

УДК 593.3

© 1994 г. С. С. ГАВРЮШИН

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ ОБОЛОЧЕК

Рассматривается подход к построению методов численного расчета гибких упругих элементов в форме тонкостенных оболочек, сложный комплексный процесс нелинейного деформирования которых в процессе сборки, настройки и эксплуатации, характеризуется большими прогибами, хлопками, изменением условий закрепления и характера нагружения. Предлагается стратегия исследований процессов сложного нелинейного деформирования, основанная на идеях теории катастроф. Для проведения расчетов рекомендуется гибкий и достаточно устойчивый алгоритм, возможности которого иллюстрируются примерами численного счета.

1. Подход к проблеме и методы исследования. Для описания нелинейного поведения гибких элементов используются соотношения геометрически нелинейной лагранжевой теории тонких упругих оболочек, построенной в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа — Лява [1—3]. Многопараметрическое семейство нелинейных краевых задач для систем дифференциальных уравнений, в обыкновенных или частных производных, одним из известных методов [3—5] сводится к многопараметрическому семейству систем нелинейных разрешающих уравнений.

$$F(X^{(1)}, X^{(2)}) = 0 \quad (1.1)$$

Предполагается, что в общем случае система (1.1), имеющая порядок m , содержит m неизвестных $X_j^{(1)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$), являющихся «внутренними» параметрами, характеризующими состояние системы, а также зависит от переменных величин $X_j^{(2)}$ ($j = 1, \dots, n$), которые трактуются, как «внешние» параметры или параметры управления. Параметры управления для частного случая системы (1.1) являются известными величинами и могут входить в выражения, описывающие геометрические размеры элемента, свойства материала, условия закрепления, внешние термомеханические воздействия, что, естественно, находит отражение в развернутой записи определяющих соотношений (1.1). Отметим, что разделение параметров на две группы в определенной степени условно и зависит от целей и алгоритма исследования. В случае, соответствующему однопараметрическому семейству задач, вектор внешних параметров $X^{(2)}$ определяется через одну независимую скалярную величину или один параметр q :

$$X^{(2)} = X^{(2)}(q) \quad (1.2)$$

Как известно [6—8], совокупность всех решений (1.1) для заданного числа $(m + n)$ управляющих и внутренних параметров системы, можно представить как некоторую поверхность (или гиперповерхность) равновесных состояний, построенную в пространстве R^{m+n} этих параметров, а каждый однопараметрический процесс, как некоторую траекторию на этой поверхности.

В пространстве состояния всех систем выделим траектории, описывающие последовательные равновесные состояния системы при монотонном изменении

одного из параметров $X_j^{(2)}$ ($j \in [1, \dots, n]$) при фиксированных значениях остальных $(n - 1)$ компонент вектора $X^{(2)}$. Такие траектории можно рассматривать в пространстве переменных параметров размерности R^{m+1} . Текущий управляющий параметр удобно считать равноправным со всеми остальными внутренними параметрами задачи. В дальнейшем, будем обозначать $X_j^{(2)}$, как дополнительную $(m + 1)$ -ю неизвестную расширенного вектора X и записывать систему нелинейных разрешающих уравнений порядка m в форме

$$r(X) = 0 \quad (1.3)$$

Проекция поверхности равновесных состояний в подпространство управляющих параметров наряду с регулярными может иметь и особые точки, в которых малое изменение управляющих параметров может вызвать резкий переход системы в новое состояние — бифуркацию или катастрофу. В теории математического анализа, основное внимание уделяется именно таким достаточно редко встречающимся и трудным для исследования частным или вырожденным случаям. Поскольку системы, описывающие реальные процессы нелинейного деформирования всегда зависят от параметров, которые никогда не бывают известны точно, они, как правило, являются системами общего положения. Известно [6, 8], что вырожденные системы играют роль границ раздела, отделяющих друг от друга в пространстве всех параметров подобласти равновесных состояний, образованные системами общего положения. За счет малого изменения параметров, каждую индивидуальную вырожденную систему можно превратить в систему общего положения, однако, этого нельзя сделать для всех значений параметров одновременно, и граница раздела, как таковая, остается перемещаясь в пространстве состояний в некоторое другое положение для близких значений параметров. Таким образом, вырожденные случаи неустраиваемы, если рассматривается не индивидуальная система, а семейство систем. В приложении к исследованию равновесных состояний упругих конструкций в зависимости от одного параметра (например нагрузки), особенности имеют вид складки, а в случае коразмерности два — особенности типа сборки Уитни, что было известно задолго до провозглашения теории катастроф [6, 7]. Однако в более общих случаях исследование многообразия состояний усложняется.

