

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. Н. И. ЖИНЖЕР

## ВЛИЯНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ С НЕПОЛНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ СИСТЕМ

Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости [1] обладают рядом особенностей. К их числу относится влияние диссипативных сил [1—4]. В статье на примерах дискретной и распределенной неконсервативных систем исследовано влияние диссипативных сил с неполной диссипацией на критическое значение параметра следящей силы.

1. Исследование устойчивости форм равновесия упругих систем, нагруженных внешними неконсервативными позиционными силами, основывается на динамическом методе [1]. Для упругой системы с конечным числом степеней свободы и стационарных неконсервативных силах задача сводится к исследованию устойчивости тривиального решения дифференциального уравнения

$$A\ddot{q} + C\dot{q} + \beta Bq + Dq = 0 \quad (1.1)$$

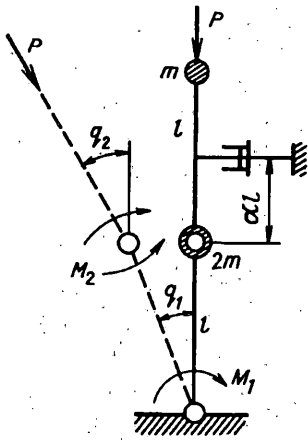
Здесь  $q(t)$  — вектор отклонений,  $A, C$  — симметричные положительно определенные матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов системы,  $B$  — несимметричная матрица обобщенных неконсервативных позиционных сил,  $\beta$  — параметр, с точностью до которого заданы силы, считается положительным при сжатии,  $D$  — симметричная матрица диссипативных сил.

Если матрица диссипативных сил положительно определенная, то диссипацию называют полной. В случае неотрицательно определенной матрицы говорят о диссипативных силах с неполной диссипацией. Чтобы избежать терминологической путаницы, перечислим принятие в теории колебаний линейных систем модели учета рассеяния энергии. Так называемому внешнему трению в уравнении (1.1) соответствует  $D = \varepsilon A$ , внутреннему трению —  $D = \eta C$ , где  $\varepsilon, \eta$  — параметры внешнего и внутреннего трения. Частотно-независимое трение вводится в главных координатах системы посредством диагональной матрицы  $\eta_0 \text{diag}(\omega_j)$ , где  $\omega_j$  — собственные частоты системы. В уравнении (1.1) этой модели трения соответствует матрица  $D = \eta_0 \Phi^{-T} \text{diag}(\omega_j) \Phi^{-1}$ , где  $\eta_0$  — параметр частотно-независимого трения,  $\Phi$  — матрица форм собственных колебаний, нормированных условием  $\Phi^T A \Phi = E$ , где  $E$  — единичная матрица. Очевидно, что в перечисленных моделях диссипативные силы обладают полной диссипацией.

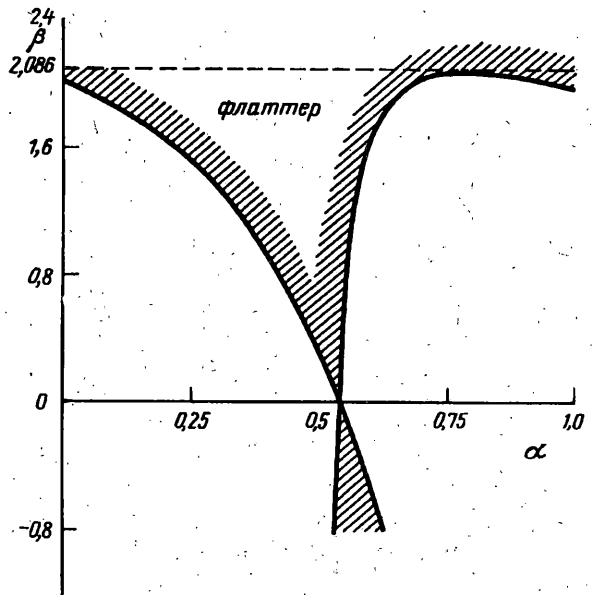
Полагая в (1.1)  $q = \varphi \exp(\lambda t)$ , где  $\lambda$  — характеристический показатель, приходим к обобщенной алгебраической проблеме собственных значений

