)} \mathbf{Z}^{(0)} = 0 \quad (10)$$

Полагая

$$\mathbf{Z}^{(0)} = \mathbf{Z}_0 \exp(i\lambda\tau), \quad \mathbf{Z}_0 = (\mathbf{Q}^{(0)}, \mathbf{M}^{(0)}, \mathfrak{F}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)})^T = (\mathbf{Z}_{01}, \mathbf{Z}_{02}, \mathbf{Z}_{03}, \mathbf{Z}_{04})^T$$

получим уравнение

$$\mathbf{Z}_0' + \mathbf{A}(\lambda, \varepsilon) \mathbf{Z}_0 = \mathbf{0} \quad (\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(3)} - \lambda^2 \mathbf{A}^{(1)}) \quad (11)$$

Решение уравнения (11) имеет вид

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{K}(\lambda, \varepsilon) \mathbf{C} \quad (\mathbf{C} = (\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4)^T) \quad (12)$$

Вектор  $\mathbf{Z}_0$  для случая показанного на фиг. 2 должен удовлетворять крайним условиям

$$\mathbf{Z}_{03} = \mathfrak{F}^{(0)} = 0, \quad \mathbf{Z}_{04} = \mathbf{u}^{(0)} = 0 \quad \text{при } \varepsilon = 0$$

$$\mathbf{Z}_{01} = \mathbf{Q}^{(0)} = 0, \quad \mathbf{Z}_{02} = \mathbf{M}^{(0)} = 0 \quad \text{при } \varepsilon = 1$$

В результате для определения  $\mathbf{C}_1$  и  $\mathbf{C}_2$  ( $\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_4 = 0$ ) имеем следующую систему однородных уравнений

$$K_{11}(\lambda, 1) \mathbf{C}_1 + K_{12}(\lambda, 1) \mathbf{C}_2 = 0, \quad K_{21}(\lambda, 1) \mathbf{C}_1 + K_{22}(\lambda, 1) \mathbf{C}_2 = 0 \quad (13)$$

Уравнения (13) позволяют определить собственные значения краевой задачи (частоты)  $\lambda_j$ , а затем собственные векторы  $\mathbf{Z}_0^{(j)}$ .

Воспользуемся при приближенном решении уравнения (8) методом, изложенным в [2]. Полагаем обобщенные возможности перемещения равными

$$\delta \mathbf{Z}^{(j)} = \delta b_j E_0 \mathbf{Z}_0^{(j)} \quad (14)$$

$$E_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \left( E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

В соответствии с алгоритмом применения принципа возможных перемещений при приближенном решении уравнения (8) получим систему уравнений вида

$$\int_0^1 [\mathbf{L}(\mathbf{f}^{(j)} \mathbf{Z}_0^{(j)}) E_0 \mathbf{Z}_0^{(j)}] d\varepsilon = 0 \quad (j = 1, 2 \dots n) \quad (15)$$

После преобразований получаем систему уравнений относительно функций  $\mathbf{f}^{(j)}$  ( $\tau$ ). Например, для двухчленного приближения получаем уравнение

$$\ddot{\mathbf{f}} + \mathbf{B}^{(1)} \dot{\mathbf{f}} + \mathbf{D} \mathbf{f} = \mathbf{b} \quad (\mathbf{f} = (\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)})^T) \quad (16)$$

$$\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{C}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{b}_0$$

Элементы матриц  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и компоненты вектора  $\mathbf{b}$  определяются соответственно из соотношений

$$a_{ij} = - \int_0^1 (\mathbf{Z}_{04}^{(j)} \mathbf{Z}_{04}^{(j)}) d\varepsilon, \quad b_{ij} = - \int_0^1 A_{\alpha} \mathbf{Z}_{04}^{(j)} \mathbf{Z}_{04}^{(j)} d\varepsilon$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^4 (\mathbf{Z}_{04}^{(j)} \mathbf{Z}_{(3-k)}^{(j)}) + \int_0^1 (\mathbf{A}^{(3)} \mathbf{Z}_0^{(j)} E_0 \mathbf{Z}_0^{(j)}) d\varepsilon$$

$$b_0 = - \int_0^1 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(0)}}{\partial \tau^2} \mathbf{Z}_{04}^{(j)} d\varepsilon \quad (i = 1, 2, j = 1, 2)$$

