

УДК 539.3:534.1

© 1994 г. Н. А. АЛФУТОВ, И. А. ДЫМКОВ, Ю. Г. ЧЕРЕПАНОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ТЕМПЕРАТУРНО-СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Предлагается методика расчета на устойчивость металлокомпозитных оболочек цилиндрической формы, материал которых работает за пределом упругости. Для описания неупругих свойств металлокомпозитов используется структурный подход, позволяющий описать ряд присущих этим материалам эффектов. Исследуется потеря устойчивости гладких и подкрепленных шпангоутами оболочек слоистого строения под действием внешнего давления, продольной сжимающей силы и повышенной температуры. Даются необходимые рекомендации для проведения подобных расчетов.

1. Определяющие соотношения для материала. Наиболее ответственным моментом при создании соответствующих методик является выбор соотношений, описывающих неупругие свойства композиционного материала. Металлокомпозиты обнаруживают целый ряд эффектов, отсутствующих у гомогенных конструкционных материалов. Среди них — анизотропное упрочнение, возможность возникновения пластических деформаций при чисто температурных воздействиях на материал, зависимость жесткостных свойств от времени и некоторые другие [1, 2]. Математические модели, адекватно описывающие процессы неупругого деформирования металлокомпозитов, требуют проведения значительного числа весьма трудоемких экспериментов. Особенно сложны методики исследования процессов их неизотермического течения и ползучести. Преодолеть возникающие трудности и заметно сократить число необходимых экспериментов позволяет использование для описания неупругих свойств композиционных материалов структурного подхода. Здесь с успехом могут быть использованы простые модели композитной среды. Одной из таких моделей является модель тонких сечений [3], предназначенная для определения свойств волокнистых композитов при плоском напряженном состоянии — напряженном состоянии, развивающемся в материале широкого класса оболочечных конструкций. Деформационная анизотропия пластически деформирующихся компонентов приводит к тому, что оси симметрии их жесткостных свойств могут не совпадать с направлением армирования. Кроме того, при температурно-силовых воздействиях на материал связь напряжений с деформациями неоднородна.

Модель тонких сечений [3] предполагает разбиение представительного элемента однонаправленного материала на элементарные слои, не взаимодействующие друг с другом по смежным граням. Напряженное состояние компонентов в пределах элементарного слоя считается однородным. Контакт по границе их раздела — идеальным. Связь средних напряжений $\sigma = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}\}^T$ с деформациями $\varepsilon = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}\}^T$ для элементарного слоя

$$d\sigma = B d\varepsilon - ds \quad (1.1)$$

удобно представить в блочной форме

$$d\sigma_f = B_{ff} d\varepsilon_f + B_{fs} d\varepsilon_s - ds_f$$

$$d\sigma_r = B_{rr} d\varepsilon_r + B_{rf} d\varepsilon_f - ds, \quad (1.2)$$

$$\sigma_f = \sigma_{11}, \quad \sigma_r = \{\sigma_{22}, \tau_{12}\}^T; \quad \varepsilon_f = \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_r = \{\sigma_{22}, \tau_{12}\}^T$$

$$B_{ff} = b_{11}, \quad B_{fr} = \|b_{12} \ b_{13}\| \quad (1.3)$$

$$B_{rf} = \|b_{21} \ b_{31}\|^T, \quad B_{rr} = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$s_f = s_1, \quad s_r = \{s_2, s_3\}^T, \quad s = \{s_1, s_2, s_3\}^T$$

где B — матрица жесткости элементарного слоя; s — вектор напряжений, обусловленных температурно-временными эффектами.

При этом уравнения равновесия и совместности деформаций компонентов для элементарного слоя оказывается возможным записать в следующем виде

$$\sigma_f = \vartheta' \sigma_f' + \vartheta'' \sigma_f'', \quad \sigma_r = \sigma_r' = \sigma_r'' \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_f = \varepsilon_f' = \varepsilon_f'', \quad \varepsilon_r = \vartheta' \varepsilon_r' + \vartheta'' \varepsilon_r''$$

Здесь и далее одним и двумя штрихами помечены величины, относящиеся соответственно к материалу волокна и матрицы, ϑ — объемное содержание соответствующего компонента.