$$(\lambda^2 A + \lambda D + \beta B + C) \varphi = 0 \quad (1.2)$$

Положение равновесия системы асимптотически устойчиво, если все характеристические показатели удовлетворяют условию  $\text{Re } \lambda < 0$ . И неустойчиво, если  $\text{Re } \lambda > 0$  хотя бы у одного показателя. Границы областей устойчивости в



Фиг. 1



Фиг. 2

пространстве параметров можно получить из критерия Рауса — Гурвица, примененного к характеристическому полиному

$$\det(\lambda^2 A + \lambda D + \beta B + C) = 0 \quad (1.3)$$

задачи (1.2). Для системы с двумя степенями свободы уравнение (1.3) и условия устойчивости имеют вид

$$p_0 \lambda^4 + p_1 \lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_3 \lambda + p_4 = 0 \quad (1.4)$$

$$p_0 > 0, p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0, p_4 > 0 \quad (1.5)$$

$$p_1(p_2 p_3 - p_1 p_4) - p_0 p_3^2 > 0$$

Рассмотрим в качестве примера широко обсуждавшуюся в литературе двухзвенную систему [2, 5—7], которая является простейшей моделью задачи об устойчивости консольного стержня, сжатого следящей силой (фиг. 1). Вязкоупругие моменты в шарнирах равны  $M_1 = c q_1 + b \dot{q}_1$ ,  $M_2 = c(q_2 - q_1) + b(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)$ . После введения безразмерного времени и безразмерных параметров числовые матрицы в уравнении (1.1) и коэффициенты полинома в (1.4) принимает вид

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad D = \eta C$$

$$\beta = \frac{Pl}{c}, \quad \eta = \frac{b}{(cm)^{1/2} l}, \quad \bar{t} = t \omega_0, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m \bar{l}^2}$$

$$p_0 = 2, \quad p_1 = 7\eta, \quad p_2 = 7 - 2\beta + \eta^2, \quad p_3 = 2\eta, \quad p_4 = 1$$

Последнее из условий устойчивости (1.5) дает зависимость  $\beta_*(\eta) = 41/28 + \eta^2/2$  [2]. При  $\eta \rightarrow 0$ ,  $\lim \beta_*(\eta) = 41/28 \approx 1,464$ . Если диссипация отсутствует, то  $p_1 = p_3 = 0$  и уравнение (1.4) становится биквадратным. Его корни при увеличении параметра  $\beta$  покидают мнимую ось в точке кратности, причем два из них располагаются в правой полуплоскости  $\text{Re } \lambda > 0$ . Квазикритическое

значение параметра [4], полученное из условия кратности корней, равно  $\beta_*^\circ = 7/2 - \sqrt{2} \approx 2,086$ . При  $\eta \rightarrow 0$ ,  $\lim \beta_*(\eta) = 21/48 < 2,086 = \beta_*^\circ$ . Этот факт впервые был обнаружен в [2].

Если же учитывать только внешнее трение, положив  $D = \varepsilon A$ , то коэффициенты полинома (1.4) будут равны  $p_0 = 2$ ,  $p_1 = 4\varepsilon$ ,  $p_2 = 7 - 2\beta + 2\varepsilon^2$ ,  $p_3 = \varepsilon(7 - 2\beta)$ ,  $p_4 = 1$ . Из условия (1.5) следует зависимость  $\beta_*(\varepsilon) = 7/2 - (2 + \varepsilon^4)^{1/2} + \varepsilon^2$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\lim \beta_*(\varepsilon) = 7/2 - \sqrt{2} = \beta_*^\circ$ .

При учете совместного действия исчезающе малого внешнего и внутреннего трения критическое значение параметра силы  $\beta_*(\varepsilon, \eta)$  как функция двух переменных не имеет предела при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ .

