

УДК 624.07:534.1

© 1994 г. Ф. Н. ШКЛЯРЧУК

УПРУГОДИНАМИЧЕСКИЕ КОНТИНУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ДЛИННЫХ ФЕРМ РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ

В различных строительных, подъемно-транспортных и космических конструкциях часто используются длинные фермы регулярной структуры, состоящие из однотипных секций. Для расчета колебаний таких ферм наряду с дискретной конечноэлементной моделью может быть использована более простая континуальная модель в виде эквивалентной балки [1—5]. При получении жесткостных характеристик эквивалентной балки обычно используются кинематические допущения о распределении перемещений в поперечных сечениях фермы, например, гипотеза плоских недеформируемых сечений.

Наряду с балочными моделями для этих целей предложены также трехмерные конечноэлементные модели с аппроксимацией перемещений в пределах секции, рассматриваемой в качестве конечного элемента, полиномами третьей степени [6]. Такие уточненные модели позволяют учесть деформации и деформации поперечных сечений фермы, однако, они существенно увеличивают число степеней свободы. Для уменьшения числа степеней свободы, например, тех, которые характеризуют деформации и деформации торцевых сечений секции, может быть использован метод статической конденсации [6].

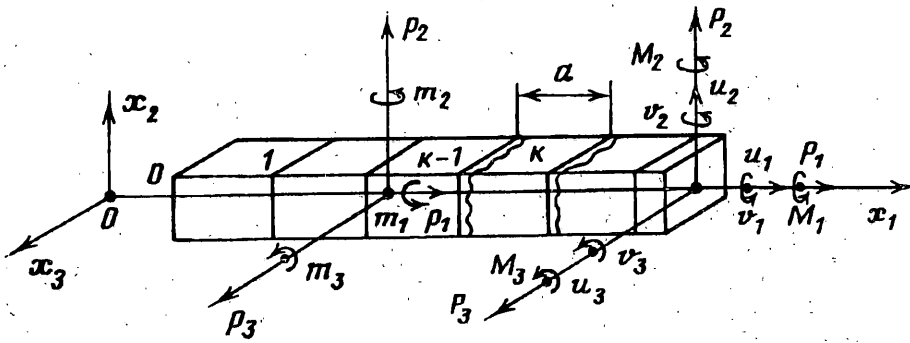
В данной работе для расчета колебаний регулярных ферм большого удлинения построена на основе метода сил новая расчетная модель в виде эквивалентной балки со связанными деформациями растяжения-сжатия, кручения, изгиба и сдвига в двух плоскостях, допускающая деформацию и деформацию поперечных сечений.

1. Матрица податливости секции фермы. Рассмотрим регулярную ферму с прямолинейной осью Ox_1 , состоящую из однотипных секций. Нумерация секций и разделяющих их поперечных сечений показана на фиг. 1. При моделировании этой фермы эквивалентной балкой внутренние усилия в стержнях фермы в каждом поперечном сечении $x_1 = \text{const}$ будем выражать через их равнодействующие силы P_ν и моменты M_ν ($\nu = 1, 2, 3$), приведенные к некоторой произвольной оси, параллельной оси фермы. Векторы этих сил (моментов) и энергетически соответствующих им перемещений (углов поворота) в том же сечении обозначим как

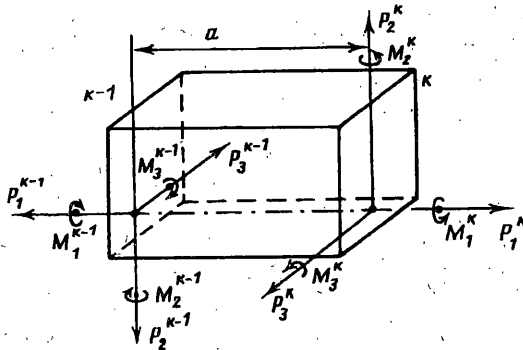
$$R = [P_1 P_2 P_3 \bar{M}_1 \bar{M}_2 \bar{M}_3]^T, \quad r = [u_1 u_2 u_3 \vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3]^T \quad (1.1)$$

