МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1994

УДК 539.3.01

© 1994 г. В. В. ВАСИЛЬЕВ, С. А. ЛУРЬЕ

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Рассматриваются краевые задачи теории упругости для прямоугольной ортотропной полосы. Методом разделения переменных решение задачи сводится к проблеме разложения заданных граничных функций на противоположных краях полосы в ряды по обобщенным собственным функциям (однородным решениям). Построены системы собственных функций, устанавливаются достаточные условия сходимости согласованных разложений заданных функций в ряды по однородным решениям.

Краевые задачи сводятся к разложению граничных функций в ряды общего вида по однородным решениям.

Исследуется проблема разложения двух различных функций в ряды по однородным решениям, которые соответствуют статическим, кинематическим и смешанным граничным условиям.

Эта проблема решается с помощью техники, использующей алгебру псевдо-дифференциальных операторов с аналитическими символами. В результате удается найти явные выражения для коэффициентов искомых разложений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую ортотропную полосу в центральных безразмерных координатах x и y ($|x| \le 1$, $|y| \le 1$). Координаты x и y отнесены соответственно к полудлине a и полуширине b полосы.

Основное разрешающее уравнение для функции напряжений $\varphi(x, y)$ имеет, как известно, следующий вид

$$q\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2p\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = 0 \tag{1.1}$$

$$p = c^{-2}(E_x/2G_{xy} - \nu_{yx}), \quad q = c^{-4}E_x/E_y, \quad c = a/b$$

где E_x, E_y, G_{xy}, ν_{yx} — модули упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно. Напряжения находятся по формулам

$$\sigma_x = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{1}{ab}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \tag{1.2}$$

Соответственно перемещения записываются через функцию напряжений в следующем виде

$$u = \frac{a}{b^2E_x}\left(\int\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}dx - \frac{\nu_{xy}}{c^2}\frac{\partial\varphi}{dx}\right), \quad v = \frac{b}{a^2E_y}\left(\int\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dy - \nu_{xy}c^2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \tag{1.3}$$

Полагаем, что на продольных кромках полосы заданы однородные граничные условия

$$m_i^{\pm}(\varphi) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad \text{при} \quad y = \pm 1 \tag{1.4}$$

где $m_i^{\pm}$ граничные операторы, соответствующие статическим, кинематическим и смешанным граничным условиям.

На торцах $x = \pm 1$ имеются соответствующие неоднородные граничные условия, которые с помощью граничных операторов $l_i^{\pm}$ могут быть записаны в виде

$$l_i^{\pm}(\varphi) = f_i^{\pm}(y) \quad \text{при} \quad x = \pm 1 \tag{1.5}$$

С помощью разделения переменных решение рассматриваемой краевой задачи может быть представлено в следующей форме:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch}(\lambda_n x) + B_n \lambda_n \operatorname{sh}(\lambda_n x)) F_n(y) + \varphi_p(x, y) \tag{1.6}$$

Здесь A_n и B_n — комплексные коэффициенты, $\varphi(x, y)$ — частное решение.

В общем случае разрешающее уравнение (1.6) и граничные условия (1.4) могут быть неоднородными. Тогда путем подбора частного решения они всегда могут быть приведены к однородному виду.

Для простоты, будем рассматривать задачу симметричную в отношении координаты y. С учетом соотношений (1.2), (1.3) и (1.6) можно показать, что для функции $\varphi(x, y)$ однородные условия (1.4), отвечающие статическим, кинематическим и смешанным краевым условиям при $y = \pm 1$ будут выполняться, если однородные решения $F_n(y)$ подчиняются следующим равенствам

при $y = \pm 1$

$$\alpha F_n'' + \beta \lambda_n^2 F_n = 0, \quad \gamma F_n''' + \delta \lambda_n^2 F_n' = 0 \tag{1.7}$$

где α, β, γ, δ — вещественные постоянные.

Например, полагая в уравнениях (1.7) $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, получим $F_n = 0$, $F_n' = 0$, что соответствует граничным условиям для полосы со свободными от усилий продольными краями. Функции $F_n(y)$ являются решениями обыкновенного дифференциального уравнения

$$F_n'''' + 2p\lambda_n^2 F_n'' + q\lambda_n^4 F_n = 0 \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) и граничные условия (1.7) составляют обобщенную задачу на собственные значения. Нетрудно установить, что собственные функции $F_n(y)$ для симмертичной задачи имеют следующий вид

$$F_n(y) = u_{1n}(y) + u_{2n}(y), \quad u_{in}(y) = C_{in} \cos(t_i \lambda_n y)$$

$$C_{1n} = a_2 \cos(t_2 \lambda_n), \quad C_{2n} = -a_1 \cos(t_1 \lambda_n) \tag{1.9}$$