В [6, 8] обосновывается возможность сведения задач анализа бифуркаций высоких коразмерностей к одномерным или двумерным задачам. От более сложных вырожденных систем, образующих множество коразмерности два в пространстве всех систем, можно избавиться малым шевелением однопараметрического семейства, а в случае дупараметрического семейства, можно не рассматривать вырожденных систем коразмерности три. Целесообразной оказывается следующая стратегия исследования, построенная в соответствии с иерархией вырождений по коразмерностям: сначала изучаются случаи общего положения, затем вырождения коразмерности один, затем два и так далее. При этом, исследование вырожденных систем должно включать описание перестроек, происходящих, когда параметр, меняясь проходит через вырожденное значение. Хотя изложенная выше стратегия исследований восходит к работам А. Пуанкаре и основные ее идеи были высказаны еще в прошлом веке, она не получила широкого распространения в силу больших трудностей ее реализации. Однако, достигнутые в последние годы успехи в области вычислительной техники и численных методов решения нелинейных задач позволяют вернуться к ее воплощению на новом качественном уровне, при этом важнейшим инструментом исследователя становятся методы продолжения по параметру. При реализации методов продолжения особые трудности возникают в окрестностях точек бифуркации, поскольку здесь происходит нарушение единственности. Традиционно в основу постбифуркационного анализа полагалась проблема создания метода, позволяющего найти все действительные решения, выходящие из точки бифуркации. К настоящему времени

достаточно полно исследованной можно считать только проблему перестройки при бифуркациях положений равновесия в однопараметрических семействах. Случай уже двух параметров выходит за рамки возможностей теоретического анализа.

В публикуемой работе предлагается стратегия исследования, многопараметрически нелинейных задач методами продолжения, применительно к расчету гибких упругих элементов, позволяющая за счет определенной организации процесса численного счета, в определенной мере, обойти возникающие трудности.

Как уже отмечалось, в случае однопараметрического семейства систем общего положения, описываемых соотношениями (1.3), могут иметь место неустраиваемые особенности только типа складки. Процедура реализации численного процесса при прохождении окрестности предельной точки известна, например, с помощью приема смены параметра [1], и хорошо отработана. Особенности коразмерности 2 и выше являются устраняемыми посредством изменения параметров системы, что позволяет выбрать траекторию процесса проходящую мимо окрестностей таких особых точек. При подходе к окрестности предполагаемой особой точки следует перейти к новой системе вида (1.3), для которой проекция равновесной поверхности на ось параметра управления в требуемом диапазоне его изменений не имеет особенностей коразмерности выше первой. Такой прием назван нами приемом «смены подпространства внешних параметров». Для реализации такой стратегии в записи разрешающих соотношений (1.1) должны присутствовать по меньшей мере два внешних параметра. Процедуру численного исследования можно представить, как кусочно-гладкий процесс продолжения решения в пространстве R^{m+n} , причем на каждом гладком участке процесса, анализ сводится к исследованию однопараметрического семейства задач вида (1.3) в пространстве R^{m+1} .

Таким образом, для реализации процесса численного анализа предлагается стратегия последовательного исследования однопараметрических семейств задач размерности R^{m+1} , принадлежащих семейству всех задач размерности R^{m+n} .

2. Алгоритм дискретного продолжения решения по параметру и особенности его численной реализации. Идея продолжения решения по параметру известна и использовалась, как для проведения математических доказательств существования решений нелинейных уравнений, так и в вычислительных целях [9—11]. В основу предлагаемого метода полагается пошаговая процедура продолжения решения по параметру по схеме предиктор-корректор [4, 12]. Предсказание осуществляется с помощью той или иной интерполяционной процедуры (например с использованием квадратичных полиномов Лагранжа) уточнение решения проводится посредством использования одного из итерационных методов [12]. Согласно [9], такие шаговые процессы называются «дискретным» продолжением решения по параметру, в отличие от процессов «непрерывного» продолжения, которые предполагают предварительную линеаризацию по параметру исходной краевой задачи. Процессы непрерывного продолжения несмотря на отдельные преимущества перед процессами дискретного продолжения, в основном связанные с относительной простотой численной реализации и наличием хорошо отработанных приемов обеспечения устойчивого численного счета, все же, по нашему мнению, значительно уступают последним в гибкости, особенно для исследований, требующих смены в процессе счета параметрического подпространства и повторных стартов, а также доставляют дополнительные хлопоты, связанные с контролем точности полученных результатов.