Отношение между напряжениями и деформациями для компонентов

$$d\varepsilon' = A' d\sigma' - de'$$

или

$$de_f' = A_{ff}' d\sigma_f' + A_{fr}' d\sigma_r' - de_f' \quad (1.5)$$

$$de_r' = A_{rf}' d\sigma_f' + A_{rr}' d\sigma_r' - de_r'$$

$$A = B^{-1}, \quad de = Ads; \quad A_{ff} = a_{11}, \quad A_{fr} = \|a_{12} \ a_{13}\|$$

$$A_{rf} = \|a_{21} \ a_{31}\|^T, \quad A_{rr} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$e_f = e_1, \quad e_r = \{e_2, e_3\}^T$$

(аналогичным образом они выглядят и для материала матрицы) замыкают систему уравнений (1.1)—(1.5), которая позволяет получить выражения для блоков матрицы B и вектора ds в виде

$$B_{rr} = (\vartheta' (B_{rr}')^{-1} + \vartheta'' (B_{rr}'')^{-1})^{-1}$$

$$B_{rf} = B_{rr} (\vartheta' (B_{rr}')^{-1} B_{rf}' + \vartheta'' (B_{rr}'')^{-1} B_{rf}'')$$

$$B_{fr} = -(\vartheta' A_{fr}' / A_{ff}' + \vartheta'' A_{fr}'' / A_{ff}'') B_{rr}$$

$$B_{ff} = \vartheta' / A_{ff}' + \vartheta'' / A_{ff}'' + B_{fr} (B_{rr})^{-1} B_{rf}$$

$$ds_r = B_{rr} (\vartheta' (B_{rr}')^{-1} ds_r' + \vartheta'' (B_{rr}'')^{-1} ds_r'')$$

$$ds_f = \vartheta' de_f' / A_{ff}' + \vartheta'' de_f'' / A_{ff}'' + B_{fr} (B_{rr})^{-1} ds_r$$

Для проведения расчетов необходимо установить связь напряженно-деформированного состояния компонентов с напряженно-деформированным состоянием элементарного слоя. Ее удобно представить следующим образом:

$$d\sigma'' = U d\sigma + d\nu$$

или

$$d\sigma_f'' = U_{ff}d\sigma_f + U_{fr}d\sigma_r + dv_f$$

$$d\sigma_r'' = U_{rf}d\sigma_f + U_{rr}d\sigma_r + dv_r$$

$$U_{ff} = u_{11}, U_{fr} = \|u_{12} \ u_{13}\|, U_{rf} = \|u_{21} \ u_{31}\|^T,$$

$$U_{rr} = \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}, v_f = v_1, v_r = \{v_2, v_3\}^T$$

Выражения для блоков U матрицы и вектора dv имеют вид

$$U_{ff} = A_{ff}/A_{ff}'', U_{fr} = (A_{fr} - A_{fr}'')/A_{ff}'', U_{rf} = 0$$

$$U_{rr} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, dv_f = (de_f - de_f'') A_{ff}, dv_r = 0$$

Кроме того, в силу (1.4) имеет место соотношение

$$\sigma' = \|1/\vartheta', 1, 1\| \sigma - \|0/\vartheta', 0, 0\| \sigma''.$$

Свойства однонаправленного материала, т. е. связь средних по высоте представительного элемента напряжений $\bar{\sigma} = \int \sigma dz/a$ ($0 \leq z \leq a$) с его деформациями $d\bar{\epsilon} = d\epsilon$ (равными по предположению средним деформациям элементарных слоев) $d\bar{\sigma} = \bar{B}d\bar{\epsilon} - d\bar{s}$ устанавливаются с использованием известных соотношений теории слоистых сред

$$\bar{B} = \frac{1}{a} \int_0^a B(z) dz \approx \frac{1}{a} \sum_i B_i(z) \Delta z_i, d\bar{s} = \frac{1}{a} \int_0^a ds(z) dz \approx \frac{1}{a} \sum_i ds_i(z) \Delta z_i$$

Если толщина монослоя $h = 2a$ больше диаметра волокна $d = 2r$, то объемная доля волокна в пределах элементарного слоя ϑ' меняется по координате z таким образом, что

$$\vartheta' = \begin{cases} 2 \sqrt{r^2 - z^2}/t & \text{при } 0 \leq z \leq r \\ 0 & \text{при } r \leq z \leq a \end{cases}$$

в противном случае

$$\vartheta' = \begin{cases} 2 \sqrt{r^2 - z^2}/t & \text{при } 0 \leq z \leq 2a - r \\ 2 (\sqrt{r^2 - z^2} + \sqrt{r^2 - (2a - r)^2})/t & \text{при } 2a - r \leq z \leq a \end{cases}$$

Среднее по представительному элементу значение объемной доли волокна ϑ' связано с его диаметром d , шагом укладки t и толщиной монослоя h очевидным соотношением $\vartheta' = (1/4)\pi d^2/ht$. После перехода к общей для пакета различным образом ориентированных слоев системе координат $1^*, 2^*$:

$$\sigma^* = \alpha^T \sigma; \epsilon^* = \alpha^{-1} \epsilon; B^* = \alpha^T B \alpha; s^* = \alpha^T s$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ -2 \sin \varphi \cos \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{vmatrix}$$

где φ — угол армирования i -го слоя, свойства пакета $d\sigma^* = G d\epsilon^* - dF$ устанавливаются с использованием тех же соотношений теории слоистых сред (H — его суммарная толщина):

$$G = \frac{1}{H} \sum_i h_i B_i^*, dF = \frac{1}{H} \sum_i h_i ds_i^*, H = \sum_i h_i$$

Для проведения расчетов необходимо так же располагать соотношениями, устанавливающими свойства компонентов. Деформации компонентов металлокомпозигов в основном складываются из термоупругих ϵ^e , пластических ϵ^p и

развивающихся главным образом при повышенных температурах деформаций ползучести ϵ^c ($\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p + \epsilon^c$).