Для учета частотно-независимого трения используем собственные частоты и формы системы:  $\omega_1 = 0,386$ ,  $\Phi_1^T = (0,364, 0,492)$  и  $\omega_2 = 1,83$ ,  $\Phi_2^T = (-0,606, 1,121)$ . Матрица диссипативных сил в уравнении (1.1) принимает вид

$$D = \eta_0 \Phi^{-T} \begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{vmatrix} \Phi^{-1} = \eta_0 \begin{vmatrix} 1,863 & -0,132 \\ -0,132 & 0,771 \end{vmatrix}$$

Из условия (1.5) следует зависимость  $\beta_*(\eta_0) = 1,912 + 0,487\eta_0^2 - 0,043\eta_0^4$ .

При  $\eta_0 \rightarrow 0$ ,  $\lim \beta_*(\eta_0) = 1,912 < \beta_*^\circ = 2,086$ .

Наконец, рассмотрим влияние диссипативных сил с неполной диссипацией в этой же задаче. Элемент  $d_{11}$  матрицы  $D$  в (1.1) положителен. В силу условия неотрицательной определенности матрицы имеем  $d_{11}d_{22} - d_{12}^2 = 0$  и поэтому с учетом перехода к безразмерному виду ее можно представить

$$D = \frac{\omega_0}{c} \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{12}^2/d_{11} \end{vmatrix} = \varepsilon_0 \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix} \quad (1.6)$$

где  $\alpha = d_{12}/d_{11}$ ,  $\varepsilon_0 = d_{11}/\sqrt{cm} l$  — безразмерные параметры,  $-\infty < \alpha < \infty$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ . Имеем однопараметрическое семейство матриц. Если параметр  $\alpha$  принимает значения из интервала  $0 \leq \alpha \leq 1$ , матрице (1.6) можно придать следующую механическую интерпретацию. Такая матрица описывает диссипативные силы от демфера, расположенного на верхнем звене на расстоянии  $\alpha l$  от верхнего шарнира (см. фиг. 1).

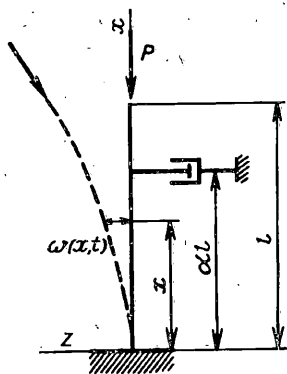
Для матрицы диссипации (1.6) коэффициенты полинома (1.4) и условие (1.5) имеют вид

$$\begin{aligned} p_0 &= 2, \quad p_1 = \varepsilon_0(1 - 2\alpha + 3\alpha^2), \quad p_2 = 7 - 2\beta \\ p_3 &= \varepsilon_0[1 + (2 - \beta)(\alpha + \alpha^2)], \quad p_4 = 1 \\ \varepsilon_0^2(1 - 2\alpha + 3\alpha^2)(7 - 2\beta)[1 + (2 - \beta)(\alpha + \alpha^2)] - \\ - \varepsilon_0^2(1 - 2\alpha + 3\alpha^2)^2 - 2\varepsilon_0^2[1 + (2 - \beta)(\alpha + \alpha^2)]^2 &> 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

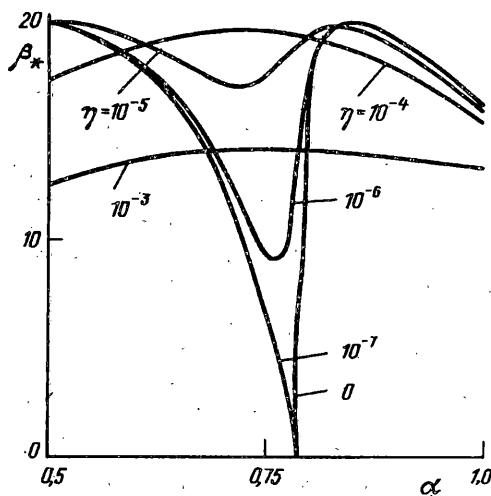
Как видно, параметр  $\varepsilon_0$  выпадает из определяющего условия (1.7). На фиг. 2 показаны области устойчивости на плоскости параметров  $\alpha, \beta$ . Область неустойчивости заштрихована. В точке  $\alpha = 0,54$ ,  $\beta = 0$  границы области устойчивости пересекаются под некоторым углом. Заметим, что матрица (1.6) в главных координатах принимает вид

