

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. А. П. СЕЙРАНЯН

БИФУРКАЦИИ В ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Рассматриваются линейные циркуляционные системы общего вида со многими степенями свободы, зависящие от одного параметра. Показано, что эти системы подвержены неустойчивости типа флаттер и дивергенция. Исследованы бифуркации, приводящие к потере колебательной и статической устойчивости. Дается геометрическая интерпретация описанных катастроф. Приведены примеры.

Циркуляционные системы рассматривались во многих работах, из которых отметим [1—13]. Характерной особенностью многих из этих работ является исследование устойчивости системы от параметра нагрузки — величины следящей силы, скорости или плотности потока и тому подобное. В этом смысле эти задачи являются однопараметрическими. Настоящая работа посвящена обобщению результатов по устойчивости однопараметрических циркуляционных систем. Анализ основывается на некоторых результатах теории катастроф [14—16] и теории возмущений спектра несамосопряженных операторов [17].

1. Рассмотрим уравнения движения линейной автономной системы с неконсервативными позиционными силами

$$M\dot{q} + Aq = 0 \quad (1.1)$$

где M — симметричная, положительно определенная матрица порядка n , A — несимметричная матрица того же порядка, q — вектор обобщенных координат. Система (1.1) называется циркуляционной [3].

С помощью отделения времени $q = X \exp(\lambda t)$ приходим к задаче на собственные значения

$$AX + \lambda^2 MX = 0 \quad (1.2)$$

Показатели λ находятся из характеристического уравнения $\det \|A + \lambda^2 M\| = 0$. Так как A и M вещественны, то отсюда следует, что если λ является решением этого уравнения, то значения $-\lambda$, $\bar{\lambda}$, $-\bar{\lambda}$ также ему удовлетворяют. Это означает, что система (1.1) может быть устойчивой только тогда, когда все корни λ находятся на мнимой оси.

Рассмотрим однопараметрический случай, когда матрицы M и A зависят от одного параметра p . С помощью обозначений $\mu = -\lambda^2$, $H = M^{-1}A$ от (1.2) перейдем к задаче на собственные значения для матрицы $H(p)$: $HX = \mu X$. Известно [14—15], что для однопараметрических семейств вещественных матриц случай общего положения характеризуется простыми собственными значениями μ , а в отдельных изолированных точках параметра $p = p_0$ — двухкратными вещественными числами μ_0 с одной жордановой клеткой второго порядка. От более сложных жордановых структур можно избавиться сколь угодно малым шевелением семейства матриц $H(p)$.

Исследуем бифуркации собственных значений в точке кратности, основываясь на теории возмущений несимметричных операторов [17]. Пусть двукратному вещественному μ_0 соответствует жорданова клетка второго порядка. Это означает,

что μ_0 соответствуют собственным X_0 и присоединенным X_1 векторы, определяемые соотношениями

$$HX_0 = \mu_0 X_0, \quad HX_1 = \mu_0 X_1 + X_0 \quad (1.3)$$

Наряду с (1.3), рассмотрим также сопряженную задачу, которая понадобится в дальнейшем

$$H^T Y_0 = \mu_0 Y_0, \quad H^T Y_1 = \mu_0 Y_1 + Y_0 \quad (1.4)$$

Знак (T) означает операцию транспонирования. Векторы X_0, Y_0, X_1, Y_1 связаны соотношениями

$$(X_0, Y_0) = 0, \quad (X_0, Y_1) = (X_1, Y_0) \neq 0 \quad (1.5)$$

Круглыми скобками обозначено скалярное произведение в комплексном пространстве. Напомним, что $(X, Y) = \sum x_i \bar{y}_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Предположим, что матрицы M, A , а следовательно, и H гладко зависят от параметра p . Придадим приращение $p = p_0 + \delta p$. Тогда с точностью до величин $o(\delta p)$ имеем $H = H_0 + H' \delta p$, где $H_0 = H(p_0)$, $H' = (dH/dp)_{p=p_0}$, $H' = V^{-1}A' - M^{-1}M'M^{-1}A$. Собственные числа и собственные векторы также получают приращения. В случае жордановой клетки второго порядка возмущенные собственные числа разлагаются по степеням $\varepsilon^{1/2}$ малого параметра $\varepsilon > 0$ [17]:

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 \varepsilon^{1/2} + \mu_2 \varepsilon + \dots \quad (1.6)$$

В данном случае роль малого параметра играет δp : $\varepsilon = \delta p$, если $\delta p > 0$ и $\varepsilon = -\delta p$, если $\delta p < 0$.