Соотношения линейной термоупругости для изотропного материала

$$\epsilon_{ij}^e = \frac{1}{E} ((1 + \nu) \sigma_{ij} + \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}) + \delta_{ij} \int \alpha dT$$

могут быть представлены следующим образом

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{1}{E} ((1 + \nu) d\sigma_{ij} + \nu \delta_{ij} d\sigma_{kk}) + \left[-\frac{1}{E} \frac{dE}{dT} ((1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{E} \frac{d\nu}{dT} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_{kk}) + \delta_{ij} \alpha \right] dT$$

Здесь σ_{ij} и ϵ_{ij} — тензоры напряжений и деформаций, ν — коэффициент Пуассона, $\alpha = d\epsilon_{ij}/dT$ (не суммировать по i) — коэффициент линейного расширения, T — температура, используется обычное соглашения о суммировании по повторяющемуся индексу, δ_{ij} — символ Кронекера.

Для плоского напряженного состояния, будучи записаны в векторно-матричной форме, соотношения термоупругости приобретают вид

$$d\epsilon^e = A^e d\sigma + d\epsilon^e \quad (1.6)$$

$$A^e = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

$$d\epsilon^e = -\frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \nu \sigma_{22} \\ \sigma_{22} - \nu \sigma_{11} \\ 2(1+\nu) \tau_{12} \end{Bmatrix} dT + \frac{1}{E} \frac{d\nu}{dT} \begin{Bmatrix} -\sigma_{22} \\ -\sigma_{11} \\ 2\tau_{12} \end{Bmatrix} dT + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} dT$$

Армирующие волокна могут проявлять заметную анизотропию термоупругих свойств. Для ее описания можно ограничиться введением трех не зависящих от температуры коэффициентов $\Psi = E_2/E_1$, $\chi = 2G_{12}(1 + \nu_{12})/E_1$ и $\theta = \alpha_2/\alpha_1$, где E_1 , E_2 и G_{12} — модули упругости материала волокна соответственно в продольном, поперечном направлениях и при сдвиге, ν_{12} — коэффициент поперечной деформации ($\nu_{12} = |\epsilon_{22}/\epsilon_{11}|$ при $\sigma_{22} = 0$), α_1 и α_2 — коэффициенты линейного расширения соответственно в продольном и поперечном направлениях.

В результате выражения для матрицы A^e и вектора $d\epsilon^e$ в (1.6) приобретают вид

$$A^e = \frac{1}{E_1} \begin{vmatrix} 1 & -\nu_{12} & 0 \\ -\nu_{12} & 1/\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu_{12})/\chi \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

$$d\epsilon^e = -\frac{1}{E_1} \frac{dE_1}{dT} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \nu_{12} \sigma_{22} \\ \sigma_{22}/\Psi - \nu_{12} \sigma_{11} \\ 2(1+\nu_{12}) \tau_{12}/\chi \end{Bmatrix} dT + \frac{1}{E_1} \frac{d\nu_{12}}{dT} \begin{Bmatrix} -\sigma_{22} \\ -\sigma_{11} \\ 2\tau_{12}/\chi \end{Bmatrix} dT + \alpha_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ \theta \\ 0 \end{Bmatrix} dT$$

Функциями температуры при этом, как можно видеть, являются величины E_1 , ν_{12} и α_1 . При $\Psi = \chi = \theta = 1$ ($E_1 = E$, $\nu_{12} = \nu$, $\alpha_1 = \alpha$) соотношения (1.8) переходят в (1.7).

Соотношения простейшего варианта теории неизотермического течения имеют вид

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{9}{4} \frac{s_{ij} s_{kl}}{\sigma_i^2 H} d\sigma_{kl} - \frac{3}{2} \frac{s_{ij} g}{\sigma_i H} dT$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3) \delta_{ij} \sigma_{kk}, \quad \sigma_i = ((3/2) s_{ij} s_{ij})^{1/2}.$$

$$H = \partial \sigma_T / \partial q, \quad g = \partial \sigma_T / \partial T, \quad q = \int \overline{d\varepsilon_i^p}, \quad \overline{d\varepsilon_i^p} = ((2/3) d\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p)^{1/2}$$

Здесь s_{ij} , σ_i — тензор-девиатор и интенсивность напряжений; H , g — частные производные функции $\sigma_T(q, T)$, представляющей собой зависимость текущего значения предела текучести σ_T от меры упрочнения q и температуры T ; $\overline{d\varepsilon_i^p}$ — интенсивность приращения пластических деформаций. Величина H связана с касательным модулем E_k , определяемым по диаграммам изотермического деформирования при одноосном растяжении (сжатии) материала, соотношением $H = (1/E_k - 1/E)^{-1}$. Упругое деформирование материала ($\varepsilon_{ij}^p = 0$) имеет место при выполнении хотя бы одного из следующих двух условий: $\sigma_i < \sigma_T$, $d\sigma_i \leq g dT$.