$$\Phi^T D \Phi = \varepsilon_0 \begin{vmatrix} g_{11} & \sqrt{g_{11}g_{22}} \\ \sqrt{g_{11}g_{22}} & g_{22} \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

$$g_{11}(\alpha) = (0,364 + 0,429\alpha)^2, \quad g_{22} = (-0,606 + 1,121\alpha)^2$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Узел второй собственной формы системы  $\varphi_2^T = (-0,606, 1,121)$  расположен на расстоянии 0,541 от верхнего шарнира. При  $\alpha = 0,54$  элементы матрицы (1.8) принимают значения  $g_{11} > 0$ ,  $g_{22} = g_{12} = g_{21} = 0$ . Диссипативные связи между собственными формами отсутствуют и колебания по второй форме не демпфируются. Положение равновесия системы становится неустойчивым при сколь угодно малом по абсолютной величине значении параметра  $\beta$ . Характеристические показатели, соответствующие второй форме, выходят на правую полуплоскость. Однако разложения действительных частей этих показателей не будут содержать членов с первой степенью  $\beta$ .

Значение  $\alpha = 0$  соответствует расположению демпфера в верхнем шарнире. Такое расположение демпфера рассматривалось в [7]. При этом считалось, что демпфер учитывает действие внешнего трения. Основываясь на правильно вычисленном значении  $\beta_* = 2$ , которое меньше  $\beta_*^0 = 2,086$ , сделан ошибочный вывод о дестабилизирующем влиянии внешнего трения.

Отметим, что в [1, 3] для общей неконсервативной системы с двумя степенями свободы было исследовано влияние распределения по формам колебаний исчезающе малого демпфирования на критическое значение параметра нагрузки. Было установлено, что критическое значение параметра совпадает с квазикритическим значением только в случае равенства коэффициентов демпфирования по собственным формам. Там же показано, что при равенстве нулю коэффициента демпфирования по второй форме критическое значение параметра нагрузки равно нулю. Этот факт оставался вне внимания исследователей. В рассмотренном примере этот случай соответствует значению  $\alpha = 0,54$ .

Как видно из фиг. 2, при некотором значении параметра  $\alpha$  достигается квазикритическое значение параметра нагрузки  $\beta_*^0$ . Таким образом, при учете в уравнении динамического метода (1.1) только диссипативных сил с неполной диссипацией критическое значение параметра нагрузки может принимать любое значение из интервала  $0 \leq \beta \leq \beta_*^0$  в зависимости от значения параметра  $\alpha$ , определяющего структуру матрицы диссипации. При добавлении исчезающе малого внешнего и внутреннего трения критическое значение параметра нагрузки зависит и от величины параметра сил с неполной диссипацией  $\epsilon_0$ . Однако при  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$  существует предел  $\lim \beta_*(\epsilon, \eta, \epsilon_0, \alpha) = \beta_*(\alpha)$ . Внешнее трение ока-

зывает стабилизирующее влияние. Внутреннее трение проявляет себя по-другому. С ростом параметра  $\eta$  от нуля критическое значение параметра нагрузки возрастает до квазикритического значения. Соответствующее значение параметра  $\eta$  зависит от величины параметра  $\varepsilon_0$ . Дальнейшее увеличение  $\eta$  приводит к уменьшению критического значения параметра нагрузки, внутреннее трение оказывает дестабилизирующее влияние.

