

УДК 539.3

© 1994 г. Ф. Д. СОРОКИН

ПРЯМОЕ ТЕНЗОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ГИБКОГО СТЕРЖНЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕКТОРА КОНЕЧНОГО ПОВОРОТА

Получены общие соотношения упругости для гибкого стержня при больших перемещениях в пространстве. Вывод произведен вариационным методом с использованием векторной теории конечного поворота и системы аналитических преобразований тензорных выражений на ЭВМ. Полученные уравнения численно проинтегрированы на ЭВМ без перезаписи их в проекциях. Численные результаты сопоставлены с известными.

Наибольшая трудность при рассмотрении конечных перемещений деформируемых систем связана с проблемой описания больших поворотов. Для задания больших поворотов в теории гироскопа и инерциальной навигации привлекают углы Эйлера, ортогональные матрицы, спиновые матрицы Паули, дробно-линейные преобразования комплексной плоскости, векторы поворота и, даже, кватернионы Гамильтона [1,2]. В механике стержней обычно обходятся ортогональными матрицами и самолетными углами [3].

В данной работе большие повороты сечений гибкого стержня задаются вектором поворота ϑ (вектор Эйлера [2]), направление которого дает ось поворота, а величина $\theta = |\vartheta|$ — угол поворота. Такое описание больших поворотов наиболее естественно, однако, редко используется, так как приводит к громоздким уравнениям в проекциях, а сами проекции ϑ не являются углами и не имеют физического смысла.

Использование прямой тензорной записи устраняет эти недостатки (переход к проекциям не обязателен) и делает описание больших поворотов с помощью вектора Эйлера весьма привлекательным.

С вектором ϑ тесно связан тензор поворота [1]:

$$L = E \cos \theta + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \vartheta \vartheta + \frac{\sin \theta}{\theta} \vartheta \times E \quad (1)$$

обладающий свойством ортогональности $L^T \cdot L = L \cdot L^T = E$, где E — единичный тензор.

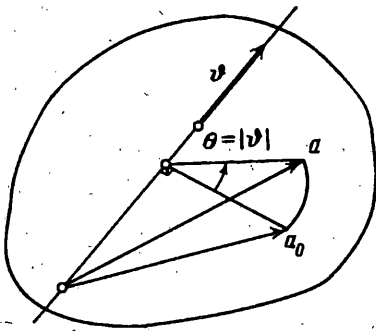
При повороте твердого тела (фиг. 1) вокруг ϑ на угол $|\vartheta|$ произвольный вектор a_0 , жестко связанный с телом («вмороженный» вектор), занимает новое положение a , определяемое формулой

$$a = L \cdot a_0 \quad (2)$$

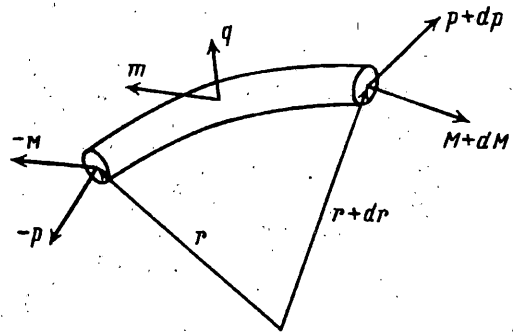
Если вращение тела вокруг неподвижной точки происходит непрерывно, причем направление оси поворота меняется, то

$$da/dt = \omega \times a \quad (3)$$

где ω — угловая скорость вращения тела, t — время. Подставляя (2) в (3) и опуская несущественный постоянный вектор a_0 , получим



Фиг. 1



Фиг. 2

$$dL/dt = \omega \times L \quad (4)$$

Соотношение (4) с учетом (1) позволяет выразить угловую скорость ω через вектор ψ и его производную по времени

$$\omega = B \cdot d\psi/dt \quad (5)$$

$$B = \frac{\sin \theta}{\theta} E + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \psi \psi + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \psi \times E$$

В приложении к [2] приводится обратное выражение, из которого (5) несложно найти. Другой путь — вычисление сопутствующего вектора от кососимметричного тензора $(dL/dt) \cdot L^T$. Для проведения подобных выкладок автором разработана компьютерная программа прямых тензорных аналитических преобразований Tens Alg, работающая под управлением системы аналитических вычислений Reduce [4].

Описанные выше векторы и тензоры необходимы для вывода общих соотношений упругости гибкого стержня. Вывод производится вариационным методом на основе хорошо известных уравнений равновесия элемента стержня (фиг. 2):

$$dP/ds + q = 0 \quad (6)$$

$$\frac{dM}{ds} + \frac{dr}{ds} \times P + m = 0 \quad (7)$$

где ds — элемент длины недеформированной оси стержня, r — радиус-вектор оси стержня, q, m — распределенные внешние нагрузки, отнесенные к исходной длине оси, P, M — внутренние сила и момент.