При плоском напряженном состоянии

$$d\varepsilon^p = A^p d\sigma + d\varepsilon^p$$

$$A^p = \frac{9}{4} \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) \begin{vmatrix} s_{11}^2 & s_{11}s_{22} & 2s_{11}\tau_{12} \\ s_{11}s_{22} & s_{22}^2 & 2s_{22}\tau_{12} \\ 2s_{11}\tau_{12} & 2s_{22}\tau_{12} & 4\tau_{12}^2 \end{vmatrix}$$

$$d\varepsilon^p = -\frac{3}{2} \frac{g}{\sigma_i} \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) \{s_{11}, s_{22}, 2\tau_{12}\}^T dT$$

$$\sigma_i = (\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\tau_{12}^2)^{1/2}$$

$$\overline{d\varepsilon_i^p} = \frac{2}{\sqrt{3}} ((d\varepsilon_{11}^p)^2 + d\varepsilon_{11}^p d\varepsilon_{22}^p + (d\varepsilon_{22}^p)^2 + (d\tau_{12}^p)^2/4)^{1/2}$$

$$s_{11} = (2/3) (\sigma_{11} - (1/2) \sigma_{22}) \quad (1 \Leftrightarrow 2)$$

Ползучесть металлокомпозитов проявляется главным образом при повышенных температурах и, в основном, определяется деформациями кратковременной ползучести. Соотношения, описывающие процессы кратковременной ползучести $\dot{\varepsilon}_{ij}^c = (3/2) A (\sigma_i^{N-1}/S^N) s_{ij}$, где $\dot{\varepsilon}_{ij}^c$ — тензор скоростей деформаций ползучести, при плоском напряженном состоянии имеет вид

$$d\varepsilon^c = d\varepsilon^c = (3/2) A (\sigma_i^{N-1}/S^N) \{s_{11}, s_{22}, 2\tau_{12}\}^T$$

где A , $N(T)$ и $S(T)$ — определяемые экспериментально константа и функции температуры.

Полные деформации компонентов определяются в соответствии с (1.6) суммированием их отдельных составляющих. Так, например, для материала матрицы

$$d\varepsilon'' = A'' d\sigma'' + d\varepsilon''$$

$$A'' = A^e + A^p; \quad d\varepsilon'' = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p + d\varepsilon^c$$

При использовании для решения задачи устойчивости теории малых упруго-пластических деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E_c} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}}{3K}$$

где E_c — текущий модуль, определяемый по диаграмме деформирования материала, связь напряжений с деформациями для компонентов при плоском напряженном состоянии имеет вид (E_k — касательный модуль материала)

$$d\varepsilon = A d\sigma$$

$$A = \begin{vmatrix} k + ls_{11}^2 + 1/E_c & k + ls_{11}s_{22} - 1/2E_c & 2ls_{11}\tau_{12} \\ k + ls_{11}s_{22} - 1/2E_c & k + ls_{22}^2 + 1/E_c & 2ls_{22}\tau_{12} \\ 2ls_{11}\tau_{12} & 2ls_{22}\tau_{12} & 4l\tau_{12}^2 + 3/E_c \end{vmatrix}$$

$$k = \frac{1 - 2\nu}{3E}, \quad l = \frac{9}{4} \frac{1/E_k - 1/E_c}{\sigma_1^2}$$

2. Соотношения устойчивости. Для получения уравнений устойчивости цилиндрической оболочки с несимметричным строением пакета воспользуемся вариационно-матричным способом [4]. Критерий бифуркации безмоментного докритического состояния запишем в виде

$$\int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^h (\delta \bar{\epsilon}_z^T \bar{\sigma}_z + \delta \bar{\epsilon}_z^V T \sigma_z^0) dx R d\varphi dz - \int_0^l \int_0^{2\pi} \delta \bar{U}^T \Delta p dx R d\varphi = 0 \quad (2.1)$$

$$\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}\}^T, \quad \epsilon = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}\}^T$$

$$\bar{U} = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}^T, \quad \Delta p = \{\Delta p_1, \Delta p_2, \Delta p_3\}^T$$

Здесь с индексом z — векторы напряжений и деформаций на расстоянии z от поверхности приведения, \bar{U} — вектор дополнительных перемещений поверхности приведения (u — продольное, v — окружное, w — нормальное перемещения), одной чертой помечены линейные, а галочкой — квадратичные относительно \bar{U} составляющие напряжений и деформаций, σ_z^0 — вектор докритических напряжений, Δp — вектор приращений, действующий на поверхность приведения внешней нагрузки, x и $Rd\varphi$ — продольная и окружная координаты, l и h — длина и толщина оболочки, предполагается, что работа на дополнительных перемещениях приращений внешних сил на торцах оболочки равна нулю.