2. Рассмотрим в качестве второго примера задачу об устойчивости прямолинейной формы равновесия вязкоупругого консольного стержня [4, 7], сжатого следящей силой и имеющего в сечении  $x = \alpha l$  демпфер с коэффициентом трения  $\hat{\varepsilon}_0$  (фиг. 3). Вместо уравнения (1.1) имеем

$$EI w_{,xxxx} + \tau EI w_{,xxx\dot{t}} + P w_{,xx} + m \dot{w}_{,tt} + \hat{\varepsilon}_0 \delta(x - \alpha l) w_{,t} = 0 \quad (2.1)$$

$$w(0, t) = w_{,x}(0, t) = w_{,xx}(l, t) = w_{,xxx}(l, t) = 0 \quad (2.2)$$

$w(x, t)$  — функция прогиба,  $EI$  — изгибная жесткость,  $m$  — погонная масса стержня,  $\tau$  — время релаксации материала,  $\delta(\cdot)$  — дельта-функция; индексами после запятой обозначены частные производные.

Представляя функцию прогиба в виде ряда по формам собственных колебаний  $\varphi_k(x)$  стержня

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \varphi_k(x)$$

получим выражение мощности диссипативных сил, соответствующих демпферу в виде бесконечной квадратичной формы

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_j(\alpha l) \varphi_k(\alpha l) \dot{f}_j \dot{f}_k$$

Главный диагональный минор первого порядка матрицы квадратичной формы равен  $\varphi_1^2(\alpha l) > 0$ . Любой минор, полученный вычеркиванием строки и столбца с одинаковыми номерами, равен нулю. Следовательно, квадратичная форма является неотрицательно определенной и соответствующие диссипативные силы обладают неполной диссипацией.

Введем в (2.1)–(2.2) безразмерные переменные и параметры

$$\xi = x/l, \quad \bar{t} = t\omega_0, \quad \beta = P l^2/(EI)$$

$$\eta = \tau\omega_0, \quad \varepsilon_0 = \hat{\varepsilon}_0 \frac{l^2}{\sqrt{mEI}}, \quad \omega_0^2 = \frac{EI}{ml^4}$$

и положим  $w = \varphi(\xi) \exp(\lambda t)$ . В результате получим следующую краевую задачу на собственные значения:

$$\begin{aligned} (1 + \eta\lambda) \varphi_a^{IV} + \beta \varphi_a'' + \lambda^2 \varphi_a &= 0, & 0 < \xi < \alpha \\ (1 + \eta\lambda) \varphi_b^{IV} + \beta \varphi_b'' + \lambda^2 \varphi_b &= 0, & \alpha < \xi < 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\varphi_a(0) = \varphi_a'(0) = 0, \quad \varphi_a(\alpha) = \varphi_b(\alpha)$$

$$\varphi_a'(\alpha) = \varphi_b'(\alpha), \quad \varphi_a''(\alpha) = \varphi_b''(\alpha) \quad (2.4)$$

$$\varphi_a'''(\alpha) = \varphi_b'''(\alpha) + \frac{\varepsilon_0 \lambda}{1 + \eta\lambda} \varphi_b(\alpha)$$

$$\varphi_b''(1) = \varphi_b'''(1) = 0$$

Записывая общее решение уравнений (2.3) в виде

$$\varphi_a(\xi) = \sum_{k=1}^4 C_k e^{k\xi}, \quad \varphi_b(\xi) = \sum_{k=5}^8 C_k e^{k\xi}$$

