МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1994

УДК 539.3

 О. С. ВОЛЧЕК, В. И. УСЮКИН

УРАВНЕНИЯ МЯГКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассмотрены основные уравнения мягкой оболочки, находящейся в электростатическом поле. Влияние электростатического поля на напряженно-деформированное состояние электропроводной мягкой оболочки связывается с кулоновыми силами взаимодействия электрических зарядов, распределенных по поверхности оболочки.

Система уравнений математической модели для определения напряженно-деформированного состояния мягкой оболочки в электростатическом поле включает в себя уравнения теории мягких оболочек, уравнения электростатики проводников, соответствующие граничные условия, а также соотношения, выражающие действие кулоновых сил на проводящую поверхность оболочки. Данная система является связанной, поскольку величина электростатического давления определяется конечной деформированной формой оболочки, которая сама зависит от приложенной нагрузки, и нелинейной за счет нелинейности выражений для кулоновых сил и геометрических соотношений при конечных деформациях оболочки.

1. В соответствии с теорией больших деформаций мягких оболочек [1] при определении формы оболочки и усилий в одно- и двухосной областях уравнения составляются для деформированного состояния. В качестве неизвестных в них входят как усилия, так и координаты деформированной поверхности.

Считается, что недеформированная поверхность мягкой оболочки отнесена к линиям главных кривизн ξ^1, ξ^2, которые на деформированной поверхности образуют угол χ.

Равновесие деформированного элемента оболочки описывается вариационным уравнением Лагранжа

$$\int_\Omega [T^{\alpha\beta}\delta\varepsilon_{\alpha\beta} - \mathbf{q}\delta\mathbf{r}]\, d\omega - \delta\Pi_1 = 0 \tag{1.1}$$

где $T^{\alpha\beta}$ — контравариантные компоненты тензора мембранных усилий, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — ковариантные компоненты тензора деформации, $\mathbf{q}$ — вектор интенсивности поверхностной нагрузки в расчете на единицу площади деформированной срединной поверхности, $\delta\mathbf{r}$ — вектор перемещений точек срединной поверхности оболочки, $d\omega$ — элемент площади деформированной поверхности Ω, $\delta\Pi_1$ — приращение работы внешних краевых сил.

В уравнении (1.1) и далее греческие индексы α, β, ... принимают значения 1, 2, латинские (a, b, ...) — 1, 2, 3, по повторяющемуся индексу принято правило суммирования.

В качестве меры деформации используется выражение

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\,(a_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}) \tag{1.2}$$

где $a_{\alpha\beta}$ — ковариантные компоненты первого основного метрического тензора поверхности, градус означает принадлежность параметров недеформированной поверхности $\Omega°$.

Компоненты тензора деформации выразим через компоненты перемещений $u_1°$, $u_2°$ по касательным вдоль линий ξ^α и $w°$ по нормали к недеформированной поверхности

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [(\nabla_\beta° u_\alpha° - w° \overset{\circ}{b}_{\alpha\beta}) + (\nabla_\alpha° u_\beta° - w° \overset{\circ}{b}_{\beta\alpha}) + \tag{1.3}$$

$$+ (\nabla_\alpha° u_\gamma° - w° \overset{\circ}{b}_{\alpha\gamma}) (\nabla_\beta° u^{°\gamma} - w° b_\beta^{°\gamma}) + (w,_\alpha° + u^{°\gamma} \overset{\circ}{b}_{\gamma\alpha}) (w,_\beta° + u^{°\delta} \overset{\circ}{b}_{\delta\beta})]$$

где ∇_β — знак ковариантного дифференцирования по параметру ξ^β [2], запятая обозначает частную производную по параметру ξ^β.