По гипотезе Кирхгофа — Лява

$$\bar{\epsilon}_z = \bar{\epsilon} + z\bar{\kappa} \quad (2.2)$$

$$\bar{\epsilon} = \{\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2, \bar{\gamma}_{12}\}^T, \quad \bar{\kappa} = \{\bar{\kappa}_{11}, \bar{\kappa}_{22}, \bar{\kappa}_{12}\}^T$$

где $\bar{\epsilon}$, $\bar{\kappa}$ — векторы деформаций (и изменений кривизн) поверхности приведения.

Вводя обозначение $X = \{\bar{\epsilon}^T, \bar{\kappa}^T\}^T$, связь деформаций (и изменений кривизн) срединной поверхности с перемещениями можно записать в виде (L — операторная матрица):

$$X = L\bar{U} \quad (2.3)$$

$$L = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/R\partial\varphi & 1/R \\ \partial/R\partial\varphi & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & -\partial^2/\partial x^2 \\ 0 & (1/R)\partial/R\partial\varphi & -\partial^2/(R^2\partial\varphi^2) \\ 0 & (2/R)\partial/\partial x & (-2/R)\partial^2/\partial\varphi\partial x \end{vmatrix}$$

Вектор углов поворота нормали к поверхности приведения $\bar{\theta} = \{\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2\}^T$ связан с вектором соотношением

$$\bar{\theta} = F\bar{U}, \quad F = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\partial/\partial x \\ 0 & (1/R) & -\partial/R\partial\varphi \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

Вектор $\delta \bar{\epsilon}^V$ имеет вид

$$\delta \bar{\epsilon}^V = \{\bar{\theta}_1 \delta \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2 \delta \bar{\theta}_2, \delta(\bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2)\}^T \quad (2.5)$$

Вводя обозначения

$$\int_0^h \bar{\sigma}_z dz = \bar{T}, \int_0^h \bar{\sigma}_z z dz = \bar{M}, \bar{Q} = \{\bar{T}^T, \bar{M}^T\}^T$$

и используя связь приращений напряжений с приращениями деформаций при потере устойчивости $\bar{\sigma}_z = \mathbf{B}_z \bar{\epsilon}_z$, где \mathbf{B}_z — матрица жесткости материала оболочки (при активном нагружении) на расстоянии z от поверхности приведения, соотношение между вектором силовых факторов \bar{Q} и вектором деформаций (и изменений кривизн) поверхности приведения можно записать в виде

$$\bar{Q} = \mathbf{C} \bar{X}, \mathbf{C} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12}^T & C_{22} \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

$$C_{11} = \int_0^h \bar{B}_z dz, C_{12} = \int_0^h \bar{B}_z z dz, C_{22} = \int_0^h \bar{B}_z z^2 dz$$

с учетом (2.2), (2.3) и (2.6) интеграл по z первого слагаемого (2.1) может быть преобразован следующим образом:

$$\int_0^h \delta \bar{\epsilon}_z^T \bar{\sigma}_z dz = \int_0^h (\delta \bar{\epsilon} + z \delta \bar{\kappa})^T \bar{\sigma}_z = \delta (\mathbf{L} \delta \bar{U}) \mathbf{C} \bar{L} \bar{U} \quad (2.7)$$

Второе слагаемое, если обозначить

$$\mathbf{T}^0 = \int_0^h \sigma_z^0 dz = \{T_1^0, T_2^0, T_{12}^0\}^T, \mathbf{S} = \begin{vmatrix} T_1^0 & T_{12}^0 \\ T_{12}^0 & T_2^0 \end{vmatrix}$$

с учетом (2.4) и (2.5) дает

$$\int_0^h \delta \bar{\epsilon}_z^T \sigma_z^0 dz = \delta \bar{\epsilon}_z^T \mathbf{T}^0 = \delta \bar{\theta}^T \mathbf{S} \bar{\theta} = (\mathbf{F} \delta \bar{U})^T \mathbf{S} \bar{F} \bar{U} \quad (2.8)$$

В случае, когда на поверхность приведения действует гидростатическое давление p , вектор приращения внешней нагрузки $\Delta p = \{\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, (\bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2)\}^T$ связан с ее дополнительными перемещениями соотношением

$$\Delta p = \mathbf{A} \bar{U}, \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\partial/\partial x \\ 0 & 1/R & -\partial/R\partial\varphi \\ \partial/\partial x & \partial/R\partial\varphi & 1/R \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