Использование методов продолжения, по своему существу, решают центральную для любого итерационного процесса проблему, а именно проблему выбора начального приближения, поскольку с их помощью требование «глобальной» сходимости заменяется требованием сходимости «локальной» [12]. В развернутой записи соотношений (1.1) текущий параметр продолжения, может входить в основные уравнения, в краевые условия и во вспомогательные соотношения.

Известно, что параметр продолжения может и не принадлежать к числу параметров системы, а быть введен искусственно с помощью дополнительного

уравнения. Различные алгоритмы реализации численного счета для однопараметрического семейства задач рассматриваются в [9—11]. Остановимся подробнее на специфических особенностях реализации численного счета используемых в рамках представленного подхода.

Для решения системы (1.3) используется кусочно-гладкий шаговый процесс по схеме предиктор-корректор, реализующий процедуру дискретного продолжения по параметру. На каждом гладком участке, соответствующем однопараметрическому семейству задач размерности R^{m+1} , процесс начинается от решения X_0 , которое полагается известным, и продолжается для последовательных значений параметра продолжения. При переходе в процессе счета от одного однопараметрического семейства к другому используется прием смены подпространства внешних параметров. В качестве начального решения используется решение, полученное в конечной точке участка для предыдущего однопараметрического семейства задач. Каждый новый участок отличается от предыдущего использованием нового независимого параметра $X_j^{(2)}$ ($j \in [1, \dots, n]$). Остальные внешние параметры, либо фиксируются по своим последним значениям, либо полагаются изменяющимися согласно (1.2). В начале каждого участка производятся соответствующие стартовые процедуры, связанные с накоплением информации для последующей интерполяции начального приближения к решению.

Последовательность решений систем вида (1.3) образует в R^{m+n} кусочно-гладкую траекторию, принадлежащую поверхности равновесных состояний. На каждом гладком участке, в силу равноправия всех компонентов расширенного вектора X , на роль параметра может претендовать любая компонента, комбинация компонент или искусственный параметр, связанный с X дополнительным уравнением вида:

$$f(X, q) = 0 \quad (2.1)$$

В работе [1] было предложено искать продолжение решения в направлении компоненты вектора X_i , получившей на последнем i -м шаге максимальное приращение, выбирая в качестве параметра продолжения q непосредственно саму эту компоненту. С геометрических позиций метод можно интерпретировать, как отыскание с помощью того или иного итерационного метода точку X_{i+1} , соответствующую пересечению кривой равновесных состояний (1.3) с плоскостью, описываемой в пространстве R^{m+1} уравнением

$$f(X, q) = d_i^T (X_{i+1} - X_i) - \Delta q_{i+1} \quad (2.2)$$

Здесь d_i^T — единичный базисный вектор в R^{m+1} в направлении компоненты, получившей на предыдущем шаге максимальное приращение; Δq_{i+1} — шаг по параметру.

Большую популярность приобрела идея использовать в качестве параметра продолжения длину кривой равновесных состояний [11]. Один из вариантов такого подхода предложен в [10]:

$$f(X, q) = (X_{i+1} - X_i)^T (X_{i+1} - X_i) - (\Delta q_{i+1})^2 \quad (2.3)$$

Геометрическая интерпретация соответствует отысканию решения на $(i+1)$ шаге — X_{i+1} , как точки пересечения кривой равновесных состояний (1.3) и гиперсферы (2.3) радиуса Δq_{i+1} с центром в точке X_i . К положительным сторонам подхода следует отнести ускорение скорости сходимости итерационных процессов [13]. Подход (2.3) оказывается эффективным с позиций затрат машинного времени, что особенно проявляется в зонах сильной изменчивости решения. К преимуществам подхода (2.2) относится простота численной реализации и ясный с механических позиций смысл численно моделируемого процесса нелинейного деформирования, который затеняется при использовании в качестве параметра продолжения искусственной, не имеющей определенного физического содержания величины.

В публикуемой работе предлагается комбинированный способ, сохраняющий эффективные стороны подходов (2.2) и (2.3). Сущность предлагаемой модификации заключается в организации эффективного итерационного процесса на гиперсфере, с сохранением идеи использования в качестве параметра продолжения компоненты получившей на последнем шаге максимальное приращение. В пределах каждого кусочно-гладкого участка в качестве параметра продолжения используется одна из компонент расширенного вектора неизвестных X_i ($i \in [1, \dots, m+1]$). Для оценки точности решения используется норма вектора невязки $\|r(X)\|$.