Собственные числа λ_n являются корнями следующего характеристического уравнения:

$$\psi(\lambda_n) = a_1 b_2 t_2 \cos(t_1 \lambda_n) \sin(t_2 \lambda_n) - a_2 b_1 t_1 \sin(t_1 \lambda_n) \cos(t_2 \lambda_n) = 0 \tag{1.10}$$

$$a_i = \alpha t_i^2 - \beta, \quad b_i = \gamma t_i^2 - \delta \quad (i = 1, 2)$$

Параметры t_1 и t_2 являются корнями следующего алгебраического уравнения $r^4 - 2pr^2 + q = 0$. Собственные функции $F_n(y)$, не образуя ортогонального семейства, подчиняются соотношению биортогональности, названному П. Ф. Папковичем условием обобщенной ортогональности. Для разложений частного вида, которые часто определяют как согласованные, соотношения обобщенной ортогональности позволяют явно найти коэффициенты в рядах вида (1.6) [1, 2]. Комплексные коэффициенты A_n и B_n позволяют удовлетворить общим граничным условиям (1.5) на торцах $x = \pm 1$.

Ограничимся случаем симметричной деформации в отношении координаты x. Тогда в равенстве (1.6) следует принять $B_n = 0$.

Подстановка функции напряжений $\varphi(x, y)$ в граничные условия (1.5) приводит к разложениям вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\eta_1 (\lambda_n) u_{1n} (y) + \zeta_1 (\lambda_n) u_{2n} (y)\right] = f_1 (y)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\eta_2 (\lambda_n) u_{2n} (y) + \zeta_2 (\lambda_n) u_{1n} (y)\right] = f_2 (y) \tag{1.11}$$

где $f_1 (y), f_2 (y)$ известные функции, η_1, η_2 и ζ_1, ζ_2 — некоторые функции параметра λ_n.

Существуют приближенные методы определения неизвестных A_n на основе разложений (1.11). Для изотропной полосы обзор этих методов можно найти в [3].

В статьях [4, 5] для определения коэффициентов A_n в разложениях (1.11) предлагалось приводить граничные условия (1.6) к специальному виду согласованных разложений путем формальных преобразований с помощью дифференциальных операторов бесконечного порядка.

В публикуемой статье будут установлены достаточные условия сходимости согласованных разложений к соответствующим функциям, когда однородные решения $F_n (y)$ подчиняются граничным условиям (1.7), а коэффициенты A_n в разложениях найдены явно с помощью соотношений обобщенной ортогональности (биортогональности).

Будет определено действие псевдо-дифференциальных операторов на языке обобщенных рядов Фурье. В результате техника алгебры псевдо-дифференциальных операторов [6] будет использована для преобразования разложений (1.11) и явного определения коэффициентов A_n.

2. Свойства однородных решений. Опишем некоторые свойства собственных функций $F_n (y)$, которые понадобятся в дальнейшем для построения решения краевых бигармонических задач.

Будем использовать упрощенную форму записи граничных условий (1.7), полагая в них $\alpha = \gamma = 1$. При этом не происходит потери общности, если считать, что параметры β и δ могут изменяться от 0 до ∞.

Можно установить, что собственные функции задачи (1.7), (1.8) подчиняются следующему соотношению обобщенной ортогональности

$$\int_{-1}^{1} \left[(2p\eta + \zeta) F_n'' F_k'' + q\eta (\lambda_n^2 F_n F_k'' + \lambda_k^2 F_n'' F_k) - q\zeta\lambda_n^2\lambda_k^2 F_n F_k\right] dy = 0 \tag{2.1}$$

$$\lambda_n \neq \lambda_k, \qquad \eta = \delta + \beta - 2p, \qquad \zeta = q - \beta\delta$$

Соотношениям ортогональности (2.1) можно придать иную форму. Учитывая формулы (1.9) и принимая во внимание, что $2p = t_1^2 + t_2^2$ и $q = t_1^2 t_2^2$ перепишем уравнение (2.1) в следующем виде

$$(t_1^2 - t_2^2) \int_{-1}^{1} (t_1^2 c_1 C_{1n} C_{1k} \cos (t_1\lambda_n y) \cos (t_1\lambda_k y) -$$

$$- t_2^2 c_2 C_{2n} C_{2k} \cos (t_2\lambda_n y) \cos (t_2\lambda_k y))\, dy = 0 \tag{2.2}$$

$$\lambda_n \neq \lambda_k, \qquad c_i = \beta\delta + t_i^2 (t_i^2 - \beta - \delta) \qquad (i = 1, 2)$$