С учетом (2.7)—(2.9) критерий (2.1) приобретает вид

$$\int_0^h \int_0^{2\pi} [\delta (\mathbf{L} \delta \bar{U}) \mathbf{C} \bar{L} \bar{U} + (\mathbf{F} \delta \bar{U})^T \mathbf{S} \bar{F} \bar{U} - \delta \bar{U}^T \mathbf{A} \bar{U}] dx R d\varphi = 0$$

и после интегрирования по частям (при $p = \text{const}$) дает уравнения устойчивости в перемещениях

$$(\mathbf{K} + \mathbf{R} + \mathbf{A}) \bar{U} = 0 \quad (2.10)$$

$$\mathbf{K} = \bar{\mathbf{L}} \mathbf{C} \bar{\mathbf{L}}, \mathbf{R} = \bar{\mathbf{F}} \mathbf{C} \bar{\mathbf{F}}$$

где $\bar{\mathbf{L}}$ и $\bar{\mathbf{F}}$ получаются из матриц \mathbf{L} и \mathbf{F} транспонированием и заменой на противоположные знаков у членов, содержащих дифференциальные операторы нечетных степеней, а также однородные граничные условия на торцах оболочки:

$$\bar{U} = 0 \text{ или } (\mathbf{L}_1 \mathbf{C} \bar{\mathbf{L}} + \mathbf{F}_1 \mathbf{S} \bar{\mathbf{F}}) \bar{U} = 0$$

$$\mathbf{I} (\partial \bar{U} / \partial x) = 0 \text{ или } \mathbf{I} (\mathbf{L}_2 \mathbf{C} \bar{\mathbf{L}} \bar{U}) = 0$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2/R \\ 0 & 0 & 0 & -\partial/\partial x & 0 & -2\partial/R\partial\varphi \end{vmatrix}$$

$$F_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, L_2 = \begin{vmatrix} 000 & 000 \\ 000 & 000 \\ 000 & -100 \end{vmatrix}, I = \{0, 0, 1\}$$

Осталось отметить, что компоненты матрицы S связаны с действующими нагрузками (осевой силой N , внешним давлением p и крутящим моментом M_k) соотношениями

$$T_1^0 = N/(2\pi R), T_2^0 = pR, T_{12}^0 = M_k/(2\pi R^2)$$

Наиболее просто уравнение (2.10) решается для шарнирно-опертой оболочки при $T_{12}^0 = 0$. Решение при этом можно искать в виде

$$\bar{u} = \bar{u}_{mn} \cos \mu x \sin n\varphi, \bar{v} = \bar{v}_{mn} \sin \mu x \cos n\varphi \quad (2.11)$$

$$\bar{w} = \bar{w}_{mn} \sin \mu x \sin n\varphi, \mu = m\pi/l$$

где m и n — параметры волнообразования.

Подстановка (2.11) в (2.10) приводит к системе уравнений относительно компонент вектора амплитудных значений дополнительных перемещений поверхности приведения \bar{U}_{mn} :

$$(K_{mn} + R_{mn} + A_{mn}) \bar{U}_{mn} = 0$$

$$K_{mn} = L_{mn}^T C L_{mn}, R_{mn} = F_{mn}^T C F_{mn}$$

$$A_{mn} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\mu \\ 0 & 1/R & -n/R \\ -\mu & -n/R & 1/R \end{vmatrix}, F_{mn} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\mu \\ 0 & 1/R & -n/R \end{vmatrix}$$

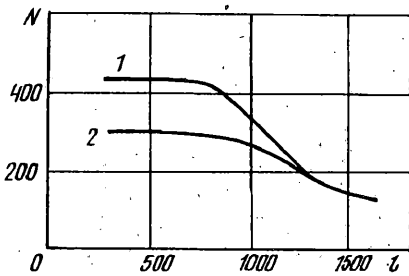
$$L_{mn} = \begin{vmatrix} -\mu & 0 & n/R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n/R & \mu & 0 & -n/R^2 & 2\mu/R \\ 0 & 1/R & 0 & \mu^2 & (n/R)^2 & -2\mu n/R \end{vmatrix}$$

В результате решение задачи сводится к отысканию наименьшего корня уравнения $\det(K_{mn} + R_{mn} + A_{mn}) = 0$.

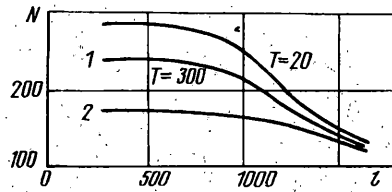
3. Примеры. Рассмотрим ряд результатов расчетов, полученных с использованием изложенной методики.