Поскольку реальный процесс численного счета всегда проводится с определенной погрешностью вместо понятия «кривая» равновесных состояний удобно ввести понятие «трубка», размер гипердиаметра которой на i -м шаге оценивается с помощью скалярной величины

$$d_i = \max \{r_j(X_i)\} \quad (j = 1, 2, \dots, m+1; j \neq i) \quad (2.4)$$

связанной с величиной ε , характеризующей точность решения, и используемой при формулировании критерия оценки сходимости для k -ой итерации i -го шага

$$\|r(X_i^{(k)})\| \leq \varepsilon \quad (2.5)$$

Начальная величина $(i+1)$ -го шага по параметру

$$\Delta q_{i+1}^{(0)} = \max \{(X_j)_i - (X_j)_{i-1}\} \quad (j = 1, 2, \dots, m+1) \quad (2.6)$$

связывается с радиусом гиперсферы ρ_i , с центром в точке, соответствующей решению X_i на i -м шаге

$$\rho_i^2 = \{X_{i+1}^{(0)} - X_i\}^T \{X_{i+1}^{(0)} - X_i\} \quad (2.7)$$

В процессе итераций l -я независимая компонента, используемая в качестве параметра продолжения, корректируется по формуле

$$[(X_i)_{i+1}^{(k)}]^2 = [(X_i)_i]^2 + \rho_i^2 - \sum_{j \neq i}^{m+1} [(X_j)_{i+1}^{(k)} - (X_j)_i]^2 \quad (2.8)$$

что обеспечивает итерирование на гиперсфере и повышает эффективность численного счета.

В процессе численного счета осуществляется контроль за величинами d_i и ρ_i . Численные эксперименты показывают, что для обеспечения устойчивого счета «диаметр» гиперсферы, т. е. фактически шаг по параметру, должен быть по крайней мере на один-два порядка больше «диаметра» трубки

$$\rho_i > (10+100)d_i \quad (2.9)$$

Величина шага по параметру в процессе счета выбирается автоматически. В зависимости от используемого на стадии «корректор» итерационного метода назначаются минимальное и максимальное числа итераций. При достижении сходимости за число итераций меньше минимального следующий шаг по параметру увеличивается в пропорции «золотого сечения». При превышении максимального числа итераций итерационный процесс обрывается и повторно выполняется стадия «предиктор» для шага по параметру уменьшенного в той же пропорции. Возникновение ситуации, когда дробление шага приводит к нарушению соотношения (2.9) характерно при попадании траектории в окрестность особых точек. В этом случае рекомендуется, используя прием смены подпространства внешних параметров, перейти в другое пространство R^{m+1} и обойти особую точку.

3. Результаты численных исследований. Предлагаемая стратегия закритического исследования гибких упругих элементов иллюстрируется примерами решения задач, относящимися к анализу закритического поведения тонких упругих осесимметричных оболочек. Процесс нелинейного деформирования описывается с

помощью варианта теории тонких осесимметричных оболочек типа Рейснера, в форме предложенной в [1]. Соотношения подготовлены, для применения численного метода, использующего сведение нелинейной краевой задачи к системе нелинейных уравнений и задаче Коши [3]:

$$\begin{aligned}
 dv/dS &= (1 + \varepsilon_m) \sin \Psi - \sin \Psi_0 \\
 du/dS &= (1 + \varepsilon_m) \cos \Psi - \cos \Psi_0 \\
 d\Psi/dS &= (1 + \varepsilon_m) \kappa_m + d\Psi_0/dS \\
 \frac{dV}{dS} &= -(1 + \varepsilon_m) \left(\frac{\cos \Psi}{x_0 + u} V + p_v \right) \\
 \frac{dU}{dS} &= -(1 + \varepsilon_m) \left(\frac{\cos \Psi}{x_0 + u} U - \frac{N_t}{x_0 + u} + p_u \right) \\
 \frac{dM_m}{dS} &= -(1 + \varepsilon_m) \left[\frac{\cos \Psi}{x_0 + u} (M_m - M_t) - U \sin \Psi + V \cos \Psi \right]
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