где $\bar{M}_\nu = M_\nu/a$, a — длина секции. Поперечные сечения фермы могут деформироваться и деформироваться в своей плоскости, поэтому u_ν и ϑ_ν ($\nu = 1, 2, 3$) представляют осредненные в энергетическом смысле значения перемещений и углов поворота сечения. Далее верхним индексом k будем обозначать величины, относящиеся к k -му поперечному сечению, а также к k -ой секции (деление фермы на однотипные секции показано на фиг. 1). Тогда для k -го сечения векторы (1.1) будут

$$R^k = [P_1^k P_2^k P_3^k \bar{M}_1^k \bar{M}_2^k \bar{M}_3^k]^T, \quad r^k = [u_1^k u_2^k u_3^k \vartheta_1^k \vartheta_2^k \vartheta_3^k]^T \quad (1.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Из уравнений равновесия k -ой секции без учета внешних нагрузок (фиг. 2) следуют соотношения

$$R^{k-1} = (E + L) R^k, \quad R^k = (E - L) R^{k-1} \quad (1.3)$$

где E — единичная матрица шестого порядка, а матрица L для пространственной задачи имеет вид:

$$L = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

Через N_i^k обозначим растягивающее усилие в i -ом стержне k -ой секции: усилия во всех n стержнях секции представим в виде вектора

$$N^k = [N_1^k N_2^k \dots N_n^k]^T \quad (1.5)$$

Выделим из числа усилий N_i^k ($i = 1, \dots, n$) статически неопределимые усилия X_i^k ($i = 1, \dots, m$) и обозначим их вектор для k -ой секции как

$$X^k = [X_1^k X_2^k \dots X_m^k]^T \quad (1.6)$$

Усилия в стержнях выделенной из фермы незагруженной k -ой секции выражаются через R^{k-1} , X^k на левом торце $k-1$ и через R^k , X^{k+1} на правом торце k . В итоге на основании уравнений равновесия с учетом (1.3) вектор усилий в стержнях k -ой секции представляется в виде

$$N^k = PR^k + SX^k + TX^{k+1} \quad (1.7)$$

где P — матрица порядка $n \times 6$, а S и T — матрицы порядка $n \times m$.

Потенциальная энергия деформации k -ой секции со стержнями, работающими на растяжение-сжатие, записывается в виде

$$\Pi^k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} (N_i^k)^2 \frac{ds_i}{EF_i} = \frac{1}{2} N^{kT} D N^k$$

$$D = \text{diag} \left[\int_0^{l_i} \frac{ds_i}{EF_i} \right]_n \quad (1.8)$$

где l_i и $F_i(s)$ — длина и площадь поперечного сечения i -го стержня. Из условия минимума энергии $\Pi = \sum \Pi^k$ с учетом (1.8), (1.7) и (1.3) получаем систему матричных уравнений

$$A^T X^{k-1} + B X^k + A X^{k+1} + C R^k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$A = S^T D T, \quad B = S^T D S + T^T D T \quad (1.9)$$

$$C = S^T D P + T^T D P (E + L)$$

Регулярное решение системы (1.9), т. е. решение для бесконечной фермы при отсутствии внешних нагрузок и нерегулярности в пределах ее рассматриваемой части, записывается в виде:

$$X^k = U R^k \quad (1.10)$$

$$U = - (A^T + B + A)^{-1} [C + (A - A^T)(A^T + B + A)^{-1} C L]$$

В результате вектор усилий в стержнях k -ой секции (1.7) с учетом (1.10) будет

$$N^k = \Phi R^k, \quad \Phi = P + S U + T U (E - L) \quad (1.11)$$

Потенциальная энергия k -ой секции (1.8) с учетом (1.11) записывается в виде

$$\Pi^k = \frac{1}{2} R^{kT} \Lambda_1 R^k \quad (1.12)$$

$$\Lambda_1 = \Phi^T D \Phi \quad (1.13)$$

где Λ_1 является матрицей податливости секции эквивалентной консольной балки длиной a , нагружаемой на конце силами и моментами, представляющими вектор R^k . Если секции фермы являются статически определенными, то $S = 0$, $T = 0$ и $\Phi = P$.

Представленный здесь метод определения напряженного состояния и матрицы податливости секции регулярной фермы без труда обобщается на регулярные рамные и составные тонкостенные конструкции большого удлинения.