В дальнейшем ограничимся стационарными случайными колебаниями стержня, что возможно если кинематическое возбуждение есть случайная стационарная функция. Возможны следующие случаи случайного кинематического возбуждения, вызванного линейным смещением отдельных точек осевой линии стержня: ли-

нейные случайные кинематические смещения случайны по модулю и не случайны по направлению; линейные случайные смещения случайны по модулю и направлению. Ограничимся первым случаем, когда стационарное кинематическое возбуждение случайно по модулю и не случайно по направлению.

В более подробной записи компоненты вектора  $\mathbf{b}_0$  имеют вид

$$b_{0i} = - \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(0)}}{\partial \tau^2} \right)_1 Z_{04,1}^{(0)} + \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(0)}}{\partial \tau^2} \right)_2 Z_{04,2}^{(0)} + \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(0)}}{\partial \tau^2} \right) Z_{04,3}^{(0)} \right] d\varepsilon \quad (17)$$

Вектор  $\mathbf{u}^{(0)}$  можно представить в связанных осях в виде

$$\mathbf{u}^{(0)}(\varepsilon, \tau) = \sum_{j=1}^3 u_j^{(0)} \mathbf{e}_j, \quad (u_j^{(0)} = |\mathbf{u}^{(0)}(0, \tau)| (e_{0j}, \mathbf{e}_j)) \quad (18)$$

Вектор  $\mathbf{e}_0$  задан в декартовых осях, т. е.  $\mathbf{e}_0 = \sum \gamma_v \mathbf{i}_v$  ( $v = 1, 2, 3$ ), поэтому после преобразований получаем выражения для  $u_j^{(0)}$ :

$$u_j^{(0)} = u^{(0)} \left[ \sum_{k=1}^3 \gamma_k (i_k \mathbf{e}_j) \right] \quad (u^{(0)} = |\mathbf{u}^{(0)}(0, \tau)|) \quad (19)$$

Скалярные произведения векторов  $(i_k \mathbf{e}_j)$  базиса  $\{i_j\}$  и  $\{\mathbf{e}_j\}$  при малых углах поворота сечения стержня относительно состояния покоя определяются с помощью матрицы преобразования [1]:  $L^{(1)} = LL^0$  ( $L^0 = \|l_{ij}^0(\varepsilon)\|$ ), где  $L^0$  — матрица преобразования базиса  $\{i_p\}$  к базису  $\{e_{p0}\}$ ,  $L$  — матрица преобразования базиса  $\{e_{p0}\}$  к базису  $\{\mathbf{e}_j\}$  (фиг. 2, а, б). При малых углах поворота имеем

$$L^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & \vartheta_3 & -\vartheta_2 \\ -\vartheta_3 & 1 & \vartheta_1 \\ \vartheta_2 & -\vartheta_1 & 1 \end{vmatrix}$$

где  $\vartheta_j$  — углы поворота связанных осей при колебаниях стержня. В более подробной записи матрица  $L^{(1)}$  имеет вид

$$L^{(1)} = \begin{vmatrix} l_{11}^0 + l_{21}^0 \vartheta_3 - l_{31}^0 \vartheta_2 & l_{12}^0 + l_{22}^0 \vartheta_3 - l_{32}^0 \vartheta_2 & l_{13}^0 + l_{23}^0 \vartheta_3 - l_{33}^0 \vartheta_2 \\ -l_{11}^0 \vartheta_3 + l_{21}^0 + l_{31}^0 \vartheta_1 & -l_{12}^0 \vartheta_3 + l_{22}^0 + l_{32}^0 \vartheta_1 & -l_{13}^0 \vartheta_3 + l_{23}^0 + l_{33}^0 \vartheta_1 \\ l_{11}^0 \vartheta_2 - l_{21}^0 \vartheta_1 + l_{31}^0 & l_{12}^0 \vartheta_2 - l_{22}^0 \vartheta_1 + l_{32}^0 & l_{13}^0 \vartheta_2 - l_{23}^0 \vartheta_1 + l_{33}^0 \end{vmatrix} \quad (20)$$