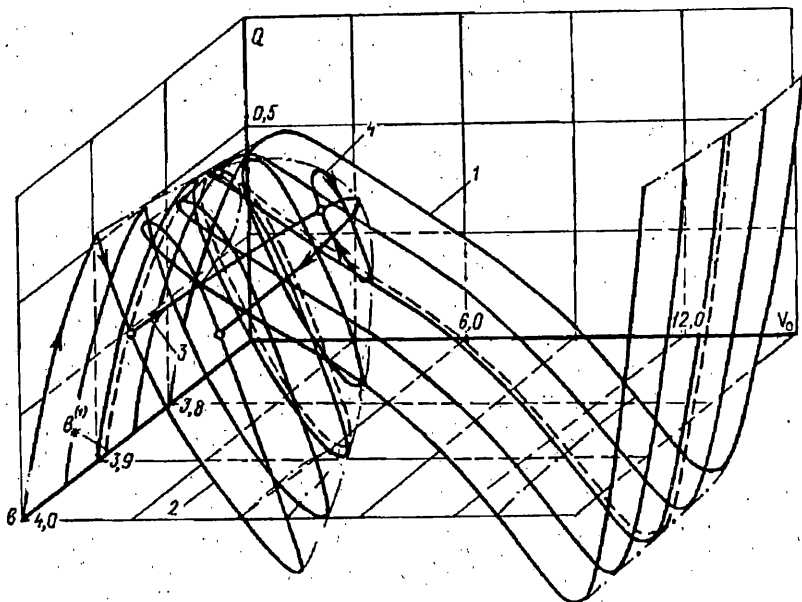
Вспомогательные величины, входящие в (3.1) определяются по формулам

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_m &= 1/B (U \cos \Psi + V \sin \Psi) - vu/x_0 \\
 \kappa_m &= \frac{M_m}{D} - v \frac{x_0 + u}{x_0} \left(\frac{\sin \Psi}{x_0 + u} - \frac{\sin \Psi_0}{x_0} \right) \\
 N_t &= v (U \cos \Psi + V \sin \Psi) + Ehu/x_0 \\
 M_t &= vM_m + \frac{Eh^3}{12} \left[\frac{x_0 + u}{x_0} \left(\frac{\sin \Psi}{x_0 + u} - \frac{\sin \Psi_0}{x_0} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

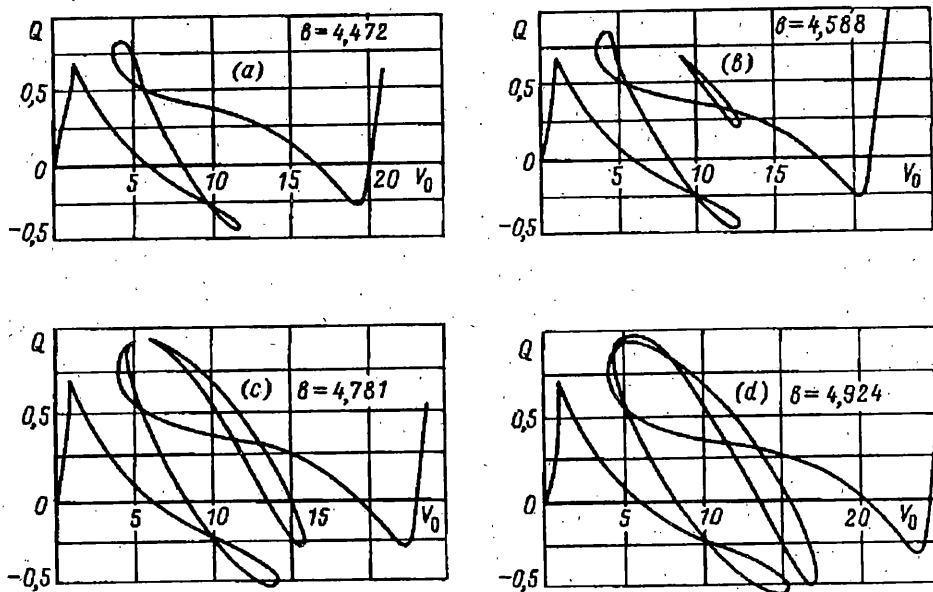
$$B = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Здесь S — независимая координата, отсчитываемая вдоль дуги недеформированного меридиана оболочки; u, v — горизонтальная и вертикальная составляющие перемещения точки срединной поверхности в правосторонней декартовой системе координат, в которой ось X направлена по радиусу, а ось Y совмещена с осью вращения оболочки; Ψ_0, Ψ — углы наклона касательной к меридиану в исходном и деформированном состоянии; ε_m, κ_m — линейные деформации и кривизны в текущей точке срединной поверхности; U, V, M_m и M_t — интенсивности внутренних усилий в направлении координатных осей X и Y и интенсивности моментов, приведенные к срединной поверхности оболочки; p_u, p_v — интенсивности внешней распределенной нагрузки; x_0 — координата X текущей точки срединной поверхности в исходном состоянии; E — модуль упругости материала; ν — коэффициент Пуассона; h — толщина оболочки в текущем сечении. В выражениях (3.1)—(3.2) величины, соответствующие меридиональному направлению помечены нижним индексом m , а окружному — t .