2. Дифференциальные уравнения колебаний эквивалентной балки. Дифференциальные уравнения пространственных колебаний балки сложной структуры со связанными деформациями растяжения—сжатия, кручения, изгиба и сдвига в двух плоскостях с учётом обозначений (1.1), (1.4) записываются в матричном виде:

$$R' = -L R + \mu \ddot{r} - q$$

$$r' = L^T R + \Gamma R \quad (2.1)$$

где $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|_{6 \times 6}$, $\mu = \|\mu_{ij}\|_{6 \times 6}$ — симметричные матрицы упругости и инерции; q — вектор внешних распределенных сил и моментов (фиг. 1)

$$q = [ap_1 ap_2 ap_3 m_1 m_2 m_3]^T \quad (2.2)$$

штрихом обозначена производная по $\xi = x_1/a$, а точкой — по времени. Первое уравнение (2.1) является уравнением динамического равновесия элемента балки, а второе — представляет обобщенный закон Гука; здесь компонентами вектора $(r' - L^T r) a^{-1}$ являются деформации соответственно — растяжения, сдвига в плоскости $x_1 x_2$, сдвига в плоскости $x_1 x_3$, кручения, изгиба в плоскости $x_1 x_2$, изгиба в плоскости $x_1 x_3$.

Пусть балка длиной ka , моделирующая ферму из k секций, нагружена на правом торце $\xi = k$ силами R^k . Тогда решение уравнений (2.1) для однородной статической задачи ($q \equiv 0, \ddot{r} \equiv 0$) будет

$$R = [E + (k - \xi) L] R^k \quad (2.3)$$

$$r = [\xi \Gamma + (k\xi - 1/2\xi^2) \Gamma L + 1/2\xi^2 L^T \Gamma + (1/2k\xi^2 - 1/6\xi^3) L^T \Gamma L] R^k + (E + \xi L^T) r^0$$

где r^0 — вектор перемещений на левом краю балки при $\xi = 0$.

Полагая $\xi = k$, из (2.3) получаем

$$r|_{\xi=k} = r^k = \Lambda_k R^k + (E + kL^T) r^0 \quad (2.4)$$

$$\Lambda_k = k\Gamma + 1/2k^2 (\Gamma L + L^T \Gamma) + 1/3k^3 L^T \Gamma L \quad (2.5)$$

где Λ_k является матрицей податливости балки длиной ka , неподвижно закрепленной на левом краю при $\xi = 0$.

Соотношение (2.5) с учетом того, что $LL = 0$, можно разрешить относительно Γ :

$$\Gamma = \Lambda_k/k - 1/2 (\Lambda_k L + L^T \Lambda_k) + 1/6kL^T \Lambda_k L \quad (2.6)$$

Полагая здесь $k = 1$, получим

$$\Gamma = \Lambda_1 - 1/2 (\Lambda_1 L + L^T \Lambda_1) + 1/6L^T \Lambda_1 L \quad (2.7)$$

Эта формула позволяет определить матрицу упругости эквивалентной балки сложной структуры, моделирующей ферму, в зависимости от матрицы податливости отсека фермы (1.13).

Матрица инерции эквивалентной балки μ для вектора перемещений r может быть вычислена, предполагая, что поперечные сечения фермы перемещаются (u_1, u_2, u_3) и поворачиваются ($\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$) как плоские и недеформируемые. В этом случае μ будет зависеть от ξ . Чтобы получить матрицу μ эквивалентной балки с постоянными в пределах длины отсека инерционными характеристиками можно использовать условие эквивалентности выражений кинетической энергии секции балки и секции фермы одинаковой длины при перемещениях их как твердого тела, характеризуемых, например, вектором r^0 :

$$1/2 \int_0^1 \dot{r}^T \mu \dot{r} d\xi = 1/2 \dot{r}^{0T} M_0 \dot{r}^0 \quad (2.8)$$

где $r = (E + \xi L^T) r^0$, а M_0 — матрица инерции отсека фермы относительно начала координат $\xi = 0$, помещенного на ее левом краю. Тогда при $\mu = \text{const}$ из условия (2.8) следует соотношение

$$\mu + 1/2 (L\mu + \mu L^T) + 1/3 L\mu L^T = M_0 \quad (2.9)$$

Разрешая (2.9) относительно μ , получаем

$$\mu = M_0 - 1/2 (LM_0 + M_0 L^T) + 1/6 L^T M_0 L \quad (2.10)$$

Матрицу упругости эквивалентной балки также можно получить другим способом. Возьмем регулярную ферму с достаточно большим числом секций k , закрепим ее неподвижно на левом торце при $x_1 = 0$ и нагрузим силами и