В результате вектор  $\mathbf{u}^{(0)}(\varepsilon, \tau)$  может быть представлен в виде

$$\mathbf{u}^{(0)}(\varepsilon, \tau) = u^{(0)} P(\varepsilon) \vartheta(\varepsilon, \tau) + \mathbf{u}_0^{(0)} (u_0^{(0)} = u^{(0)} L^0 \gamma) \quad (21)$$

где  $P(\varepsilon)$  — матрица, элементы которой зависят от  $\vartheta_j^0$ .

При малом значении модуля смещения  $u^{(0)}$  основания получаем более простое выражение для вектора  $\mathbf{u}^{(0)}(\varepsilon, \tau)$  в связанных осях  $\mathbf{u}^{(0)} = u^{(0)} L^0 \gamma$  ( $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ ), поэтому  $(\partial^2 \mathbf{u}^{(0)} / \partial \tau^2) = (\partial^2 u^{(0)} / \partial \tau^2) L^0 \gamma$ .

После преобразований получаем выражения для компонент  $b_{0i}$  вектора  $\mathbf{b}$ :

$$b_{0i} = -b_{0i}^{(0)} \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \tau^2} \left( b_{0i}^{(0)} = \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \tau^2} \int_0^1 (L^0 \gamma Z_{04}^{(0)}) d\varepsilon \right) \quad (22)$$

В результате получаем окончательное выражение для вектора  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{b} = A_0^{-1} \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \tau^2} \mathbf{b}_0^{(0)} \quad (\mathbf{b}_0^{(0)} = (b_{01}^{(0)}, b_{02}^{(0)})^T) \quad (23)$$

Найдем спектральные плотности и дисперсии компонент вектора  $\mathbf{Z}$ . Воспользовавшись преобразованием Фурье из уравнения (16) с учетом (23) получаем

$$\mathbf{f}(\omega) = W(i\omega) \mathbf{u}^{(0)}(\omega) \quad (24)$$

$$W(i\omega) = \| (i\omega)^2 + B^{(1)}(i\omega) + D \|^{-1} (i\omega)^2, \quad \mathbf{u}^{(0)}(\omega) = A_0^{-1} u^{(0)}(\omega) \mathbf{b}_0^{(0)}$$

Спектральные плотности компонент вектора  $f$  при двухчленном приближении равны

$$S_{f_k}(\omega) = |W_k(i\omega)|^2 S_u(\omega) \quad (k = 1, 2) \quad (25)$$

где  $S_u(\omega)$  — спектральная плотность случайной стационарной функции  $u^{(0)}$ . Получим спектральные плотности компонент вектора  $Z$  (9) при двухчленном приближении. В частотной области имеем  $Z_k(\omega, \varepsilon) = f^{(1)}(\omega) Z_{0k}^{(1)}(\varepsilon) + f^{(2)}(\omega) Z_{0k}^{(2)}(\varepsilon)$  или

$$Z_k(\omega, \varepsilon) = (w_1 Z_{0k}^{(1)} + w_2 Z_{0k}^{(2)}) u^\circ(\omega) \quad (26)$$

Из (26) получаем спектральные плотности компонент вектора  $Z$  и их дисперсии

$$S_{Z_k}(\omega) = |w_1 Z_{0k}^{(1)} + w_2 Z_{0k}^{(2)}|^2 S_u(\omega) \quad (27)$$

$$D_{Z_k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{Z_k}(\omega) d\omega \quad (28)$$

Определив дисперсии и считая, что компоненты вектора  $Z$  имеют нормальные распределения получим максимально возможные амплитудные значения  $Z_k$ , воспользовавшись правилом «трех сигм».

$$Z_k(\varepsilon)_{\max} = m_{Z_k}(\varepsilon) + 3\sigma_{Z_k}(\varepsilon) \quad (29)$$

где  $m_{Z_k}$ ,  $\sigma_{Z_k}$  — соответственно математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение компоненты  $Z_k$ .

