

УДК 539.374

© 1993 г. А. А. РАВАСОУ

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ С НЕОДНОРОДНОЙ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИЕЙ

Исследуется квазиодномерная задача распространения продольной волны в нелинейной вязкоупругой среде с плоской неоднородной предварительной деформацией. Используется модифицированное нелинейное уравнение состояния среды, выведенное на основе квазилинейной теории вязкоупругости [1]. Особенностью уравнения является схожая структура его мгновенной и регулярной частей, что облегчает понимание физического смысла многочисленных функций ядер. Построено решение уравнения движения среды, описывающее начальную стадию нелинейного искажения профиля волны типа импульса или синуса, распространяющегося в вязкоупругой среде с нелинейными упругими и линейными наследственными свойствами. Решение удовлетворяет условию о малости характерной длины волны по сравнению с расстоянием, на котором предварительная деформация существенно меняется, и оно справедливо в прифронтной зоне волны. Решение связывает скорость волны, его амплитуду и форму с параметрами, характеризующими предварительно деформированное состояние среды.

На основе представленных результатов численных расчетов можно утверждать, что полученное решение может быть полезным при обработке данных неразрушающего контроля свойств твердых сплошных сред.

1. Модифицированное уравнение состояния среды. Рассматривается изотропная однородная вязкоупругая сплошная среда; предполагается, что деформации среды являются малыми, но конечными. Используются лагранжева ($X_i, i = 1, 2, 3$) и эйлерова ($x_i, i = 1, 2, 3$) системы декартовых координат. Тензор деформации Лагранжа E_{KL} выражается через вектор перемещений U_K в виде

$$2E_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K}U_{M,L} \quad (1.1)$$

Тензоры E_{KL} и U_K являются функциями пространственных координат X_i и времени t . Используется обозначение производных $U_{K,L} = \partial U_K / \partial X_L$.

Подразумевается, что тензор псевдонапряжений Кирхгофа T_{KL} является непрерывным и непрерывно дифференцируемым функционалом в точке X_i и в ее окрестности и он может быть разложен на отрезке оси времени $(0, t)$ в ряд Фреше [1, 2]:

$$\begin{aligned} T_{IJ}(t) = & \int_0^t G_{IJKL}(t, \tau) E_{KL}(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^\tau G_{IJKLMN}(t, \tau, \eta) E_{KL}(\tau) E_{MN}(\eta) d\tau d\eta + \dots \\ & \dots + \int_0^t \int_0^\tau \dots \int_0^\theta G_{IJKL\dots PR}(t, \tau, \dots, \theta) E_{KL}(\tau) \dots E_{PR}(\theta) d\tau \dots d\theta + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

где G_{IJKL} , G_{IJKLMN} , ... — тензоры ядер релаксации.

Далее, следуя идеям, изложенным в [1, 3], предполагается, что тензоры ядер

релаксации являются непрерывными и симметрическими функциями по отношению к своим аргументам и они инвариантны по отношению к началу отсчета времени. Последнее приводит к равенству

$$G_{IJKL...PR}(t, \tau, \eta, \dots, \theta) = G_{IJKL...PR}(t - \tau, t - \eta, \dots, t - \theta) \quad (1.3)$$

В случае изотропной среды тензоры ядер релаксации можно выразить через скалярные функции, которые представляются в виде суммы сингулярной и регулярной составляющих [1]. Подстановкой последних в выражение (1.2) получаем уравнение состояния такой среды, существенная часть деформации которой происходит после нагружения среды мгновенно, и затем следует более длительная деформация, зависящая от времени. При учете двух первых членов ряда (1.2) мгновенная деформация характеризуется восьмью константами, а регулярная часть одиннадцатью скалярными функциями ядер релаксации [4]. Введем обозначение

$$T_{IJ}(t) = {}_E T_{IJ}(t) - {}_D T_{IJ}(t) \quad (1.4)$$

где ${}_E T_{IJ}(t)$ и ${}_D T_{IJ}(t)$ — мгновенная и регулярная составляющие тензора псевдо-напряжения Кирхгофа соответственно.

В мгновенной части константы в некоторой комбинации связывают тензоры напряжений и деформаций точно так же, как модули упругости связывают их в пятиконстантной нелинейной теории упругости [5], и мгновенную часть уравнения состояния можно представить в виде

$$\begin{aligned} {}_E T_{IJ}(t) = & \lambda(0) \delta_{IJ} E_{KK}(t) + 2\mu(0) E_{IJ}(t) + 3\nu_1(0) \delta_{IJ} E_{KK}(t) E_{LL}(t) + \\ & + \nu_2(0) [\delta_{IJ} E_{KL}(t) E_{KL}(t) + 2E_{KK}(t) E_{IJ}(t)] + 3\nu_3(0) E_{JK}(t) E_{KJ}(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь δ_{IJ} — символ Кронекера; $\lambda(0)$, $\mu(0)$ — константы Ляме; $\nu_1(0)$, $\nu_2(0)$, $\nu_3(0)$ — модули упругости третьего порядка. При статическом нагружении ${}_E T_{IJ} = {}_E T_{IJ}(0)$.