Используя (1.3)–(1.6), получим выражение для коэффициента μ_1 [17]:

$$\mu_1^2 = -F \quad (\delta p > 0), \quad \mu_1^2 = F \quad (\delta p < 0) \quad (1.7)$$

$$F = -(H'X_0, Y_0)/(X_1, Y_0) \quad (1.8)$$

Векторы X_0, X_1, Y_0 в (1.8) определяются из (1.3), (1.4). Так как μ_0 — действительное число, то X_0, Y_0, X_1, Y_1 также можно считать действительными векторами. Поэтому F — действительная величина, положительная или отрицательная. Из (1.6), (1.7) следует, что бифуркация с точностью до величины $o(|\delta p|)$ описывается выражениями

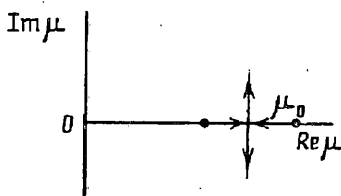
$$\mu = \mu_0 \pm i \sqrt{F \delta p} \quad (\delta p > 0) \quad (1.9)$$

$$\mu = \mu_0 \pm \sqrt{F \delta p} \quad (\delta p < 0)$$

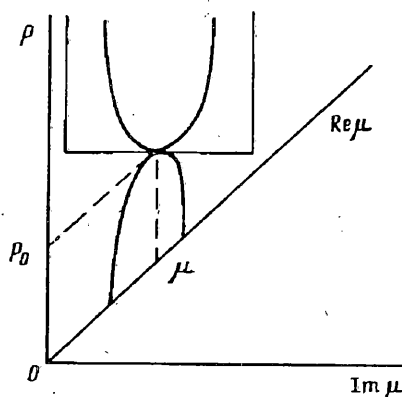
Эти два выражения можно объединить в одно $\mu = \mu_0 \pm i \sqrt{F \delta p}$.

Фиг. 1, 2 иллюстрируют бифуркацию (1.9), которую можно интерпретировать как сильное взаимодействие двух собственных значений [18]. Если $F > 0$, то при увеличении параметра p два действительных собственных значения сближаются, сливаются в одно, а затем расходятся параллельно мнимой оси, фиг. 1. Стрелки на фиг. 1 показывают движение μ при увеличении p . Если $F < 0$, то направление движения изменяется на обратное. Это означает, что при увеличении p два комплексно-сопряженных μ сближаются, сливаются в одно действительное значение, а затем расходятся по действительной оси в разные стороны. На фиг. 2 бифуркация (1.9) показана в трехмерном пространстве ($F > 0$). Кривые на фиг. 2 при значениях p , близких к p_0 , являются квадратными параболой одинаковой кривизны, лежащими в ортогональных плоскостях $\text{Im } \mu = 0$ и $\text{Re } \mu = \mu_0$.

Вследствие вещественности матрицы H картина взаимодействия μ на фиг. 1, 2 симметрична относительно оси и плоскости $\text{Im } \mu = 0$, соответственно. Нетрудно доказать, что если μ — простое вещественное собственное значение, то при



Фиг. 1



Фиг. 2

изменении p μ остается вещественным. Действительно, в противном случае при появлении комплексного μ одновременно появляется и комплексно-сопряженное собственное значение $\bar{\mu}$, что означает увеличение общего числа корней. Следовательно, при изменении p собственные значения могут сойти с действительной оси на фиг. 1 (или выйти из плоскости $\text{Im } \mu = 0$ на фиг. 2) лишь при их встрече и сильном взаимодействии (1.9). Несмотря на простоту, этот факт, по-видимому, ранее не отмечался.