Соотношение (29) позволяет определить координату сечения  $\varepsilon_k^*$ , где  $(Z_k)_{\max}$  достигает максимального значения

$$\max [Z_k(\varepsilon_k^*)_{\max}] = m_{Z_k}(\varepsilon_k^*) + 3\sigma_{Z_k}(\varepsilon_k^*) \quad (30)$$

Среди компонент вектора  $Z$  имеются компоненты ( $Q_j$  и  $M_j$ ), характеризующие напряженное состояние стержня, что позволяет оценить надежность и ресурс упругих стержневых элементов машин, приборов и конструкций при случайном кинематическом возбуждении.

2. Колебания стержня, вызванные случайным смещением произвольной точки осевой линии. Изложим методом численного решения уравнений малых колебаний стержня при кинематическом возбуждении, вызванным линейным случайным смещением произвольной точки осевой линии стержня.

На фиг. 3 показан стержень, точка  $K$  осевой линии которого принудительно смещается по направлению единичного вектора  $e_k$  случайным образом.

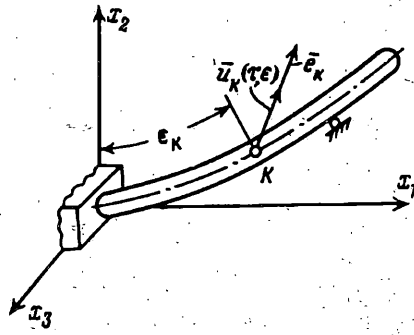
При принудительном смещении на стержень в точке  $K$  действует некоторая неизвестная сила  $P$ . Направление силы  $P$  в общем случае может не совпадать с направлением вектора  $u(\varepsilon_k, \tau)$  смещения сечения  $K$ . Сосредоточенная сила  $P$  после приведения к (безразмерной) форме записи войдет в первое уравнение системы (7) (остальные уравнения остаются без изменения)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau^2} + A_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} - A_Q A^{-1} \mathbf{M} - A_x \mathbf{Q} = P \delta(\varepsilon - \varepsilon_k) \quad (31)$$

Поэтому вектор  $\mathbf{b}_0$  в данном случае равен

$$\mathbf{b}_0 = (P \delta(\varepsilon - \varepsilon_k), 0, 0, 0)^T$$

Ограничившись двухчленным приближением при решении уравнения (8) с новой правой частью, после преобразования получаем уравнение относительно вектора  $f$  аналогичное уравнению (16):



Фиг. 3

$$\ddot{\mathbf{f}} + B^{(1)}\dot{\mathbf{f}} + D\mathbf{f} = \mathbf{b}^{(1)} \quad (32)$$

Вектор  $\mathbf{b}^{(1)}$  имеет следующие компоненты:  $b_1^{(1)} = P(\tau)Z_{04}^{(1)}(\epsilon_k)$ ,  $b_2^{(1)} = P(\tau)Z_{04}^{(2)}(\epsilon_k)$ . Компоненты  $P$ , неизвестной сосредоточенной силы  $P$  являются стационарными случайными функциями, так как кинематическое перемещение  $u_k(\epsilon, \tau)$  считается стационарной случайной векторной функцией. Поэтому воспользовавшись преобразованием Фурье из (32) получаем

$$\mathbf{f}(\omega) = W(i\omega) H(\epsilon_k) P(\omega) \quad (33)$$

$$H(\epsilon_k) = \begin{Bmatrix} Z_{04,1}^{(1)} & Z_{04,2}^{(1)} & Z_{04,3}^{(1)} \\ Z_{04,1}^{(2)} & Z_{04,2}^{(2)} & Z_{04,3}^{(2)} \end{Bmatrix}$$