Рассмотрим согласованную группу разложений двух различных функций $f_1 (y)$ и $f_2 (y)$ в ряды по однородным решениям

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n F_n'' (y) = f_1 (y), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n^2 F_n (y) = f_2 (y) \tag{2.3}$$

Использование соотношения обобщенной ортогональности (2.1) позволяет определить коэффициенты A_n:

$$A_k = c_k^f / a_{kk} \tag{2.4}$$

$$c_k^f = \int_{-1}^{1} [(2p\eta + \zeta) f_1 F_k'' + q\eta (f_2 F_k'' + f_1 \lambda_k^2 F_k) - q\zeta f_2 \lambda_k^2 F_k]\, dy$$

$$a_{kk} = \int_{-1}^{1} [(2p\eta + \zeta)(F_k'')^2 + 2q\eta\lambda_k^2 F_k F_k'' - q\zeta\lambda_k^4 F_k^2]\, dy$$

Другая полезная формула для определения коэффициентов A_k может быть получена, если использовать соотношение обобщенной ортогональности в виде (2.2). Рассмотрим следующие разложения

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n^2 C_{1n} \cos(t_1 \lambda_n y) = \varphi_1(y), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n^2 C_{2n} \cos(t_2 \lambda_n y) = \varphi_2(y) \tag{2.5}$$

Принимая во внимание выражения (1.9) можем заключить, что уравнения (2.5) эквивалентны равенствам (2.3), если положить

$$f_1 = \varphi_1 + \varphi_2, \quad f_2 = -t_1^2 \varphi_1 - t_2^2 \varphi_2 \tag{2.6}$$

Используя соотношение ортогональности (2.2), получим, что коэффициенты A_n в разложениях (2.5) находятся по формулам

$$A_k = d_k^f / (b_{kk} \lambda_k^2) \tag{2.7}$$

$$d_k^f = \int_{-1}^{1} [\varphi_1 t_1^2 c_1 C_{1k} \cos(t_1 \lambda_k y) - \varphi_2 t_2^2 c_2 C_{2k} \cos(t_2 \lambda_k y)]\, dy$$

$$b_{kk} = a_{kk} / \lambda_k^4 (t_1^2 - t_2^2)$$

Кратко остановимся на вопросе об условиях сходимости рядов в (2.3) и (2.5) к функциям, стоящим в правых частях этих равенств. Достаточные условия сходимости могут быть установлены в результате суммирования рядов с учетом формул (2.4) или (2.7), как это сделано в [2, 7]. Полезными при этом оказываются следующие формулы, которые проверяются путем непосредственных вычислений с учетом равенства (1.10):

$$b_{nn} = a_1 a_2 [a_2 b_1 t_1^2 \cos^2(t_2 \lambda_n) - a_1 b_2 t_2^2 \cos^2(t_1 \lambda_n)] \tag{2.8}$$

и

$$b_{nn} = a_1 a_2 \cos(t_1 \lambda_n) \cos(t_2 \lambda_n) (d\psi / d\lambda)_{\lambda=\lambda_n} \tag{2.9}$$

Не останавливаясь подробно на вычислениях, связанных с использованием теоремы о вычетах, приведем результат суммирования рядов

$$s_i = \sum_{n=1}^{\infty} B_n C_{in} \cos(t_i \lambda_n y), \qquad B_n = A_n \lambda_n^2 \tag{2.10}$$

Имеем соответственно

$$s_1 = \varphi_1(y) - \frac{a_2}{2c} \int_{-1}^{1} [b_1 t_1^2 \varphi_1 + b_2 t_2^2 \varphi_2]\, dy$$

$$s_2 = \varphi_2(y) + \frac{a_1}{2c} \int_{-1}^{1} [b_1 t_1^2 \varphi_1 + b_2 t_2^2 \varphi_2]\, dy \tag{2.11}$$

При этом предполагается, что функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ определены на интервале [−1, 1] и могут быть представлены в виде рядов Фурье, равномерно сходящихся в любой внутренней точке интервала непрерывности.

Сравнивая уравнения (2.5) и (2.11) можем сформулировать следующее утверждение: *Ряды в выражениях (2.5) сходятся к функциям* φ_1 *и* φ_2 *равномерно в точках непрерывности, если функции* $\varphi_1(y)$ *и* $\varphi_2(y)$ *удовлетворяют дополнительному условию*

$$\int_{-1}^{1}[b_1t_1^2\varphi_1(y)+b_2t_2^2\varphi_2(y)]\,dy=0 \tag{2.12}$$

Очевидно, что соответствующее достаточное условие сходимости может быть сформулировано и для функций $f_1(y)$ и $f_2(y)$. Для этого достаточно учесть формулы (2.6) и (2.12).