моментами, составляющими вектор R^k , на правом торце при $x_1 = ka$, считая этот торец недеформируемым. Эта статическая задача может быть решена по методу сил или методу конечных элементов и в результате может быть получена зависимость $r^k = \Lambda_k R^k$. По найденной таким образом матрице податливости рассматриваемой консольной фермы Λ_k с помощью формулы (2.6) затем можно определить матрицу упругости Γ эквивалентной балки. В данном подходе число секций k должно быть достаточно большим, чтобы можно было пренебрегать стеснениями деформаций вблизи торцов фермы, возникающих вследствие допущения о их недеформируемости (в случае статически неопределенных секций фермы деформации стеснения имеют характер краевых эффектов и затухают при удалении от торцов).

Формулу (2.6) можно использовать также для определения (для проверки) матрицы Γ по значениям полученной экспериментально матрицы Λ_k . Из формулы (2.6) с учетом $LL = 0$ следует, что матрицы податливости двух консольных балок разной длины, состоящих из k и l секций, связаны соотношением

$$(k/l) \Lambda_l = \Lambda_k + 1/2 (l - k)(\Lambda_k L + L^T \Lambda_k) + 1/6 (l - k)(2l - k) L^T \Lambda_k L \quad (2.11)$$

В случае гармонических колебаний система самосопряженных дифференциальных уравнений (2.1) может быть проинтегрирована численно при заданных на краях граничных условиях для компонент векторов R и r .

3. Применение метода конечных элементов. Здесь в качестве укрупненного конечного элемента будем рассматривать отсек фермы, состоящий из одной или нескольких (k) однотипных секций. Векторы перемещений на левом ($\xi = 0$) и правом ($\xi = k$) краях отсека из k секций обозначим через r^0 и r^k . Для аппроксимации вектора перемещений отсека будем использовать точное решение однородной статической задачи (2.3), которое с учетом (2.4), (2.6) можно записать в виде

$$r = \Phi_k(\xi) r^k + \Phi_0(\xi) r^0 \quad (3.1)$$

$$\Phi_k(\xi) = \left[\frac{\xi}{k} \Lambda_k + \frac{\xi(k - \xi)}{2k} (\Lambda_k L + L^T \Lambda_k) + \frac{\xi(k - \xi)(\xi - 2k)}{6k} L^T \Lambda_k L \right] \Lambda_k^{-1}$$

$$\Phi_0(\xi) = [E - \Phi_k(\xi)](E + kL^T) - (k - \xi) L^T$$

В этом случае потенциальная энергия рассматриваемого отсека $\Pi^l = 1/2 R^k{}^T \Lambda_k R^k$ после исключения R^k с помощью формулы (2.4) записывается в перемещениях:

$$\Pi^l = 1/2 [r^{0T} K_{00} r^0 + 2r^{0T} K_{0k} r^k + r^{kT} K_{kk} r^k] \quad (3.2)$$

$$K_{kk} = \Lambda_k^{-1}, \quad K_{0k} = -(E + kL) \Lambda_k^{-1}$$

$$K_{00} = (E + kL) \Lambda_k^{-1} (E + kL^T)$$

Кинетическая энергия отсека и вариация работы действующих на него нагрузок

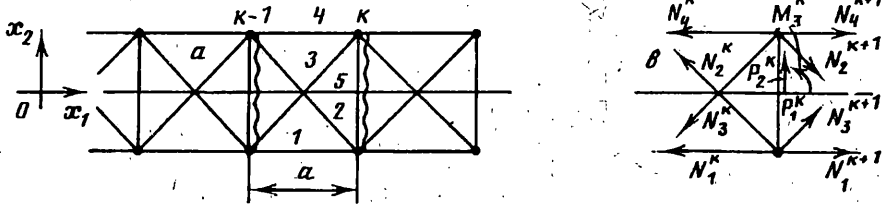
$$T^e = \frac{1}{2} \int_0^k \dot{r}^T \mu \dot{r} d\xi, \quad \delta A^e = \int_0^k \delta r^T q d\xi$$