Согласно принципу возможных перемещений вариацию полного потенциала системы по перемещениям дает следующий интеграл:

$$\delta \Pi = - \int \left[\left(\frac{dP}{ds} + q \right) \cdot \delta r + \left(\frac{dM}{ds} + \frac{dr}{ds} \times P + m \right) \cdot B \cdot \delta \psi \right] ds \quad (8)$$

Здесь левая часть (6) умножена на виртуальное перемещение δr , левая часть (7) на виртуальный угол $B \cdot \delta \psi$ (согласно (5) малый угол ωdt , на котором совершает работу момент, приложенный к твердому телу, равен $B \cdot d\psi$, поэтому $\delta \psi$ не имеет смысла малого поворота, вектор малого поворота сечения есть $B \cdot \delta \psi$).

Для восстановления выражения полного потенциала Π в (8) необходимо вынести знак вариации δ за знак интеграла. Для этого положим $m = 0$ (внешний момент не потенциален при больших поворотах). Если $\delta \psi = 0$, то знак вариации выносится из интеграла без труда и получается, что Π должен иметь вид

$$\Pi = \int (P \cdot \frac{dr}{ds} - q \cdot r + \dots) ds \quad (9)$$

где многоточием обозначены слагаемые, не зависящие от r , а внеинтегральные члены опущены.

При варьировании Π по ϑ под интегралом (9) обязаны получаться соответствующие слагаемые из моментной части (8). Внешняя нагрузка q не меняется или отсутствует, поэтому при $\delta r = 0$, $\delta \vartheta \neq 0$, должно быть

$$\delta \left(P \cdot \frac{dr}{ds} \right) = - \left(\frac{dr}{ds} \times P \right) \cdot B \cdot \delta \vartheta \quad (10)$$

Так как r и ϑ описывают независимые степени свободы и, следовательно, варьируются независимо, то из (10) с неизбежностью следует, что сила P должна зависеть от ϑ . Этот вывод удивит тех механиков, которые привыкли рассматривать силы и перемещения как независимо варьируемые величины.

Опуская в (10) несущественный вектор dr/ds , получим

$$\delta P = -P \times B \cdot \delta \vartheta = (B \cdot \delta \vartheta) \times P \quad (11)$$

Сравнение (11) с (3) и (5) показывает, что сила P должна зависеть от ϑ точно так же, как замороженный в твердое тело вектор

$$P = L \cdot P_0 \quad (12)$$

где $P_0 = P_0(s)$ — не зависящий от ϑ вектор. То есть при изменении ϑ внутренняя сила P поворачивается вместе с сечением на одинаковый угол, оставаясь при этом неизменной по величине — направление внутренней силы следует за сечением.

Свойство (12) является следствием принципа материальной индифферентности [1] — энергия деформации не должна зависеть от поворотов механической системы, как жесткого целого (энергия может зависеть от P_0 , но не от P).

Из того же принципа следует, что и направление внутреннего момента должно следовать за поворотом сечения при изменении ϑ .

$$M = L \cdot M_0 \quad (13)$$

Весьма громоздкие аналитические выкладки, которые проводились на ЭВМ с помощью программы Tens Alg показывают, что свойство (13) позволяет вынести знак вариации за знак интеграла для моментного слагаемого в (8)

$$-\int \frac{d}{ds} (L \cdot M_0) \cdot B \cdot \delta \vartheta ds = \delta \int (L \cdot M_0) \cdot B \cdot \frac{d\vartheta}{ds} ds + \dots \quad (14)$$

где многоточием помечены внеинтегральные слагаемые.

Из (9), (14), а также из известных приемов построения смешанных функционалов упругих систем следует, что выражение полного потенциала гибкого стержня имеет вид

$$\Pi = \int \left[P \cdot \left(\frac{dr}{ds} - L \cdot t_0 \right) + M \cdot B \cdot \frac{d\vartheta}{ds} - \Phi - q \cdot r \right] ds \quad (15)$$

где $\Phi = \Phi(P_0, M_0)$ — дополнительная энергия деформаций на единицу длины исходной оси, $t_0 = dr_0/ds$ — орт исходного положения оси стержня, P и M зависят от ϑ по законам (12), (13), а внеинтегральные слагаемые опущены.

Не зависящее от ϑ и пропадающее при варьировании r и ϑ слагаемое

$$-P \cdot L \cdot t_0 = -P_0 \cdot t_0$$

добавлено в подинтегральное выражение (15) для того, чтобы в случае отсутствия деформаций ($\vartheta = 0$, $r = r_0$) множитель при P обращался в нуль. Только при

таким, вполне допустимым, добавлении слагаемое Φds будет иметь смысл дополнительной энергии деформаций (при $q = 0$ — это энергия деформаций).