Заметим, что условие (2.12) в задачах теории упругости имеет физический смысл. Рассмотрим, например, полосу со свободными продольными кромками, нагруженную на поперечных краях $x=\pm1$ нормальными напряжениями $\sigma_x(y)+\sigma_0$. Постоянное напряжение σ_0 дает растяжение полосы и ему соответствует точное решение в простой полиномиальной форме. Используя метод однородных решений для анализа напряженного состояния, вызванного напряжением $\sigma_x(y)$, мы должны обеспечить выполнение условия самоуравновешенности в отношении осевой силы. Это условие совпадает с соотношением (2.12). Отметим еще два важных соотношения, которые устанавливаются в результате прямого суммирования рядов (2.10). Использование теоремы о вычетах позволяет доказать, что когда имеют место формулы (2.7) для коэффициентов A_n, то выполняются следующие равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_2t_2^2}{b_{nn}}u_{1n}(y)\int_{-1}^{1}s_2(y)\,u_{2n}(y)\,dy=0,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_1t_1^2}{b_{nn}}\bar{u}_{2n}(y)\int_{-1}^{1}s_1(y)\,u_{1n}(y)\,dy=0 \tag{2.13}$$

Здесь $s_1(y)$ и $s_2(y)$ считаются известными функциями, заданными на интервале $[-1,\ 1]$, которые могут быть представлены в форме рядов Фурье, равномерно сходящихся на интервалах непрерывности $s_1(y)$ и $s_2(y)$.

3. Действие псевдодифференциальных операторов в терминах обобщенных рядов Фурье. В дальнейшем будем использовать технику алгебры псевдодифференциальных операторов (ПДО), развитую в работе [6]. Приведем некоторые основные определения, следуя [6]. Рассмотрим функцию $a(r)$, аналитическую в области G. Основным пространством функций $H(G)$ называется пространство функций $\varphi(y)\in L_2(R^1)$, удовлетворяющих двум условиям:

1. Преобразование Фурье $\Phi(r)$ функции $\varphi(y)$ почти всюду равно нулю вне интервала G, т. е. $\Phi(r)\equiv0$ при $r\in G$.

2. Для любой аналитической в G функции $a(r)$ вида

$$a(r)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jr^{2j},\qquad \|\varphi(y)\|_a^2=\int_G a(r)|\Phi(r)|^2\,dt<\infty$$

Положим, например, что G включает в себя действительную ось исключая начало координат $r=0$, т. е. $G=R^1\backslash(r=0)$. Тогда в соответствии с определением основное пространство функций включает все функции $\varphi(y)\in L_2(R^1)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\,dy=0,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}a(r)\,|\Phi(r)|^2\,dt<\infty$$

Следовательно функция $\varphi(y)$ должна быть самоуравновешенной на действительной оси.

Существуют и другие эквивалентные определения основного пространства.

Из представленного определения следует, что преобразования Фурье функций $\varphi(y)$ являются финитными функциями с носителями, содержащимися в G, т. е. $\mathrm{supp}\,\Phi(r)\in G$.

Наиболее важным свойством основного пространства является свойство инвариантности относительно дифференциального оператора бесконечного порядка.

Так, если $\varphi(y) \in H(G)$, а $D(d)$, $d = id/dy$ есть дифференциальный оператор бесконечного порядка, символ которого $D(r) = \Sigma a_j r^{2j}$ ($j = 0, \ldots, \infty$), то функция $D(d)\cdot\varphi(y)$ определена, причем $D(d)\cdot\varphi(y) \in H(G)$.

Совокупность операторов $D(d)$ с аналитическими символами в области G и областью определения $H(G)$ образует алгебру операторов изоморфную алгебре аналитических функций в области G. Этот изоморфизм определяется соответствием [6]:

$$D(d) \longleftrightarrow D(r)$$

$$D(d) + E(d) \longleftrightarrow D(r) + E(r)$$

$$D(d)\,E(d) \longleftrightarrow D(r)\,E(r) \tag{3.1}$$

В частности, если функция $D^{-1}(r)$ также аналитична в G, то оператор $I/D(d)$ есть обратный оператор к оператору $D(d)$.