Вернемся к задаче (1.1), (1.2). Так как $\mu = -\lambda^2$, то положительным μ соответствуют чисто мнимые показатели $\lambda = \pm i\sqrt{\mu}$, а отрицательным μ отвечают действительные $\lambda = \pm \sqrt{|\mu|}$. Поэтому положительные $\mu_0 = -\lambda_0^2$ в точке бифуркации в (1.3)—(1.9) означают переход системы (1.1) от устойчивости к колебательной неустойчивости (флаттеру) или наоборот (в зависимости от знака F), а отрицательные μ_0 соответствуют переходу от колебательной неустойчивости (флаттера) к аperiodической неустойчивости (дивергенции) или наоборот.

Бифуркацию (1.9) можно выразить через показатели λ . Заменяя δp на $p - p_0$, получим

$$\lambda = \pm \lambda_0 (1 \pm 1/2i \sqrt{F(p - p_0)}) / \lambda_0^2 \quad (1.10)$$

Фиг. 3а, б иллюстрирует взаимодействие (1.10) при $F > 0$. Направление стрелок соответствует возрастанию p . Если $F < 0$, то направление стрелок следует заменить на обратное.

Кроме катастроф (1.9), (1.10), система (1.1) может терять устойчивость и статистически, что соответствует переходу μ от положительных значений к отрицательным (дивергенция). Разложение простого собственного значения в окрестности $\mu_0 = 0$ с точностью до $o(|\delta p|)$ имеет вид

$$\mu = -D\delta p, \quad D = -(H'X_0, Y_0)/(X_0, Y_0) \quad (1.11)$$

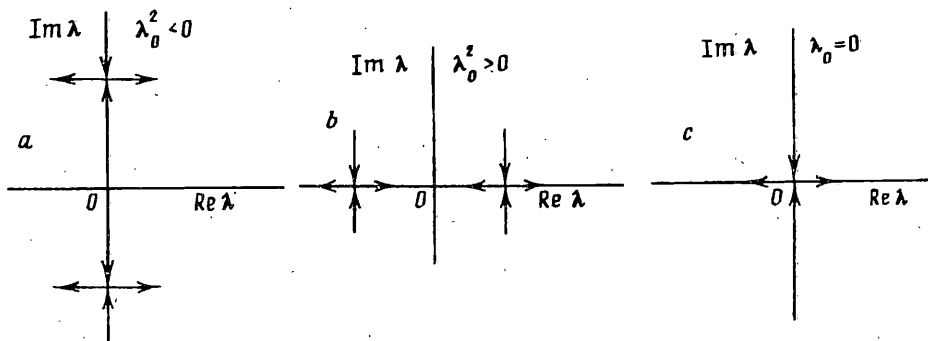
где X_0, Y_0 , соответствующие $\mu_0 = 0$, определяются из (1.3), (1.4). Подставляя в (1.11) $\mu = -\lambda^2$, $\delta p = p - p_0$, получим выражение для бифуркации λ :

$$\lambda = \pm \sqrt{D(p - p_0)} \quad (1.12)$$

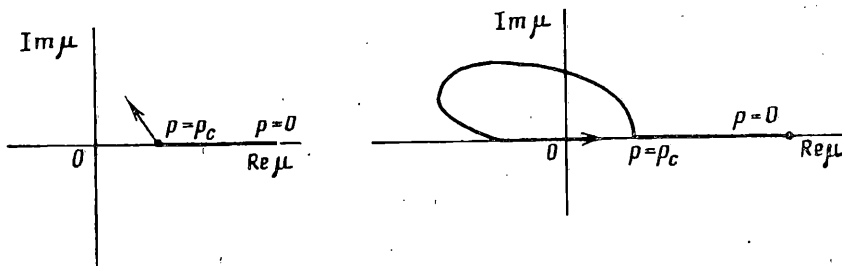
Если $D > 0$, то при возрастании p показатели λ ведут себя так, как показано на фиг. 3, с. Если $D < 0$, то направление движения корней изменяется на обратное.

Рассуждения и выкладки этого параграфа подытожим в виде утверждения.