$r_k$  — корни уравнения

$$(1 + \eta\lambda) r^4 + \beta r^2 + \lambda^2 = 0 \quad (2.5)$$

и удовлетворяя граничным условиям (2.4), приведем условие существования нетривиального решения к такому виду:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ r_1^2 e^1 & r_2^2 e^2 & r_3^2 e^3 & r_4^2 e^4 \\ r_1^3 e^1 & r_2^3 e^2 & r_3^3 e^3 & r_4^3 e^4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & r_4^2 \\ r_1^3 & r_2^3 & r_3^3 & r_4^3 \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{1\alpha} & e^{2\alpha} & e^{3\alpha} & e^{4\alpha} & -e^{1\alpha} & -e^{2\alpha} & -e^{3\alpha} & -e^{4\alpha} \\ r_1 e^{r_1\alpha} & r_2 e^{r_2\alpha} & r_3 e^{r_3\alpha} & r_4 e^{r_4\alpha} & -r_1 e^{r_1\alpha} & -r_2 e^{r_2\alpha} & -r_3 e^{r_3\alpha} & -r_4 e^{r_4\alpha} \\ r_1^2 e^{r_1\alpha} & r_2^2 e^{r_2\alpha} & r_3^2 e^{r_3\alpha} & r_4^2 e^{r_4\alpha} & -r_1^2 e^{r_1\alpha} & -r_2^2 e^{r_2\alpha} & -r_3^2 e^{r_3\alpha} & -r_4^2 e^{r_4\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{1\alpha} & -e^{2\alpha} & -e^{3\alpha} & -e^{4\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_1^2 e^1 & r_2^2 e^2 & r_3^2 e^3 & r_4^2 e^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_1^3 e^1 & r_2^3 e^2 & r_3^3 e^3 & r_4^3 e^4 \end{vmatrix}$$

Левая часть уравнения (2.6) является, вообще говоря, комплекснозначной функцией параметров задачи и характеристического показателя. При  $\lambda = i\omega$  и фиксированных значениях всех параметров, кроме  $\beta$ , это уравнение эквивалентно двум вещественным уравнениям относительно критического значения параметра  $\beta_*$  и частоты флаттера  $\omega_*$ . Задача отыскания решения системы двух трансцендентных уравнений заменялась эквивалентной задачей отыскания нулевых минимумов. В качестве целевой функции принималась абсолютная величина правой части (2.6). Минимизация проводилась численным методом Нелдера — Мида.

При отсутствии внутреннего трения критическое значение параметра силы, как и в модельной задаче п. 1, не зависит от параметра  $\varepsilon_0$ . При  $\eta = 0$  уравнение (2.5) имеет вещественные корни, определители  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  принимают вещественные значения. И уравнение (2.6) равносильно двум уравнениям  $\Delta_1 = 0$ ,  $\Delta_2 = 0$ , не содержащим  $\varepsilon_0$ . Зависимость критического параметра силы, определяемая выходом на правую полуплоскость второго характеристического показателя, от параметра  $\alpha$  показана на фиг. 4. Значению  $\alpha = 0,784$  соответствует расположение демпфера в узле второй собственной формы стержня. Подобные явления наблюдаются и при расположении демпфера в узлах высших форм. Случай  $\alpha = 1$  был рассмотрен в [7], где сделан неправильный вывод, который уже обсуждался в п. 1.

На том же рисунке показаны зависимости критического значения параметра силы при  $\varepsilon_0 = 0,01$  для различных значений параметра внутреннего демпфирования  $\eta$ . Виден стабилизирующий и дестабилизирующий эффект внутреннего трения при наличии сил с неполной диссипацией.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
2. Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik//Ing. Archiv. 1952. Bd. 20. № 1. S. 49—56.
3. Болотин В. В. О колебаниях и устойчивости стержней, находящихся под действием неконсервативных сил/В кн.: Колебания в турбомашинах. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 23—42.

4. Bolotin V.V., Zhinzher N. I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces//Int. J. Solids Struct. 1969. V. 5. № 9. P. 965—989.
5. Herrmann G., Jong I.-C. On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems//Trans. ASME. Ser. E. J. Applied Mech. 1965. V. 32. № 3. P. 592—597.
6. Plaut R. H. A new destabilization phenomenon in nonconservative systems//ZAMM. 1971. V. 51. № 4. P. 319—321.
7. Пановко Я. Г., Сорокин С. В. О квазиустойчивости упруговязких систем со следящими силами//Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 135—139.

Москва

Поступила в редакцию  
20.XI.1993