Действие оператора $D(d)\cdot$ определено в терминах преобразования Фурье

$$D(d)\cdot\varphi(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} D(r)\,F_r\,[\varphi(y)]\,e^{iry}dr$$

Положим, что G совпадает с действительной осью за исключением может быть конечного числа точек, а $\varphi(y)$ является четной функцией. Тогда последняя формула запишется в виде

$$D(d)\cdot\varphi(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} D(r)\,F_r\,[\varphi(y)]\cos(ry)\,dr \tag{3.2}$$

Будем полагать, что рассматриваемые в дальнейшем функции $f(y) \in L_2(R^1)$ продолжены нулем вне интервала $(-1, 1)$ и удовлетворяют условию самоуравновешенности, т. е.

$$f \in L_2(-1, 1), \quad f(y) \equiv 0 \quad \text{для} \quad y \in (-1, 1), \quad \int_{-1}^{1} f(y)\,dy = 0$$

Для граничных функций из этого класса в разложениях (2.3) и (2.5), очевидно, выполняются достаточные условия (2.12).

Опишем действие оператора $D(d)$ в терминах обобщенных рядов Фурье вида (2.10). Полагаем, что $s_i(y)$ удовлетворяют указанным выше свойствам.

Учитывая формулы (2.7) и (2.13), получим

$$s_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_1 t_1^2}{b_{nn}} C_{1n} u_{1n}(y) \int_{-1}^{1} s_1(y)\cos(t_1\lambda_n y)\,dy$$

$$s_2(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_2 t_2^2}{b_{nn}} C_{2n} u_{2n}(y) \int_{-1}^{1} s_2(y)\cos(t_2\lambda_n y)\,dy \tag{3.3}$$

Так как по предположению s_i тождественно равны нулю вне интервала $(-1, 1)$, можем записать

$$\int_{-1}^{1} s_i(y)\cos(t_i\lambda_n y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(y)\cos(t_i\lambda_n y)\,dy = F_{r_i}[s_i(y)]$$

где $r_i = t_i\lambda_n$, $F_{r_i}[s_i(y)]$ — косинус-преобразование Фурье функций $s_i(y)$. Пусть $\bar{D}(y)$ — является оригиналом для трансформанты Фурье $D(r)$, т. е. $\bar{D}(y) = F_y^{-1}[D(r)]$. Тогда

$$D(d)\cdot s_1(y) = F_y^{-1}\{F_r[\bar{D}(y)]\,F_r[s_1(y)]\} \tag{3.4}$$

Учитывая (3.4) можем записать следующую цепочку равенств

$$F_{r_1}[D(d)\cdot s_1(y)] = F_{r_1}\langle F_y^{-1}\{F_r[D(y)F_r[s_1(y)]]\}\rangle =$$

$$= F_{r_1}\{F_y^{-1}F_r[\bar{D}(y) * s_1(y)]\} = F_{r_1}[\bar{D}(y) * s_1(y)] = \tag{3.5}$$

$$= F_{r_1}[\bar{D}(y)]\,F_{r_1}[s_1(y)] = D(r_1)\,F_{r_1}[s_1(y)]$$

Имея в виду соотношения (3.5) и равенства (3.3), (3.4) получим

$$D(d)\cdot s_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_1t_1^2}{b_{nn}}C_{1n}D(r_1)\,F_{r_1}[s_1(y)]\,u_{1n}(y) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\lambda_n^2D(r_1)\,u_{1n}(y)$$

В результате, действие оператора $D(d)$ в терминах обобщенных рядов Фурье (2.10) можно записать в следующем виде

$$D(d)\cdot s_i(y) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\lambda_n^2D(r_i)\,u_{in}(y) \tag{3.6}$$

4. Применение алгебры ПД-операторов. Вернемся к проблеме осуществления разложений (1.11) и будем считать функции η и ζ аналитическими символами соответствующих ПДО. Тогда, учитывая (3.6) уравнения (1.11) можем записать в следующем операторном виде

$$\eta_1(d/t_1)\,s_1(y) + \zeta_1(d/t_2)\,s_2(y) = f_1(y)$$

$$\eta_2(d/t_2)\,s_2(y) + \zeta_2(d/t_1)\,s_1(y) = f_2(y) \tag{4.1}$$

$$s_1 = \sum_{n=1}^{\infty}A_nu_{1n}(y), \qquad s_2 = \sum_{n=1}^{\infty}A_nu_{2n}(y)$$

Решая формально систему алгебраических операторных уравнений (4.1) относительно $s_1(y)$ и $s_2(y)$ и учитывая формулы (3.1) и (3.2) получим

$$s_1(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Delta(r)}[\eta_2(r/t_2)\,F_{1r}(r) - \zeta_1(r/t_2)\,F_{2r}(r)]\cos(ry)\,dr \tag{4.2}$$

$$s_2(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Delta(r)}[\eta_1(r/t_1)\,F_{2r}(r) - \zeta_2(r/t_1)\,F_{1r}(r)]\cos(ry)\,dr$$

$$\Delta(r) = \eta_1(r/t_1)\,\eta_2(r/t_2) - \zeta_1(r/t_2)\,\zeta_2(r/t_1)$$

$$F_{ir}(r) = \int_{-\infty}^{\infty}f_i(y)\cos(ry)\,dy = \int_{-1}^{1}f_i(y)\cos(ry)\,dy$$