Теорема. Однопараметрические циркуляционные системы подвержены катастрофам типа флаттер, переход от колебательной к статической неустойчивости



Фиг. 3



Фиг. 4

(или наоборот) и дивергенция, которые описываются выражениями (1.10), (1.12) и показаны на фиг. 3, *a*, *b*, *c*, соответственно.

Соответствующие трехмерные картинки $\lambda - p$ аналогичны фиг. 2.

2. Однопараметрические циркуляционные системы исследовались во многих конкретных задачах [1—9]. В [8], в частности, изучалось поведение собственных значений матриц от параметра. Фиг. 4 воспроизводит фиг. 66, *c*, *d* из [8]. На ней изображена качественная картина поведения собственного значения μ несимметричной матрицы на комплексной плоскости от параметра p , p_c обозначает критическое значение параметра. Заметим, что такое поведение μ невозможно, поскольку в п. 1 было показано, что сход собственных значений μ с действительной оси (или их выход на действительную ось) возможны лишь при встрече μ и их сильным взаимодействии под прямым углом.

В очень многих работах, например [1, 2, 5, 6], авторы изображают характерную картину зависимости p от μ , воспроизведенную на фиг. 5, а в качестве условия флаттера используют условие $dp/d\mu = 0$. Однако заметим, что при $p > p_c$ собственные значения не исчезают. Кроме того, в точке кратности собственные значения не дифференцируемы в обычном смысле. Поэтому изображаемая картина и используемое выражение для границы флаттера вряд ли корректны.

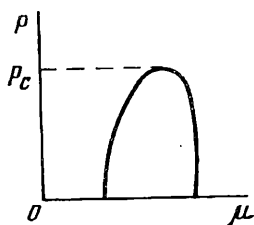
3. Рассмотрим случай, когда матрица M постоянная, а матрица A зависит от параметра p линейно

$$A = B - pC \quad (3.1)$$

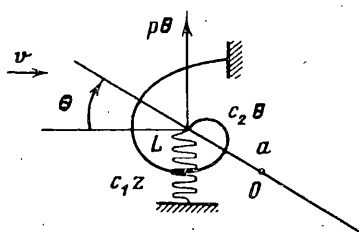
где B — симметричная, положительно определенная матрица, C — несимметричная матрица, p — параметр, $p \geq 0$. Подставляя (3.1) в (1.2), приходим к задаче на собственные значения

$$(pC - B)X = \lambda^2 MX \quad (3.2)$$

Исследуем поведение λ от параметра p . С этой целью умножим сначала (3.2) скалярно на X . В результате получим



Фиг. 5



Фиг. 6

$$\lambda^2 = (pc - b)/m$$

$$c = (CX, X), \quad b = (BX, X), \quad m = (MX, X)$$

Ввиду положительной определенности B и M имеем $b > 0$, $m > 0$. При $p = 0$ $\lambda^2 = -b/m$, следовательно, корни λ чисто мнимые $\lambda = \pm i\omega$, а собственный вектор X можно считать действительным (с точностью до произвольной постоянной).

Вычислим производную простого корня $d\lambda/dp$. Для этого, наряду с (3.2), рассмотрим сопряженную задачу

$$(pC^T - B) Y = \bar{\lambda}^2 MY \quad (3.3)$$

Выражение для производной принимает вид

$$d\lambda/dp = (CX, Y)/(2\lambda (MX, Y)) \quad (3.4)$$

$$\lambda = i\omega, \quad \bar{\lambda} = -\lambda, \quad Y = X \text{ при } p = 0.$$

Поэтому при $p = 0$ производная $d\lambda/dp$ — число мнимая величина. Это согласуется с результатом предыдущего параграфа, что при изменении p простые корни λ не сходят с мнимой оси. При возрастании p значения λ могут сойти с мнимой оси лишь при кратности λ , фиг. 3 a, b .