Согласно общим принципам механики варьирование (15) по r даст уравнение равновесия сил (6), варьирование по ϑ даст уравнение равновесия моментов (без слагаемого m и с левой частью помноженной на тензор B).

$$\text{Варьирование (15) по } P \text{ и } M \text{ приводит к искомым соотношениям упругости}$$

$$dr/ds - L \cdot t_0 = \partial\Phi/\partial P \quad (16)$$

$$B \cdot d\vartheta/ds = \partial\Phi/\partial M \quad (17)$$

Так как свойства материала и геометрия сечения не оговаривались, то (16), (17) является наиболее общим представлением физических соотношений для упругого стержня.

В случае больших перемещений, но малых деформаций Φ может быть записана обычным образом через жесткости сечения стержня на растяжение, сдвиг, кручение и изгиб

$$\Phi = \frac{N^2}{2EF} + k_x \frac{Q_x^2}{2GF} + k_y \frac{Q_y^2}{2GF} + \frac{M_k^2}{2GJ_k} + \frac{M_x^2}{2EJ_x} + \frac{M_y^2}{2EJ_y}$$

или

$$\Phi = 1/2 P_0 \cdot A_p \cdot P_0 + 1/2 M_0 \cdot A_M \cdot M_0 \quad (18)$$

где A_p и A_M — тензоры податливостей сечения

$$A_p = \frac{t_0 t_0}{EF} + k_x \frac{i_0 i_0}{GF} + k_y \frac{j_0 j_0}{GF}$$

$$A_M = \frac{t_0 t_0}{GJ_k} + \frac{i_0 i_0}{EJ_x} + \frac{j_0 j_0}{EJ_y}$$

где i_0, j_0 — орты главных осей стержня в исходном положении.

При вычислении правых частей (16), (17) следует подставить в (18) вместо P_0 и M_0 их выражения через P и M :

$$P_0 = L^T \cdot P, \quad M_0 = L^T \cdot M,$$

тогда

$$\frac{\partial\Phi}{\partial P} = (L \cdot A_p \cdot L^T) \cdot P, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial M} = (L \cdot A_M \cdot L^T) \cdot M \quad (19)$$

Уравнения (6), (7), (16), (17) представляют собой замкнутую систему, полностью описывающую деформированное состояние гибкого стержня, которую можно численно интегрировать на ЭВМ. Приведем указанную систему к виду удобному для численного расчета, выразив явно производные основных неизвестных

$$\frac{dr}{ds} = L \cdot t_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial P}, \quad \frac{d\vartheta}{ds} = B^{-1} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial M} \quad (20)$$

$$\frac{dP}{ds} = -q, \quad \frac{dM}{ds} = - \left(L \cdot t_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial P} \right) \times P - m$$

$$B^{-1} = \frac{\theta}{2} \text{ctg} \frac{\theta}{2} \left(E - \frac{1}{\theta^2} \vartheta\vartheta \right) + \frac{1}{\theta^2} \vartheta\vartheta - \frac{1}{2} \vartheta \times E$$

Следует отметить, что тензор B^{-1} неограниченно растет при приближении $|\theta|$ к 2π . Для преодоления этого дефекта достаточно исключить полные обороты —

заменять ϑ на $(\theta - 2\pi) \vartheta/\theta$ всякий раз, когда угол приблизится к 2π . Такая замена не влияет на ориентацию сечения.

Решения системы (20) сопоставлялись с известными решениями. При постановке задачи на ЭВМ никаких дополнительных преобразований не производилось, так как операции векторного, диадного и скалярного умножения осуществлялись сервисными подпрограммами, которые передавали друг другу векторы и тензоры в виде матриц—столбцов и матриц. Такой подход полностью освобождает расчетчика от необходимости записывать уравнения в проекциях — правила работы с проекциями скрыты внутри сервисных подпрограмм и не известны подпрограммам более высокого уровня.

Ставилась цель тестовой проверки системы (20), поэтому решалась не краевая задача, а задача с начальными условиями, которые брались из известного заранее решения. Численный расчет показал, что результаты, полученные путем интегрирования (20) в точности совпадают с известными численными и аналитическими решениями.

Отметим, что выполненное исследование продемонстрировало высокую эффективность прямого тензорного исчисления в сочетании с системой аналитических преобразований тензорных выражений на ЭВМ, а также целесообразность использования вектора поворота ϑ и связанных с ним тензоров L и B при рассмотрении больших поворотов в механике деформируемых систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
3. Светлицкий В. А. Механика стержней. Т. 1. М.: Высш. школа, 1987. 320 с.
4. Reduce user's manual (version 3.0) / Edited by Antony C. Hearn. The Rand Corporation Santa Monica, CA 90406. 1983. Rand Publication CP 78 (4/83).

Москва

Поступила в редакцию
4.X.1993