Система нелинейных уравнений (3.1—3.2), дополненная краевыми условиями, на каждом шаге по параметру (для известного вектора $X^{(2)}$) сводится к решению нелинейных уравнений относительно вектора внутренних параметров $(X^{(1)})^*$ и задаче Коши при начальном условии $X^{(1)}(0) = (X^{(1)})^*$. Для повышения устойчивости численного счета используется прием деления интервала интегрирования на сегменты с их последующей стыковкой. Размерность вектора $X^{(1)}$ в этом случае определяется как порядок системы исходных дифференциальных уравнений умноженный на число сегментов. Такой подход к решению известен как метод многосегментной пристрелки [1, 3].



Фиг. 1

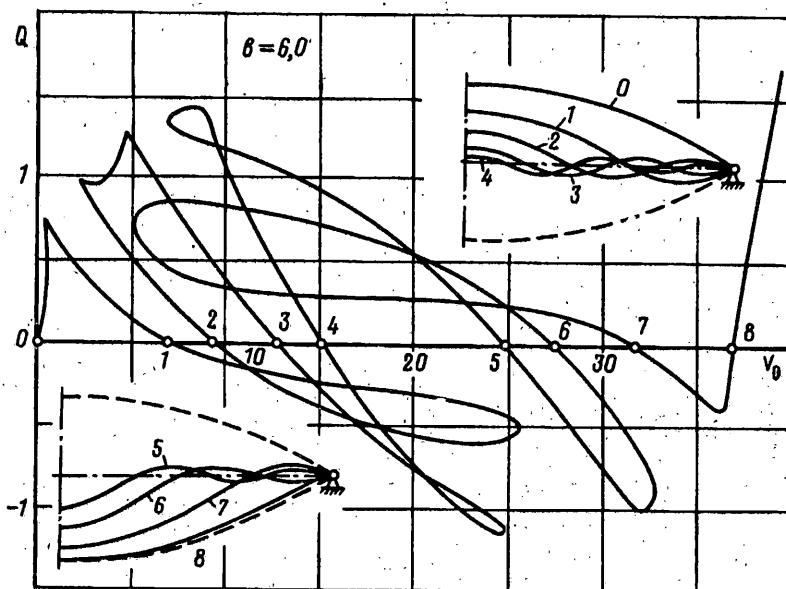


Фиг. 2

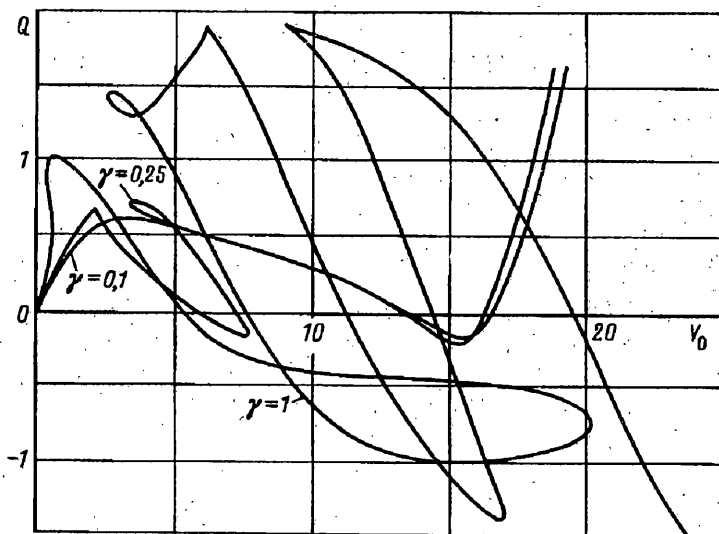
При рассмотрении сферических оболочек численные исследования проводились в пространстве координатности 3. В качестве компонент вектора внешних параметров $X^{(2)}$, описывающих геометрию оболочки, использовались безразмерные величины b и γ :

$$b = (\eta)^{-1/4} c / (Rh)^{-1/2}, \quad \gamma = c/R, \quad \eta = 12(1 - \nu^2) \quad (3.3)$$