с учетом (3.1) записываются в виде

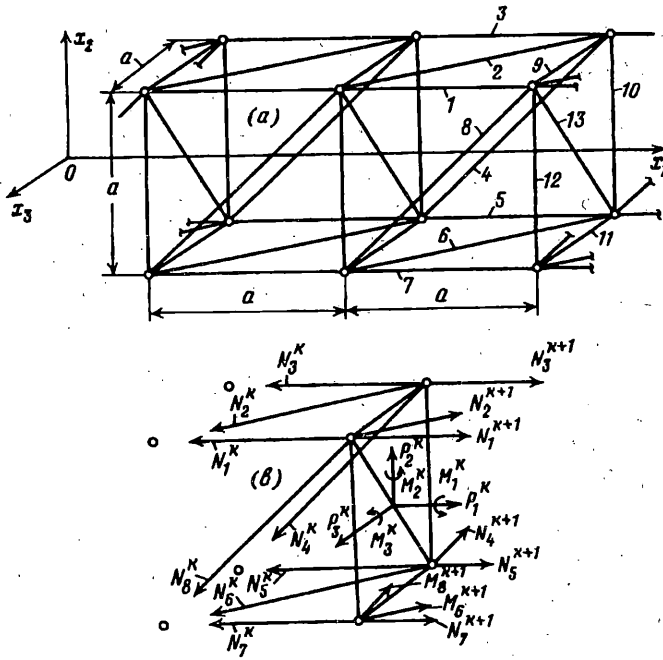
$$T^e = 1/2 [\dot{r}^{0T} M_{00} \dot{r}^0 + 2\dot{r}^{0T} M_{0k} \dot{r}^k + \dot{r}^{kT} M_{kk} \dot{r}^k]$$

$$\delta A^e = \delta r^{0T} Q_0 + \delta r^{kT} Q_k \quad (3.3)$$

$$M_{ij} = \int_0^k \Phi_i^T \mu \Phi_j d\xi, \quad Q_i = \int_0^k \Phi_i^T q d\xi \quad (i, j = 0, k)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

При расчете низших форм колебаний, длина волны которых значительно превышает длину конечных элементов (отсеков), для упрощения вычисления T^e и δA^e можно использовать линейную аппроксимацию матричных функций $\Phi_k(\xi)$ и $\Phi_0(\xi)$:

$$\Phi_k(\xi) = (\xi/k) E, \quad \Phi_0(\xi) = (1 - \xi/k) E \quad (3.4)$$

В местах нерегулярности фермы, вблизи закреплений и узлов, в которых действуют значительные сосредоточенные силы (реакции), т. е. в местах фермы, где можно ожидать, что деформации будут существенно отличаться от балочных, можно использовать обычные «малые» конечные элементы, например, в виде отдельных стержней или их частей.

Уравнения колебаний ферменной конструкции как системы малых и укрупненных конечных элементов (отсеков) с учетом кинематических условий их сопряжения составляются по методу Лагранжа.

4. Примеры расчета. В качестве первого примера рассмотрим плоскую ферму, показанную на фиг. 3, а. Секция этой фермы (фиг. 3, б) имеет пять стержней ($n=5$) и является один раз статически неопределимой ($m=1$). Для плоской фермы вместо (1.1) будем иметь

$$R = [P_1 P_2 \bar{M}_3]^T, \quad r = [u_1 u_2 a \theta_3]^T$$

соответственно этому в матрице L (1.6) необходимо вычеркнуть столбцы и строки под номерами 3, 4, 5.

При $F_1 = F_4 = F_5 = F$, $F_2 = F_3 = F/\sqrt{2}$ находим матрицу усилий (1.11) в стержнях фермы

$$\Phi^T = \frac{1}{14} \begin{vmatrix} 6 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 6 & -2 \\ 7 & -7\sqrt{2} & 7\sqrt{2} & -7 & 0 \\ 14 & 0 & 0 & -14 & 0 \end{vmatrix}$$

и коэффициенты симметричных матриц $\Lambda_1 = (a/EF) \|\bar{\lambda}_{ij}\|_{3 \times 3}$ и $\Gamma = (a/EF) \|\bar{\gamma}_{ij}\|_{3 \times 3}$, вычисленных по формулам (1.13) и (2.7): $\bar{\lambda}_{11} = 3/7$, $\bar{\lambda}_{12} = \bar{\lambda}_{13} = 0$, $\bar{\lambda}_{22} = 5/2$, $\bar{\lambda}_{23} = 1$, $\bar{\lambda}_{33} = 2$; $\bar{\gamma}_{11} = 3/7$, $\bar{\gamma}_{12} = \bar{\gamma}_{13} = \bar{\gamma}_{23} = 0$, $\bar{\gamma}_{22} = 11/6$, $\bar{\gamma}_{33} = 2$.