Соотношения (1.1), (1.3) должны быть дополнены физическими зависимостями между усилиями и деформациями

$$T^{\alpha\beta} = \theta \partial \Phi / \partial \varepsilon_{\alpha\beta} \tag{1.4}$$

где параметр $\theta = (a°/a)^{1/2}$ имеет смысл отношения поверхностных плотностей массы деформированной и недеформированной оболочки, $a = \det [a_{\alpha\beta}]$. Простейший вариант соотношений (1.4) для анизотропного тела соответствует упругому потенциалу Φ в виде полного квадратичного пролинома относительно компонент тензора деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$:

$$\Phi = 1/2 B^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\delta} \tag{1.5}$$

где $B^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор упругих постоянных. В общем случае анизотропии тензор $B^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет 6 независимых констант B^{1111}, B^{1122}, B^{1112}, B^{2222}, B^{2212}, B^{1212}. При наличии двух плоскостей упругой симметрии (ортотропный материал) число упругих констант сокращается до четырех B^{1111}, B^{1122}, B^{2222}, B^{1212}.

В рассматриваемом случае

$$T^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} \tag{1.6}$$

Вариационное уравнение (1.1) является основой при построении численных алгоритмов, использующих метод конечных элементов.

Интегрируя по частям первое слагаемое в (1.1) при вариациях перемещений, равных нулю на краю оболочки, получим уравнения равновесия мягкой оболочки в проекциях на касательную плоскость и нормаль к деформированной поверхности

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} + q^\alpha = 0 \tag{1.7}$$

$$T^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + q^3 = 0 \tag{1.8}$$

где q^α, q^3 — контравариантные компоненты вектора распределенной нагрузки в базисе, связанном с деформированной поверхностью и отнесенные к площади ее элемента $d\omega$, $b_{\alpha\beta}$ — компоненты второго основного метрического тензора деформированной поверхности.

При не равных нулю вариациях на границе получим силовые граничные условия

$$T^{\alpha\beta} \nu_\beta = R^\alpha \tag{1.9}$$

где ν_β — компоненты нормали к граничному контуру оболочки, R^α — компоненты вектора краевых сил.

Приведенные выше уравнения справедливы для участков оболочки, находящихся в двухосном напряженном состоянии. Однако существуют зоны, где одно з главных усилий равно нулю. При этом справедливо условие

$$T^{(11)} T^{(22)} - (T^{(12)})^2 = 0 \tag{1.10}$$

где $T^{(\alpha\beta)}$ — истинные усилия в оболочке, являющиеся физическими компонентами тензора мембранных усилий $T^{\alpha\beta}$. Физические компоненты $T^{(\alpha\beta)}$ действуют на элементе деформированной поверхности и направлены вдоль векторов основного базиса, связанного с этой поверхностью (суммирования нет)

$$T^{(\alpha\beta)} = T^{\alpha\beta} (a_{\beta\beta}/a^{\alpha\alpha})^{1/2} \tag{1.11}$$

Складки в оболочке отсутствуют, если левая часть уравнения (1.10) больше нуля. В противном случае в рассматриваемой области образуются складки. При этом направление главных растягивающих усилий определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \gamma = -(T^{(12)} + T^{(22)} \cos \chi)/(T^{(22)} \sin \chi) \tag{1.12}$$

где γ — угол между касательной к линии ξ^1 и направлением растягивающих усилий.

2. Электростатическое поле характеризуется градиентом потенциала — вектором напряженности E, который является силовой характеристикой поля, определяющей электростатическое давление на проводящую поверхность мягкой оболочки.

Вектор напряженности E удовлетворяет уравнениям Максвелла [3], которые в случае электростатического поля имеют вид

$$\operatorname{div} \mathrm{E} = 0, \ \operatorname{rot} \mathrm{E} = 0 \tag{2.1}$$

Из уравнений (2.1) следует, что вектор напряженности направлен по нормали к поверхности проводника и электростатическое поле является потенциальным. Потенциальная функция φ связана с вектором напряженности соотношением

$$\mathrm{E} = -\operatorname{grad} \varphi \tag{2.2}$$

Результирующее уравнение, описывающее распределение потенциала электростатического поля проводника, имеет вид

$$\operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi) = \nabla^2 \varphi = 0 \tag{2.3}$$

где ∇^2 — оператор Лапласа.

Граничные условия для уравнения (2.3) заключаются в задании потенциалов проводников, находящихся в электростатическом поле.