где c — радиус опорного контура, а R — радиус кривизны оболочки. Внешняя



Фиг. 3

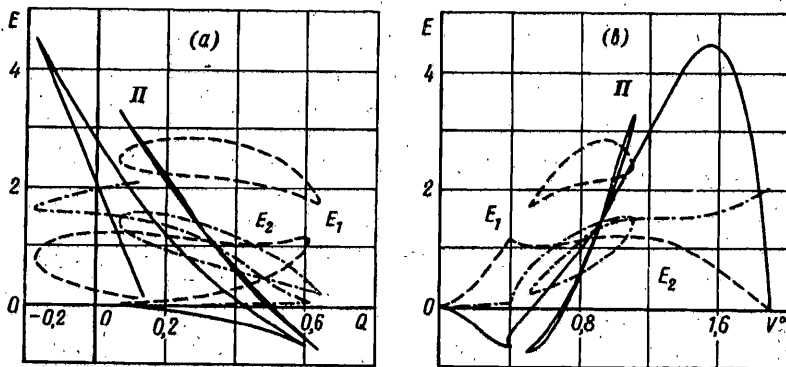


Фиг. 4

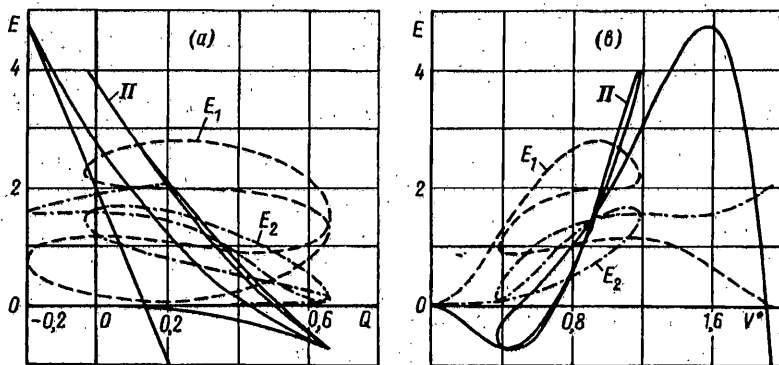
нагрузка характеризовалась безразмерным внешним параметром Q . В случае равномерного нормального давления интенсивности p :

$$Q = (\eta)^{-1/4} (p/4E)(R/h)^2 \quad (3.4)$$

В силу высокой размерности вектора $X^{(1)}$ полное графическое описание поверхности равновесных состояний не представляется возможным. Поэтому на графиках, приведенных ниже, поверхность равновесных состояний, представлена в виде своих проекций в двух- или трехмерных пространствах, причем ось состояний системы ассоциируется с той или иной характерной величиной, несущей информацию о деформированном состоянии оболочки. В качестве таких величин



Фиг. 5



Фиг. 6

используются $v_0 = (\eta)^{-1/4} v(0)/h$ — безразмерный прогиб в центре оболочки, V^0 — отношение объема ометаемого оболочкой к объему сферического сегмента в исходном состоянии, E_1 , E_2 , Π — безразмерные потенциальные энергии растяжения-сжатия, изгиба и полная потенциальная энергия системы.

На фиг. 1 показана проекция поверхности равновесных состояний в пространство Q, b, v_0 . Рассматривается семейство сферических оболочек нагруженных равномерным внешним давлением при шарнирно-неподвижном опирании по контуру. Параметр γ фиксирован и равен 0,09884. Кривые 1 и 2 соответствуют оболочкам с параметрами b равными 3,8 и 4,0 соответственно.

Характер перестройки при монотонном изменении b позволяет предположить существование особой точки в отмеченном интервале. Численный счет позволяет уточнить критическое значение ($b_c^{(1)} \approx 3,89$), посредством сужения интервала. Как показали численные эксперименты, это требует адекватного увеличения точности, иначе численный счет может самопроизвольно перейти на другую ветвь решения, развернуться назад, либо застопориться в окрестности особой точки. Отметим, что подобные ситуации при которых процесс стопорился на «неособенных» участках траектории равновесных состояний встречались в практике и описывались рядом исследователей. Важно отметить, что объяснение таких ситуаций следовало искать не только в дефектах используемого алгоритма численного счета, а в специфических особенностях исследуемого параметрического семейства задач.