Для сравнения вычислим матрицу Γ по формуле (2.6), а также матрицу Λ_1 по формуле (2.11) при $l=1$, полагая $k=5, 8, 10$ и используя значения матриц $\Lambda_5, \Lambda_8, \Lambda_{10}$, полученных по МКЭ, когда в качестве КЭ рассматриваются стержни фермы. В этом случае все коэффициенты $\bar{\gamma}_{ij}$ и $\bar{\lambda}_{ij}$ кроме $\bar{\gamma}_{11}$ и $\bar{\lambda}_{11}$ точно совпадают с приведенными выше значениями, полученными на основе регулярного решения. Значения $\bar{\gamma}_{11} = \bar{\lambda}_{11}$ равны: 0,42374 при $k=5$; 0,42555 при $k=8$; 0,42616 при $k=10$; при $k \rightarrow \infty$ они стремятся к величине $3/7 = 0,42857$.

Данная плоская ферма с центральной осью симметрии Ox_1 моделируется эквивалентной балкой Тимошенко, жесткости которой на растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб соответственно равны $EF/\bar{\gamma}_{11}$, $EF/\bar{\gamma}_{22}$, $EFa^2/\bar{\gamma}_{33}$.

В качестве второго примера рассмотрим пространственную ферму (фиг. 4, а), типовая секция которой в форме куба со стороной a , изображена на фиг. 4, б. Секция этой фермы имеет тринадцать стержней ($n=13$) и является дважды статически неопределимой ($m=2$). Матрица усилий (1.11) в стержнях секции фермы для случая, когда все стержни имеют одинаковую площадь поперечного сечения, равную F , записываются в виде $(\alpha = 0,5(3 + 4\sqrt{2})^{-1})$:

$$\Phi = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0,5 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -\sqrt{2}\alpha & \sqrt{2}(\alpha-1) & -\sqrt{2} & -2\sqrt{2}\alpha & -2\sqrt{2}\alpha \\ 0,5 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 & 2\alpha-1 & 2\alpha-1 \\ 0 & \sqrt{2}(1-\alpha) & \sqrt{2}\alpha & \sqrt{2} & -2\sqrt{2}\alpha & -2\sqrt{2}\alpha \\ 0,5 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2}\alpha & -\sqrt{2}(1+\alpha) & \sqrt{2} & 2\sqrt{2}\alpha & 2\sqrt{2}\alpha \\ 0,5 & -\alpha & \alpha & 0 & 1-2\alpha & 1-2\alpha \\ 0 & \sqrt{2}(1+\alpha) & -\sqrt{2}\alpha & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\alpha & 2\sqrt{2}\alpha \\ 0 & \alpha & 1-\alpha & 1 & 2\alpha & 2\alpha \\ 0 & \alpha-1 & -\alpha & -1 & 2\alpha & 2\alpha \\ 0 & \alpha & 1-\alpha & -1 & -2\alpha & -2\alpha \\ 0 & \alpha-1 & -\alpha & 1 & -2\alpha & -2\alpha \\ 0 & -2\sqrt{2}\alpha & 2\sqrt{2}\alpha & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Коэффициенты матриц $\Lambda_1 = (a/EF) \|\bar{\lambda}_{ij}\|_{6 \times 6}$ и $\Gamma = (a/EF) \|\bar{\gamma}_{ij}\|_{6 \times 6}$, вычисленных по формулам (1.13), (2.7), имеют в этом случае следующие значения: $\bar{\lambda}_{11} = -\bar{\lambda}_{12} = \bar{\lambda}_{13} = -\bar{\lambda}_{24} = -\bar{\lambda}_{34} = 0,25$, $\bar{\lambda}_{14} = \bar{\lambda}_{15} = \bar{\lambda}_{16} = 0$, $\bar{\lambda}_{45} = -\bar{\lambda}_{46} = 0,50$, $\bar{\lambda}_{22} = \bar{\lambda}_{33} = 1 + \sqrt{2} - \alpha(1 + 1,5\alpha)$, $\bar{\lambda}_{23} = -0,25 + \alpha(1 + 1,5\alpha)$, $\bar{\lambda}_{25} = -\bar{\lambda}_{36} = -\alpha(0,5 + 2\alpha)$, $\bar{\lambda}_{26} = -\bar{\lambda}_{35} = 0,5(1 - \alpha) - 2\alpha^2$, $\bar{\lambda}_{44} = 1,5 + 2\sqrt{2}$, $\bar{\lambda}_{55} = \bar{\lambda}_{66} = 1 - \alpha$, $\bar{\lambda}_{56} = \alpha$, $\bar{\gamma}_{11} = -\bar{\gamma}_{12} = \bar{\gamma}_{13} = 0,25$, $\bar{\gamma}_{14} = \bar{\gamma}_{15} = \bar{\gamma}_{16} = \bar{\gamma}_{24} = \bar{\gamma}_{34} = 0$, $\bar{\gamma}_{45} = -\bar{\gamma}_{46} = 0,50$, $\bar{\gamma}_{22} = \bar{\gamma}_{33} = \sqrt{2} + (2/3)(1 - \alpha) + 0,5\alpha^2$, $\bar{\gamma}_{23} = -0,25 + (1/3)\alpha - 0,5\alpha^2$, $\bar{\gamma}_{25} = -\bar{\gamma}_{36} = -\alpha(1 + 2\alpha)$, $\bar{\gamma}_{26} = -\bar{\gamma}_{35} = -2\alpha^2$, $\bar{\gamma}_{44} = 1,5 + 2\sqrt{2}$, $\bar{\gamma}_{55} = \bar{\gamma}_{66} = 1 - \alpha$, $\bar{\gamma}_{56} = \alpha$.