Рассмотрим вектор  $Z_4(\epsilon, \tau)$ , входящий в вектор состояния  $Z$ , который характеризует перемещения точек осевой линии стержня. При двухчленном приближении вектор  $Z_4(\epsilon, \tau)$  равен  $Z_4(\epsilon, \tau) = f^{(1)}(\tau) Z_{04}^{(1)} + f^{(2)}(\tau) Z_{04}^{(2)}$  или

$$Z_4(\epsilon, \tau) = H^T(\epsilon) \mathbf{f}(\tau) \quad (34)$$

Воспользовавшись преобразованием Фурье и соотношением (33) получаем

$$Z_4(\epsilon, \omega) = H^T W(i\omega) H(\epsilon_k) P(\omega) \quad (35)$$

Компоненты вектора перемещений точек осевой линии стержня  $Z_4(\epsilon, \omega)$  должны при  $\epsilon = \epsilon_k$  удовлетворять следующим трем условиям:

$$Z_{4,\rho}(\epsilon_k, \omega) = u_k(\omega)(e_k e_\rho) \quad (e_k = \sum_{\nu=1}^3 \gamma_\nu e_\nu), \quad (\rho = 1, 2, 3) \quad (36)$$

которые требуют равенства проекций вектора  $u_k$  и проекций вектора  $Z_4$  на связанные оси. Считая модуль вектора  $u_k$  малым, как и в предыдущей задаче, ограничимся частным случаем когда

$$Z_4(\epsilon_k, \omega) = u_k^{(0)}(\omega) = u_k(\omega) L^\circ(\epsilon_k) \gamma, \quad \gamma_j = (i, e_k) \quad (37)$$

Приравняв правые части соотношений (35) и (37) получаем уравнение для определения неизвестной силы  $P$ :

$$u_k(\omega) L^\circ(\epsilon_k) \gamma = H^T(\epsilon_k) W H(\epsilon_k) P(\omega)$$

Откуда находим

$$P(\omega) = u_k(\omega) [(H^T W H)^{-1} L^\circ] \gamma \quad (38)$$

Исключая  $P(\omega)$  из соотношения (33) получим

$$f(\omega) = u_k(\omega) \gamma^{(1)} \quad (\gamma^{(1)} = WH(H^TWH)^{-1}L^0\gamma = B\gamma) \quad (39)$$

Определив вектор  $f(\omega)$ , получаем выражения для компонент вектора  $Z(\varepsilon, \omega)$  в частотной области

$$Z_\nu(\varepsilon, \omega) = f^{(1)}(\omega) Z_{0\nu}^{(1)} + f^{(2)}(\omega) Z_{0\nu}^{(2)} \quad (\nu = 1, 2, \dots, 12)$$

или с учетом (39):

$$Z_\nu(\varepsilon, \omega) = W_\nu(\varepsilon, \varepsilon_k, \omega) u_k(\omega) \quad (40)$$

$$W_\nu = \gamma_1^{(1)}(\varepsilon_k, \omega) Z_{0\nu}^{(1)}(\varepsilon) + \gamma_2^{(1)}(\varepsilon_k, \omega) Z_{0\nu}^{(2)}(\varepsilon)$$

Зная  $Z_\nu(\varepsilon, \omega)$  находим спектральные плотности и дисперсии компонент вектора состояния  $Z$ :

$$S_{Z_\nu}(\varepsilon, \varepsilon_k, \omega) = |W_\nu|^2 S_{u_k}(\omega),$$

$$D_{Z_\nu}(\varepsilon, \varepsilon_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{Z_k}(\varepsilon, \varepsilon_k, \omega) d\omega$$

которые позволяют оценить прочность и надежность стержня.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Светлицкий В. А. Механика стержней. Т. I (Статика). М.: Высш. школа, 1987. 304 с.
2. Светлицкий В. А. Механика стержней. Т. II (Динамика). М.: Высш. школа, 1987. 320 с.
3. Светлицкий В. А., Нарайкин О. С. Упругие элементы машин. М.: Машиностроение, 1989. 240 с.
4. Светлицкий В. А. Случайные колебания механических систем. М.: Машиностроение, 1991. 318 с.

Москва

Поступила в редакцию  
2.X.1993