Предлагаемая стратегия позволяет провести подробное численное исследование поверхности в равновесных состояний. Так кривая 3, которая с помощью процедуры повторного старта ответвляется от кривой 2, соответствует исследованию однопараметрического семейства оболочек ($b = \text{var}$) при фиксированном значении

параметра Q . При достижении заданного значения b (3,8) можно повторно ответить от кривой 3 и продолжая счет по параметру нагрузки получить изолированное решение — кривая 4. «Глубину» проникновения изолированного решения ($b^* \approx 3,75$) можно определить продолжая счет по кривой 3, которая, как видно, также имеет предельную точку. Это говорит о том, что при $b < b^*$ изолированные решения отсутствуют.

На фиг. 2 (a, b, c, d) показана перестройка поверхности равновесных состояний при монотонном увеличении b в окрестности следующей особой точки ($b_*^{(2)} \approx 4,79, \gamma = 0,09884$). Изолированные решения получены описанным выше способом.

На фиг. 3 показан график v_0 от Q для оболочки с параметрами $b = 6$ и $\gamma = -0,21788$. Показаны возможные равновесные формы меридиана при $Q = 0$, которые свидетельствуют о значительном усложнении характера деформирования.

Графики для параметрического семейства оболочек $\gamma = \text{var}$ ($b = 3,88$) приведены на фиг. 4. Анализ результатов позволяет оценить пределы применимости теории пологих оболочек для рассматриваемого случая. Так, если при $\gamma < 0,2$ решения по теориям пологих и непологих оболочек практически совпадают, то, уже для $\gamma = 0,25$ применение теории пологих оболочек не позволяет получить качественно правильной картины закритического поведения.

Существенно усложнение характера деформирования с увеличением параметров b и γ , приводящее к возникновению множества петель на соответствующих графиках известно, отмечалось рядом авторов [1, 5, 14] и дало основание В. И. Феодосьеву охарактеризовать такую ситуацию как «проклятие» неоднозначности. Предлагаемая стратегия численного исследования в определенной степени восполняет существующий пробел, связанный с недостаточной обработкой практических приемов анализа сложных многопараметрических процессов нелинейного деформирования упругих оболочек. Исследование задачи посредством глобального анализа нелинейных уравнений, позволяет построить в интересующем нас пространстве параметров соответствующие энергетические поверхности и оценить устойчивость состояния системы. Энергетические уровни системы можно проанализировать с помощью графиков зависимости полной энергии системы от обобщенной нагрузки или обобщенного перемещения.

Так на фиг. 5 и 6 приведены зависимости полной энергии системы (сплошные линии), потенциальных энергий деформаций растяжения-сжатия (штриховые) и изгиба (штрих-пунктирные) в зависимости от обобщенной нагрузки Q (варианты a) и, от обобщенного перемещения — V^0 (варианты b). Параметры оболочки соответствуют параметрам: $\gamma = 0,09884, b = 3,88$ (фиг. 5) и $\gamma = 0,09884, b = 3,92$ (фиг. 5).

Предложенная методика показала свою эффективность на решении большого числа модельных и практических задач расчета гибких упругих оболочек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Валишвили Н. В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
2. *Pietraszkiewicz W.* Lagrangian description and incremental formulation in the non-linear theory of thin shells//Int. J. Non-Linear Mechanics. 1984. V. 19. No. 2. P. 115—140.
3. *Григоренко Я. М., Мукоед А. П.* Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. Киев.: Вища школа, 1983. 286 с.
4. *Гаврюшин С. С., Коровайцев А. В.* Методы расчета элементов конструкций на ЭВМ. М.: Изд-во ВЗПИ, 1991. 160 с.
5. *Гуляев В. И., Баженков В. А., Гоцуляк Е. А.* Устойчивость нелинейных механических систем. Львов: Вища школа. Изд-во Львов. ун-та, 1982. 255 с.
6. *Арнольд В. И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.
7. *Thompson J. M. T., Hunt G. W.* Elastic Instability Phenomena. N.-Y.: Wiley, 1984. 209 p.
8. *Йосс Ж., Джозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983. 301 с.

9. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. М.: Наука, 1988. 232 с.
10. Crisfield M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles «snapthrough»//Comput. and Structures. 1981. V. 13. No. 1. P. 55—62.
11. Riks E. Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures.//Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. 1983. No. 47. P. 219—259.
12. Ортега Дж., Рейнболт В. Итерационные методы решения нелинейных систем со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 558 с.
13. Watson L. T., Holzer S. M. Quadratic convergence of Crisfield's method.//Comput. and Structures. 1983. V. 17. No. 1. P. 69—72.
14. Шилькрут Д. И. Вопросы качественной теории нелинейных оболочек. Кишинев.: Штиинца, 1974. 144 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.X.1993