На фиг. 1 представлены зависимости критического значения осевой сжимающей силы N [кН] продольно-армированный ($\nu_l = 0,5$) бороалюминиевой оболочки от ее длины l (радиус оболочки $R = 30$ мм, толщина $h = 1$ мм), полученные с использованием для описания свойств материала при решении задачи устойчивости теории течения (1) и теории малых упругопластических деформаций (2). Такая задача по сути дела определяет несущую способность бороалюминиевой стойки кругового цилиндрического сечения при сжатии. Видно, что различия в результатах расчетов с использованием разных теорий пластичности для металлокомпозитных конструкций могут быть весьма заметными. Рассмотренная здесь задача особенно показательна в этом смысле. Отмеченное обстоятельство, в частности, обусловлено тем, что в материале металлокомпозитных конструкций могут развиваться значительные пластические деформации. Таким образом, к рекомендациям относительно предпочтительности использования для расчетов на устойчивость деформационной теории в случае металлокомпозитных конструкций следует относиться особенно внимательно.

В табл. 1 представлены результаты расчетов на устойчивость (p_2^* [МПа]) при действии всестороннего внешнего давления цилиндрических бороалюминиевых оболочек с различными схемами армирования Π_i (Π_1 — окружное армирование, Π_2 — окружное армирование с неармированным внутренним слоем, Π_3 — продольно-поперечное армирование: наружные слои армированы в окружном, внутренние в продольном направлениях). Наружный диаметр оболочки — $D = 122$ мм,



Фиг. 1



Фиг. 2

материал матрицы — сплав АМг-6. Здесь и далее при решении задачи устойчивости использовались соотношения теории малых упругопластических деформаций. В таблице приводятся также результаты упругого расчета p_3^* и экспериментальные значения критического давления p_1^* . Величина объемной доли волокна и структура пакета для каждой оболочки определялись по фотографиям шлифов. Наблюдается вполне удовлетворительное соответствие результатов расчетов экспериментальным данным.

В табл. 2 представлены результаты расчетов по определению несущей способности бороалюминиевых оболочек из однонаправленного материала при осевом сжатии. Длина оболочки $l = 90$ мм, диаметр $D = 45$ мм, объемная доля волокна $v_f = 0,39$, матрица — сплав АМг-6. Расчеты были проведены для различных значений угла $\bar{\varphi}$ рассогласования направления армирования с образующей. В таблице приводятся также экспериментальные значения напряжений исчерпания несущей способности оболочек при осевом сжатии σ_0 [МПа]. Данные оболочки служили в качестве образцов для определения прочности материала при сжатии вдоль волокон.

Проведенные расчеты позволяют ответить на вопрос, почему испытания по определению прочности материала, проведенные на образцах такой геометрии, дают заниженные (по сравнению с результатами испытаний на образцах малых длин) значения прочности материала. Дело в том, что исчерпание несущей способности образцов инициируется потерей устойчивости. Результаты расчетов позволяют также оценить, как отклонение направлений армирования образца от заданного (осевого) влияет на его несущую способность (в рамках задачи устойчивости образца как оболочки несложно оценить и влияние эксцентриситета приложения нагрузки).

На фиг. 2 представлены зависимости несущей способности продольно армированной бороалюминиевой стойки кругового сечения ($R = 30$ мм, $h = 1$ мм) от ее длины для различных значений температуры. Кривые 1 и 2 получены соответственно без учета и с учетом возникающих в компонентах при нагревании структурных напряжений (явление их релаксации при повышенных температурах в данном случае не учитывалось). Эти результаты свидетельствуют о том, что учет температурных напряжений в компонентах металлокомпозитов при расчетных оценках несущей способности, выполненных из этих материалов элементов конструкций, необходим.

На фиг. 3, 4 представлены результаты параметрического анализа, позволяющие судить о рациональных схемах армирования подкрепленных шпангоутами цилиндрических бороалюминиевых оболочек, нагруженных внешним давлением при различных значениях температуры. При расчете подкрепленных оболочек использовался прием «размазывания», учитывалось, что материал шпангоутов работает в условиях одноосного напряженного состояния. Влияние на свойства материала структурных напряжений в данном случае не учитывалось. Отношение длины оболочки к ее радиусу $l/R = 2,5$, отношение радиуса к толщине обшивки $R/h_s = 50$, высота шпангоутов $h_{fr} = 1,5h_s$, ширина шпангоутов $b = h_s$, расстояние

Таблица 1

Π_i	l	h	p_1^*	p_2^*	p_3^*
Π_1	188	3,1	22,0	23,8	24,8
	52	2,2	25,2	22,1	38,2
	51	2,3	22,2	22,6	40,9
Π_2	191	3,4	20,1	20,8	25,5
	181	3,2	18,6	19,4	24,0
	180	3,3	19,6	20,0	25,0
Π_3	180	2,7	19,2	20,2	21,1
	175	2,8	20,2	21,2	22,0
	96	2,4	24,0	24,8	32,5