Рассмотрим случай флаттера, фиг. 3, a . Этот случай, реализуемый при $p = p_f$, характеризуется двукратным корнем $\lambda_0 = i\omega_0$ и собственными векторами X_0, Y_0 в задачах (3.2), (3.3). Условие ортогональности записывается в виде $(MX_0, Y_0) = 0$. Иногда это условие называется условием флаттера. При $p \rightarrow p_f$ из (3.4) следует $d\lambda/dp \rightarrow \infty$. То же справедливо и при дивергенции, так как $\lambda \rightarrow 0$. Это означает бесконечную скорость нарастания катастрофы при ее приближении, что является общим фактом теории катастроф [16].

Согласно (1.9), (1.10), при $p \approx p_f$ справедливо разложение

$$\lambda = \pm i\omega_0 \left(1 \pm \frac{\sqrt{G(p - p_f)}}{2\omega_0^2} \right), \quad G = \frac{(CX_0, Y_0)}{(MX_1, Y_0)}$$

где X_0, Y_0 определяются из (3.2), (3.3), в которых надо положить $\lambda = i\omega_0$, $p = p_f$. Присоединенный вектор X_1 находится из уравнения $(p_f C - B) X_1 + \omega_0^2 M X_1 = M X_0$.

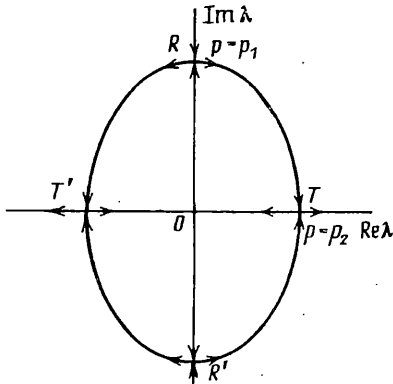
Рассмотрим теперь случай дивергенции, фиг. 3, c . Согласно (1.11), (1.12), для разложения λ получается соотношение

$$\lambda = \pm \sqrt{K(p - p_0)}, \quad K = (CX_0, Y_0)/(MX_0, Y_0)$$

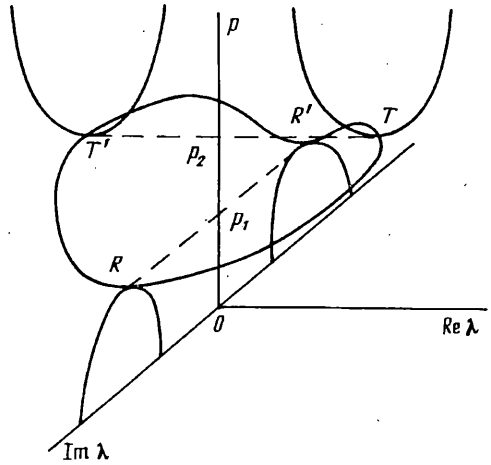
где векторы X_0, Y_0 определяются из уравнений

$$B X_0 = p_f C X_0, \quad B Y_0 = p_0 C^T Y_0 \quad (3.5)$$

Эти же уравнения служат и для критического параметра дивергенции p_c .



Фиг. 7



Фиг. 8

Величина p_d является минимальным действительным собственным значением в задачах (3.5):

Рассмотрим теперь частный случай, когда матрица C кососимметричная $C^T = -C$. Покажем, что при этом дивергенция невозможна. Действительно, допустив обратное, из (3.5) получим $p_d(CX, X) - (BX, X) = 0$. Так как X — действительный вектор, то $(CX, X) = 0$ и, следовательно, $(BX, X) = 0$. Но это невозможно ввиду $B > 0$. Таким образом, дивергенция возможна лишь тогда, когда B — симметричная часть матрицы A — имеет нулевые собственные значения. Аналогичный результат из других соображений получен в работе [13].