Отношение кулоновых сил к единице площади поверхности оболочки определяет электростатическое давление

$$p = 0{,}5\varepsilon_0 (E)^2 \tag{2.4}$$

где ε_0 — диэлектрическая постоянная, E — модуль вектора напряженности у поверхности оболочки в деформированном состоянии.

Если на проводящую оболочку, находящуюся в электростатическом поле, не действуют другие нагрузки, то в уравнении (1.8) составляющая q^3 совпадает с p, а составляющие q^α равны нулю.

3. Полученные выше строгие соотношения могут быть существенно упрощены введением соответствующих допущений при построении расчетных схем для различных прикладных задач.

В технике адаптивных систем объектом исследования являются круглые мембранные конструкции, формируемые под воздействием элестростатических сил. При исследовании электростатического формообразования круглой мембраны приведенные выше уравнения записываются в цилиндрической системе координат r, θ, z.

Для плоской круглой мембраны компоненты первого основного метрического тензора поверхности выражаются соотношениями $\overset{\circ}{a}_{11} = 1$, $\overset{\circ}{a}_{22} = r^2$, $\overset{\circ}{a}_{12} = \overset{\circ}{a}_{21} = 0$, коэффициенты второго основного метрического тензора плоской поверхности равны нулю. В результате соотношение (1.3) для компонент тензора деформации приобретает вид

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = 1/2\,[\nabla_\beta{}^\circ u_\alpha{}^\circ + \nabla_\alpha{}^\circ u_\beta{}^\circ + \nabla_\alpha{}^\circ u_\gamma{}^\circ \nabla_\beta{}^\circ u^{\circ\gamma} + w,_\alpha{}^\circ w,_\beta{}^\circ] \tag{3.1}$$

Переходя к физическим компонентам вектора перемещений $u = u^{(1)} = u^{\circ 1}$, $v = u^{(2)} = ru^{\circ 2}$ $w = w^\circ$, получим полные нелинейные соотношения для компонент тензора конечных деформаций круглой мембраны

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{22} = r\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2\right] \\
\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left[r\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial \theta} - v + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v\right) + \frac{\partial v}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u\right) + \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right]
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Уравнения равновесия круглой мембраны, записанные в терминах физических компонент тензора усилий и деформаций являются частным случаем известных уравнений Кармана [4], описывающих большие деформации круглых пластин. В работе [5] предложен метод решения этих уравнений при воздействии на мембрану электростатического давления. Анализ полученных результатов показал, что для мембраны, имеющей начальное натяжение (в том случае, если мембранные напряжения, вызванные прогибом пленки много меньше растягивающих напряжений начального состояния) справедливо вариационное уравнение

$$T_0 \int\int \left[\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial \delta w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial \delta w}{\partial \theta}\right] r dr d\theta = \int\int p\,\delta w\, r dr d\theta \tag{3.3}$$

где T_0 — усилие начального натяжения, $T_0 = \text{const}$. Нелинейность в этой задаче связана только с электростатической нагрузкой, входящей в правую часть уравнения.

4. При построении алгоритма решения задачи о деформировании круглой мембраны в электростатическом поле используется метод конечных элементов. В соответствии с теорией метода конечных элементов [6, 7] мембрана представляется набором плоских конечных элементов, рассматриваемая область пространства вокруг мембраны — объемными конечными элементами. Задаются аппроксимации искомых функций в виде

$$w = N_i w_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{4.1}$$

$$\varphi = F_j \varphi_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.2}$$

где N_i, F_j — полиномиальные функции формы соответственно для мембраны и электростатического поля, w_i, φ_j — узловые значения прогибов и потенциалов, m, n — число узлов в конечных элементах мембраны и электростатического поля.