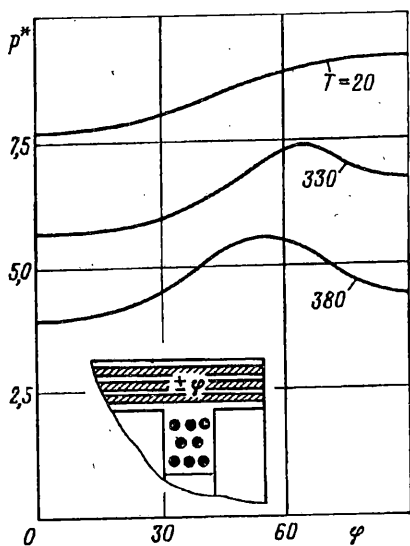
Таблица 2

h	$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 1^\circ$	$\varphi = 2^\circ$	ϵ_0
1,54	1650	1610	1490	1519
1,60	1700	1660	1530	1800
1,64	1730	1660	1550	1506

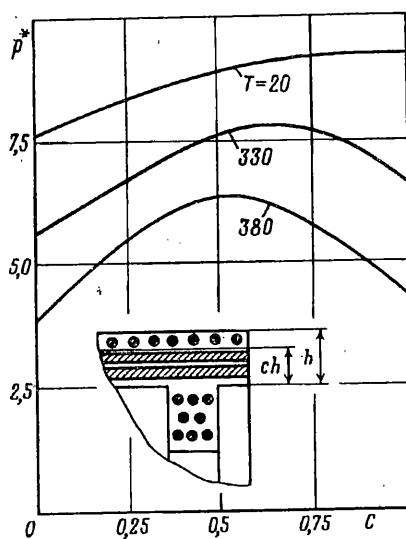
между шпангоутами $a = 5b$, шпангоуты армированы в окружном направлении. На фиг. 3 представлены зависимости критического давления p^* [МПа] от угла укладки волокна φ (угол отсчитывается от продольного направления) оболочки с перекрестно армированной обшивкой. На фиг. 4 аналогичные зависимости приводятся для оболочки с продольно-поперечным армированием обшивки. Здесь C — относительная толщина прилегающего к внутренней поверхности обшивки продольно армированного слоя (наружный слой армирован в окружном направлении). Представленные результаты свидетельствуют о том, что рациональные схемы армирования оболочек зависят от их температуры. Так, если при нормальной температуре оболочки не нуждаются в укладке арматуры в каком-либо направлении, отличном от окружного, то при повышенных температурах рациональные схемы армирования оказываются иными.

Далее приведен еще один результат, свидетельствующий о принципиальной возможности зависимости критических нагрузок металлокомпозитных оболочек от времени. Моделировалась ситуация, когда мгновенно нагретая от нормальной до достаточно высокой ($300-350^\circ\text{C}$) температуры продольно армированная бороалюминиевая стойка ($l = 250$ мм, $R = 30$ мм, $h = 1$ мм, $\nu_r = 0,5$) подвергалась затем нагружению осевой силой. На фиг. 5 представлены зависимости критического значения сжимающей силы N [кН] от времени выдержки стойки перед силовым нагружением при различных значениях температуры. Свойства ползучести материала матрицы (Д16Т) были приняты в соответствии с [5]. Полученный эффект роста критической нагрузки обусловлен процессами релаксации структурных напряжений в пластически деформирующемся материале матрицы.

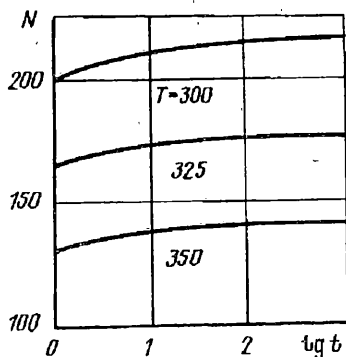
Полученные с использованием изложенной методики результаты хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными и позволяют сделать выводы: неупругие деформации материала матрицы могут существенно влиять на несущую способность металлокомпозитных оболочек; расчеты на устойчивость следует вести с использованием теории малых упругопластических деформаций; необходим учет возникающих в компонентах структурных напряжений; рациональные схемы армирования металлокомпозитных оболочек могут зависеть от температуры (также как от свойств материала матрицы и уровня действующих



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

напряжений); процессы релаксации структурных напряжений могут приводить к зависимости критических нагрузок от времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алфутов Н. А., Дымков И. А. Моделирование процессов деформирования волокнистых металлокомпозигов // Композиционные материалы: Справочник / Ред. В. В. Васильев и Ю. М. Тарнопольский. М.: Машиностроение, 1990. с. 147.
2. Алфутов Н. А., Дымков И. А. Исследование поведения армированных металлов при температурно-силовых воздействиях // VI Всес. конф. по композиционным материалам. Ереван: Изд. ЕГУ, 1987. Т. 2. с. 25.
3. Скудра А. М., Булавс Ф. Я. Структурная теория армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1978. 192 с.
4. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 264 с.
5. Работнов Ю. Н., Милейко С. Т. Кратковременная ползучесть. М.: Наука, 1970. 224 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.VI.1993