Напомним, что при получении формул (4.2) предполагалось, что функции $s_i(y)$ принадлежат области определения ПД-операторов. Имея в виду формулы (4.2) и учитывая, что функции $f_1,\ f_2 \in H(G)$ можно доказать, что функции s_1 и s_2 также принадлежат основному пространству. Не останавливаясь на доказательстве этого факта отметим лишь, что при этом используется аналитичность символов операторов и теорема Пэли — Винера — Шварца [8]. Заметим, что алгебра ПД-операторов построена и в обобщенном пространстве функций $H(G)$ как совокупность линейных непрерывных функционалов, определенных на основном пространстве $H(G)$.

Пусть $\psi(y) \in \bar{H}(g)$, $\varphi(y) \in H(G)$ — основная функция и $\psi(y) \in L_2(R^1)$. В пространстве $H(G)$ действие ПД-операторов определяется следующим образом:

$$\langle D(-d)\cdot\psi(y),\quad \varphi(y)\rangle = \langle\psi(y), D(d)\cdot\varphi(y)\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle\Psi(r), D(r)\,\Phi(r)\rangle$$

$$\langle \psi (y),\ \varphi (y)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi (y)\, \psi (y)\, dy, \qquad \Psi (r) = F_r\, [\psi (y)]$$

Как обобщенное может представляться и решение проблемы разложений (1.11), которое на первом этапе свелось к явному определению функций s_1 и s_2.

Необходимо отметить также, что для функций f_1 и f_2 самоуравновешенных на интервале $(-1,\ 1)$ с помощью теоремы Пэли — Винера — Шварца устанавливается, что функции $s_i(y)$ в равенстве (4.2) также подчиняются условиям

$$\int_{-1}^{1} s_i(y)\, dy = 0 \tag{4.3}$$

5. Определение коэффициентов A_n. С помощью формул (4.2) найдены функции $s_1(y)$ и $s_2(y)$, удовлетворяющие системе уравнений (4.1), которые, в свою очередь, являются следствием уравнений (1.11). Теперь, имея в виду что функции s_1 и s_2 представляются по построению согласованной парой разложений

$$s_i(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_{in}(y) \tag{5.1}$$

коэффициенты A_n могут быть найдены с помощью формул (2.7). Имеем

$$A_n = \frac{1}{b_{nn}} \int_{-1}^{1} [c_1 t_1^2 s_1(y)\, u_{1n}(y) - c_2 t_2^2 s_2(y)\, u_{2n}(y)]\, dy \tag{5.2}$$

Так как в соответствии со сделанным выше замечанием для функций $s_i(y)$ имеет место условие (4.3), то следовательно выполняется достаточное условие (2.12) и ряды в правых частях равенств (5.1) сходятся равномерно к функциям s_1 и s_2.

Таким образом предложен конструктивный метод, позволяющий явно найти коэффициенты общего вида (1.11). Коэффициенты A_n находятся по формулам (5.2), (4.2).

По построению, с учетом теоремы о достаточных условиях (2.12), ряды в разложениях (1.11) будут сходиться к функциям f_1 и f_2 соответственно, если последние удовлетворяют условиям самоуравновешенности на интервале $(-1,\ 1)$. В этом можно убедиться и путем непосредственного суммирования рядов.

В некоторых конкретных случаях, подобных тем, которые рассмотрены ниже, такое суммирование нетрудно осуществить с помощью теоремы о вычетах. Когда функции $f_i(y)$ не самоуравновешены на интервале $(-1,\ 1)$, то ряды в разложениях (1.11) сходятся с точностью до постоянных или с точностью до линейного полинома, если не ограничиваться симметричным случаем в отношении координаты y. Это связано с тем, что пространство собственных функций $\{F_n'',\ \lambda_n^2 F_n\}$ задачи на собственные значения (1.7) и (1.8) двукратно полны на множестве функций из $L_2\ (-1,\ 1)$ исключая линейную функцию. Отметим, что вопрос о базисности собственных функций остается открытым. Более того, разложение по системе собственных элементов $\{u_{1n},\ u_{2n}\}$ неединственно, т. е. можно указать пример нетривиального разложения двукратного нуля, когда оба разложения вида (2.5) с ненулевыми коэффициентами сходятся к нулю.