4. В качестве иллюстративного примера рассмотрим задачу о флаттере крыла в упрощенной формулировке [3]. Крыло моделируется жесткой панелью, которая имеет две степени свободы: вертикальное перемещение z и угол θ , фиг. 6. Считается, что аэродинамическая сила $p\theta$, приложенная в точке L , пропорциональна углу атаки θ и квадрату скорости потока v . Центр масс сечения крыла находится в точке O . Выпишем уравнения движения крыла [3]:

$$m\ddot{z} - m\ddot{\theta} + c_1 z - p\theta = 0 \quad (4.1)$$

$$-m\ddot{z} + m(i_0^2 + a^2)\ddot{\theta} + c_2\theta = 0$$

Здесь m — погонная масса панели, c_1 и c_2 — коэффициенты жесткости, p — параметр потока, пропорциональный квадрату скорости, i_0 — радиус инерции относительно точки O . Радиус инерции относительно точки L равен $i_L^2 = i_0^2 + a^2$. Считая параметры задачи фиксированными, проанализируем устойчивость системы (4.1) в зависимости от параметра потока $p \geq 0$. Система (4.1), как нетрудно видеть, является циркуляционной. Характеристическое уравнение для нее имеет вид

$$b_0\lambda^4 + b_2\lambda^2 + b_4 = 0 \quad (4.2)$$

$$b_0 = m^2 i_0^2, \quad b_2 = c_2 m + c_1 m i_L^2 - p m a, \quad b_4 = c_1 c_2$$

Дискриминант уравнения (4.2) $D_s = b_2^2 - 4b_0b_4$ является квадратной параболой относительно параметра p . Нетрудно убедиться, что он имеет положительные корни p_1 и p_2 , причем $D_s(p) < 0$ при $p_1 < p < p_2$. Коэффициент $b_2(p)$ является линейной функцией p , $b_2(p) < 0$ при $p > p_3$, причем $p_1 < p_3 < p_2$. Поэтому корни

уравнения (4.2) λ^2 при $0 \leq p < p_1$ разные и отрицательные, при $p_1 < p < p_2$ — комплексно-сопряженные, при $p \geq p_2$ — положительные. Значения p_1 и p_2 равны

$$p_1 = c_1 a + (\sqrt{c_2} - i_0 \sqrt{c_1})^2 / a$$

$$p_2 = c_1 a + (\sqrt{c_2} + i_0 \sqrt{c_1})^2 / a$$

Поведение корней λ в зависимости от p представлено на фиг. 7, 8. Панель устойчива при $0 \leq p < p_1$. Область $p_1 \leq p < p_2$ является областью флаттера (колебательной неустойчивости). При $p > p_2$ флаттер сменяется аperiодической неустойчивостью (дивергенцией). Заметим, что процесс развития неустойчивости, представленный на фиг. 7, 8, является в определенном смысле обратным гироскопической стабилизации [19], когда неустойчивость сменяется устойчивостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
2. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, 1964. 336 с.
3. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
4. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312 с.
5. Huseyin K. Vibrations and stability of multiple parameter systems. Alphen aan den Rijn, Noordhoff, 1978. 216 p.
6. Leipholz H. Stability of elastic systems. Alphen aan den Rijn, Sijthoff & Noordhoff, 1980. 475 p.
7. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.
8. Leipholz H. Stability theory. Stuttgart, John Wiley & Sons and B. G. Teubner, 1987. 359 p.
9. Seyranian A. P. Structural optimization under stability and vibration constraints. part 5, Ed. M. Zyczkowski, Wien—New York, Springer—Verlag, 1989. 329 p.
10. Агафонов С. А. Об устойчивости неконсервативных систем//Вестн. МГУ. Математика, механика. 1972. № 4. С. 87—90.
11. Карапетян А. В. Об устойчивости неконсервативных систем//Вестн. МГУ. Математика, механика. 1975. № 4. С. 109—113.
12. Лахаданов В. М. О стабилизации потенциальных систем//ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 53—58.
13. Зевин А. А. К теории линейных неконсервативных систем//ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 386—391.
14. Галин Д. М. О вещественных матрицах, зависящих от параметров//Успехи математических наук. 1972. Т. 27. Вып. 1(163). С. 241—242.
15. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
16. Арнольд В. И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.
17. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений//Успехи математических наук. 1960. Т. 15. Вып. 3(93). С. 3—80.
18. Сейранян А. П. Анализ чувствительности собственных значений и развитие неустойчивости//Стройники часопис. 1991. Т. 42. Вып. 3. С. 193—208.
19. Сейранян А. П. Взаимодействие частот колебаний гироскопической системы//Изв. АН СССР. МТТ. 1993. № 4.