Отсюда видно, что деформации растяжения-сжатия, кручения, изгиба и сдвига в двух плоскостях эквивалентной балки, моделирующей данную пространственную ферму, являются связанными между собой.

σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
9,294	9,402	40,73	49,94	51,33
9,209	9,755	39,98	50,79	51,01

В таблице приведены безразмерные собственные частоты колебаний $\sigma_n = \omega_n \sqrt{\rho a^2/E}$ пространственной фермы без присоединенных масс, состоящей из 13 секций и неподвижно закрепленной во всех узлах левого края; ρ — плотность материала стержней. При расчетах масса каждого стержня ρFl разносилась поровну к его концам и приводилась к сосредоточенным в узлах фермы массам. В верхней строке приведены результаты, полученные по МКЭ, когда в качестве КЭ рассматривались стержни фермы, работающие на растяжение—сжатие; число степеней свободы — $13 \times 4 \times 3 = 156$. Результаты нижней строки также получены по МКЭ, но в данном случае использовались укрупненные КЭ в виде отдельных секций фермы, моделируемых балочными элементами согласно (3.2) при $k = 1$; число степеней свободы — $13 \times 6 = 78$.

Первая, вторая, четвертая и пятая формы собственных колебаний, соответствующие приведенным в таблице собственным частотам, представляют преимущественно поперечные колебания в плоскостях $\pm 45^\circ$, а третья форма — преимущественно крутильные колебания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93—013—16490).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Усюкин В. И. Строительная механика конструкций космической техники. М.: Машиностроение, 1988, 392 с.
2. Noor A. K., Anderson M. S., Green W. H. Continuum models for beam and plate-like lattice structures//AIAA J. 1978. V. 16. No. 12. P. 1219—1228.
3. Noor A. K., Anderson M. S. Analysis of beam-like lattice Trusses//Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng. 1978. V. 20. P. 53—70.
4. Sun C. T., Necib B. Analysis of truss beam using a high order Timoshenko beam finite element//J. Sound and Vibrat. 1989. V. 130. No. 1. P. 149—159.
5. Шклярчук Ф. Н. Констигуальная модель для расчета поперечных колебаний длинных ферм регулярной структуры. В сб. «Проблемы строительной механики и прочности ЛА». М.: Изд-во МАИ, 1990. С. 63—67.
6. Dow J. O., Su Z. W., Feng C. C., Bodley C. Equivalent continuum representation of structures composed of repeated elements//AIAA J. 1985. V. 23. No. 10. P. 1564—1569.

Москва

Поступила в редакцию
25.X.1993