6. Примеры. Построим решение первой основной задачи для ортотропной полосы. Положим, что продольные края полосы свободны: $\sigma_y(x,\ y = \pm 1) = 0$, $\tau_{xy}(x,\ y = \pm 1) = 0$. Пусть задача симметрична относительно координаты y и антисимметрична в отношении координаты x. На торцах задано следующее распределение напряжений

$$\sigma_x(x = 1,\ y) = \sigma_1 \cos(\pi y), \qquad \sigma_x(x = -1,\ y) = -\sigma_1 \cos(\pi y)$$

$$\tau_{xy}(x = \pm 1,\ y) = 0$$

Учитывая формулы (1.6), (1.2), граничные условия при $x=1$ приводятся к следующим разложениям ($A_n=0$):

$$\sum_{i=1}^{\infty} B_n\lambda_k \operatorname{sh}(\lambda_n) F_n''(y) = f_1(y), \quad \sum_{i=1}^{\infty} B_n\lambda_n^2 \operatorname{ch}(\lambda_n) F_n'(y) = f_2(y) \tag{6.1}$$

$$f_1 = b^2\sigma_1 \cos(\pi y), \quad f_2 \equiv 0, \quad F_n = u_{1n}(y) + u_{2n}(y)$$

Функции $F_n(y)$ удовлетворяют граничным условиям $F_n(1) = F_n'(1) = 0$, а λ_n являются корнями уравнения $\psi(\lambda) = t_2 \sin(t_2\lambda)\cos(t_1\lambda) - t_1 \sin(t_1\lambda)\cos(t_2\lambda) = 0$; $c_i=1$, $a_1=b_1=1$ в равенствах (1.10), (2.7), (2.8). Используя формулы (4.2), (5.2) получим следующие формулы для коэффициентов B_n:

$$B_n = \frac{2}{\pi b_{nn}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ \frac{t_1^4}{t_1^2\lambda_n^2 - r^2} \cos(t_2\lambda_n) \operatorname{ch}(r_2) [t_1\lambda_n \sin(t_1\lambda_n) \times$$

$$\times \cos(r) - r\cos(t_1\lambda_n)\sin(r)] - \frac{t_2^4}{t_2^2\lambda_n^2 - r^2} \cos(t_1\lambda_n)\operatorname{ch}(r_1) \times$$

$$\times [t_2\lambda_n \sin(t_2\lambda_n)\cos(r) - r\cos(t_2\lambda_n)\sin(r)]\Big\} \times \tag{6.2}$$

$$\times \frac{\sin(r)\,dr}{r^2(\pi^2 - r^2)(t_1 \operatorname{sh}(r_1)\operatorname{ch}(r_2) - t_2\operatorname{ch}(r_1)\operatorname{sh}(r_2))}$$

$$b_{nn} = t_1^2\cos^2(t_2\lambda_n) - t_2^2\cos^2(t_1\lambda_n), \quad r_1 = r/t_1, \quad r_2 = r/t_2$$

Решение задачи записывается в виде

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\lambda_n \operatorname{sh}(\lambda_n x) F_n(y)$$

Очевидно, что достаточные условия сходимости выполнены, ибо

$$\int_{-1}^{1} f_1(y)\,dy = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-1}^{1} f_2'(y)\,dy = f_2(1) = 0$$

В качестве второго примера рассмотрим полубесконечную полосу со свободными продольными кромками. На торце $\alpha=0$ полоса загружена самоуравновешенным усилием

$$\sigma_x(x=0, y) = -\sigma_1\cos(\pi y) \tag{6.3}$$

$$\tau_{xy}(x=0, v) = 0 \tag{6.4}$$

Решение такой задачи ищется в следующей форме:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n x} F_k(y) \tag{6.5}$$

Подстановка функции напряжений в граничные условия (6.3), (6.4) с помощью формулы (6.5) приводит к следующим разложениям:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n [t_1^2 u_{1n}(y) + t_2^2 u_{2n}(y)] = f_1(y)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n\lambda_n^{-1} [t_1^2 u_{1n}(y) + t_2^2 u_{2n}(y)] = f_2(y) \tag{6.6}$$

$$B_n = A_n\lambda_n^2, \quad f_1 = \sigma_1 b^2\cos(\pi y), \quad f_2 = 0$$

Отметим, что разложения (6.6) можно формально получить как предельные из соотношений (5.2), если в последних сначала отнести x к полуширине полосы $-b$, затем принять $A_n = B_n \lambda_n \operatorname{sh}(a\lambda_n)$, и перейти к пределу при $a \to \infty$. Здесь a длина полосы, измеренная в долях b.