Уравнение равновесия мембранного конечного элемента формулируется на основе уравнения (3.3) с использованием принятой аппроксимации

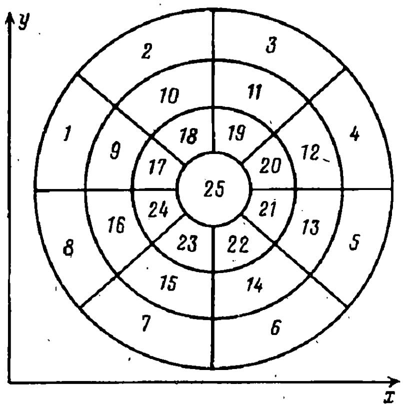
$$K_{ij} w_i = p_j \tag{4.3}$$

где K_{ij} — компоненты матрицы жесткости конечного элемента мембраны, p_j — узловые силы

$$K_{ij} = T_0 \int\int \left[\frac{\partial N_i}{\partial r}\frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial N_i}{\partial \theta}\frac{\partial N_j}{\partial \theta}\right] r dr d\theta \tag{4.4}$$

$$p_j = p_e \int\int N_j r dr d\theta \tag{4.5}$$

где p_e — электростатическое давление, которое принимается постоянным для элемента, величина этого давления определяется из решения задачи электростатики.



Уравнение конечного элемента электростатического поля формулируется с использованием метода Галеркина в виде

$$\varphi_i \int\int\int (\nabla F_i \nabla F_j)\, r dr d\theta dz = \int_S\int qF_j dS \tag{4.6}$$

где $q = |\nabla \varphi_0|$ — функция, заданная на границе S области, для внутренних элементов области $q = 0$.

После формулировки уравнений для отдельных конечных элементов проводится операция сборки. Суммируя уравнения для отдельных элементов и удовлетворяя заданным граничным условиям, получают систему линейных алгебраических уравнений, решение которой дает числовые значения искомой функции.

Задача расчета плоской мембраны в электростатическом поле является связанной, при ее решении применяется метод итераций. На каждой итерации форма мембраны считается заданной, отсчет ведется от первоначальной плоской формы. При известной форме мембраны находится распределение потенциала в окружающем пространстве. Зная значения потенциала у поверхности мембраны, вычисляется модуль напряженности поля и подсчитывается электростатическое давление. Это давление определяет деформированную форму мембраны, которая является исходной для следующей итерации.

5. Описанный алгоритм применялся при расчете формы мембранного отражателя, деформируемого при помощи системы изолированных электродов, схема расположения которых показана на фигуре. Управляющий электрод разбит на 25 изолированных сегментов, из которых центральный является диском радиуса $r = R/4$, а остальные 24 представляют собой криволинейные трапеции. Плоскость деформируемой круглой мембраны параллельна плоскости электродов и отстоит от них на расстояние $H = 0{,}01$ м. Радиус мембраны составил 0,15 м.

В конечно-элементной модели использовались квадратичные изопараметрические элементы с 8 узлами при аппроксимации прогибов мембраны и с 20 узлами в трехмерной задаче электростатики.

Были проведены расчеты деформированной формы мембраны соответственно при осесимметричном и несимметричном деформировании. В первом случае на электроды с номерами с 9 по 16 подавался отрицательный потенциал $\varphi = -3{,}33$ кВ, на другие — положительный потенциал $\varphi = 3{,}0$ кВ, потенциалы остальных электродов и мембраны равны нулю. При этих значениях параметров расчетные значения прогибов составляли $w_{max} = 0{,}4586 \times 10^{-6}$ м, $w_{min} = -0{,}107 \times 10^{-4}$ м. При неосесимметричном деформировании потенциалы электродов имели следующие значения $\varphi_9 = \varphi_{16} = -4{,}25$ кВ, $\varphi_{20} = \varphi_{21} = 2{,}13$ кВ, потенциалы остальных электродов и мембраны задавались нулевыми. Максимальный и минимальный прогибы принимали значения $w_{max} = 0{,}127 \times 10^{-5}$ м, $w_{min} = -0{,}2571 \times 10^{-4}$ м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Усюкин В. И.* Строительная механика конструкций космической техники. М.: Машиностроение, 1988. 392 с.
2. *Сокольников И. С.* Тензорный анализ. М.: Наука, 1971. 376 с.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1957. 532 с.
4. *Вольмир А. С.* Теория гибких круглых пластинок. М.: ИЛ, 1957. 214 с.
5. *Волчек О. С.* Расчет электростатического пленочного концентратора//Гелиотехника. 1986. № 3. С. 23—26.
6. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 544 с.
7. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.

Москва

Поступила в редакцию 10.X.1993