Применяя описанный выше метод для определения коэффициентов B_n в разложениях (6.6) получим

$$s_1(y) = \frac{t_2}{2\pi t_1^2 (t_2 - t_1)} \int_{-\infty}^{\infty} F_r(r) \cos(ry)\, dr =$$

$$= F_y^{-1} [F_r(r)] \frac{t_2}{t_1^2 (t_2 - t_1)} = f_1(y) \frac{t_2}{t_1^2 (t_2 - t_1)}$$

$$s_2(y) - \frac{t_1}{2\pi t_2^2 (t_2 - t_1)} \int_{-\infty}^{\infty} F_r(r) \cos(ry)\, dr = -\frac{t_1}{t_2^2 (t_2 - t_1)} f_1(y)$$

и соответственно

$$B_n = A_n \lambda_n^2 = \frac{1}{b_{nn}} \int_{-1}^{1} \left[C_{1n} \frac{t_2}{(t_2 - t_1)} \cos(t_1 \lambda_n y) + C_{2n} \frac{t_1}{(t_2 - t_1)} \cos(t_2 \lambda_n y) \right] f_1(y)\, dy$$

$$C_{1n} = \cos(t_2 \lambda_n), \qquad C_{2n} = -\cos(t_1 \lambda_n) \tag{6.7}$$

Функция $\varphi(x, y)$ найденная с помощью простых формул (6.7), (6.5) дает точное решение для полубесконечной полосы. Чтобы убедиться в этом достаточно суммировать ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n [t_1^2 u_{1n} + t_2^2 u_{2n}], \qquad \sum_{n=1}^{\infty} B_n \lambda_n^{-1} \lim_{a \to \infty} \operatorname{cth}(a\lambda_n) [t_1^2 u_{1n} + t_2^2 u_{2n}]$$

Форма записи второго граничного разложения указывает на то, что выражение, стоящее под знаком суммы является четной функцией от λ_n. Это важно иметь ввиду при суммировании. Прямое суммирование легко проводится с помощью теоремы о вычетах. Учет формулы (2.9) сводит суммирование к вычислению контурного интеграла по замкнутому контуру и вычетов подинтегральной функции. В качестве контура следует взять замкнутую кривую, состоящую из дуг полуокружностей с радиусом r — около начала координат и $R > r$, $|\lambda_n| < R < |\lambda_{n+1}|$, в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и замыкающих контур отрезков мнимой полуоси. Применяя стандартную процедуру и устремляя $r \to 0$ и $R \to \infty$ можно показать, что ряды в левых частях равенств (6.6) сходятся соответственно к функциям $f_1(y)$ и $f_2(y) = 0$.

Численное суммирование рядов в равенствах (6.6), проведенное для параметров $\omega = 0{,}95$; $\omega = p/\sqrt{q}$ и $t_{1,2}^2 = \sqrt{q}\,[\omega \pm (\omega^2 - 1)^{1/2}]$, показало, что при вычислении граничных значений сумм достаточно было удержать в каждом из рядов по 40 членов. Пять первых значений собственных чисел $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ приведены ниже

n	α_n	β_n
1	2,08436	1,15950
2	5,26854	1,76336
3	8,38348	2,26960
4	11,4877	2,76110
5	14,5907	3,26358

Таким образом предложенная процедура дает возможность существенно расширить класс точных решений краевых бигармонических задач представляется более строгой математической интерпретацией метода, изложенного в [4, 5].

Полученные результаты можно сформулировать в следующей форме.

Выводы. Установлена двукратная полнота однородных решений. Дано описание ПД-операторов в терминах обобщенных рядов Фурье, соответствующих бигармонической краевой задаче. В результате использования алгебры ПД-операторов получены конечные выражения для коэффициентов в рядах. В качестве примера построены точные решения первой основной задачи теории упругости для ортотропной конечной и полубесконечной полосы.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект N 93-013-16815).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Папкович П. Ф.* Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы//ДАН СССР. 1940. Т. 27. № 4. С. 125—132.
2. *Лурье С. А.* Метод однородных решений в задачах о плоском напряженном состоянии и изгибе ортотропных пластин//Изв. АН Арм.ССР Механика. 1964. Т. 37. № 6. С. 27—38.
3. *Прокопов В. К.* Однородные решения теории упругости и их приложения к теории тонких пластинок//ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 706—714.
4. *Лурье С. А.* Изгиб прямоугольной пластинки, защемленной по контуру//Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 159—168.
5. *Васильев В. В., Лурье С. А.* Плоская задача теории упругости для полосы//Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 125—135.
6. *Дубинский Ю. А.* Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее применение к математической физике//УМН. 1982. Т. 37. Вып. 5. С. 97—137.
7. *Гринберг Г. А.* О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками и о некоторых его обобщениях//ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 2. С. 211—228.
8. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 439 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.XI.1993