Регулярную часть уравнения состояния среды (1.4) можно привести к виду, в котором функции ядер релаксации связывают тензоры напряжений и деформации точно так, как модули упругости связывают их в уравнении пятиконстантной теории упругости (1.5). Различие заключается только в зависимости этой связи от времени

$$\begin{aligned} {}_D T_{IJ}(t) = & \int_0^t [\lambda_1(t - \tau) \delta_{IJ} E_{KK}(\tau) + 2\mu_1(t - \tau) E_{IJ}(\tau)] d\tau + \\ & + {}_D T_{IJ}^1(\tau, \tau, \tau) + {}_D T_{IJ}^2(\eta, t, \eta) + {}_D T_{IJ}^2(\tau, \tau, t) + {}_D T_{IJ}^3(\tau, \eta, \tau, \eta) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} {}_D T_{IJ}^N(\alpha, \beta, \gamma) = & \int_0^t \{3\nu_1^N(t - \alpha) \delta_{IJ} E_{KK}(\beta) E_{LL}(\gamma) + \\ & + \nu_2^N(t - \alpha) [\delta_{IJ} E_{KL}(\beta) E_{KL}(\gamma) + 2E_{KK}(\beta) E_{IJ}(\gamma)] + \\ & + 3\nu_3^N(t - \alpha) E_{JK}(\beta) E_{KJ}(\gamma)\} d\alpha, \quad N = 1, 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_D T_{IJ}^3(\tau, \eta, \tau, \eta) = & \int_0^t \int_0^t \{3\nu_1^3(t - \tau, t - \eta) \delta_{IJ} E_{KK}(\tau) E_{LL}(\eta) + \\ & + \nu_2^3(t - \tau, t - \eta) [\delta_{IJ} E_{KL}(\tau) E_{KL}(\eta) + 2E_{KK}(\tau) E_{IJ}(\eta)] + \\ & + 3\nu_3^3(t - \tau, t - \eta) E_{JK}(\tau) E_{KJ}(\eta)\} d\tau d\eta \end{aligned}$$

где λ_i , μ_i , ν_i^j — функции ядер релаксации ($i, j = 1, 2, 3$).

Уравнения (1.4) — (1.6) представляют модифицированное уравнение состояния квазилинейной теории вязкоупругости. Главным достоинством уравнения является

схожая структура его мгновенной и регулярной частей, что способствует пониманию физического смысла функции ядер релаксации. Уравнение выведено на основе общих постулатов механики сплошной среды, и аналогично [1] можно доказать, что все уравнения состояния нелинейных теорий одномерной вязкоупругости, в которых связь между напряжениями и деформациями задается в виде однократных интегралов, например [6], являются частными случаями этого уравнения

2. Постановка задачи. Рассматривается среда с нелинейными упругими и линейными наследственными свойствами, которая описывается уравнением состояния (1.4)–(1.6) при допущении ${}_D T_{IJ}^N = 0$, $N = 1, 2, 3$. Допускается, что в момент времени $t < 0$ среда находится в естественном недеформированном состоянии. В момент времени $t = 0$ она подвергается воздействию внешних нагрузок и деформируется. При $t = t_0 = 0$ в этой предварительно деформированной среде возбуждается волновой процесс. Перемещения материальных точек среды U_K в данный момент времени связаны с соответствующими перемещениями U_K^0 , вызванными предварительной деформацией, и U_K , характеризующими волновой процесс в среде равенством

$$U_K^* = U_K^0 + U_K \quad (2.1)$$

Подстановка равенства (2.1) в уравнение движения среды (ρ_0 — плотность среды)

$$[T_{KL}^* (\delta_{KL} + U_{k,L}^*)]_{,K} - \rho_0 U_{k,H}^* = 0 \quad (2.2)$$

и учет равновесия среды в предварительно деформированном состоянии приводит к уравнению, позволяющему описать процесс распространения волн в вязкоупругой среде с неоднородной предварительной деформацией. Это уравнение решается для случая плоской деформации ($U_3^* = U_3^0 = 0$). Предполагается, что деформации, возбужденные волной, и их пространственные производные в направлении оси распространения волны намного больше соответствующих величин в перпендикулярном направлении. Это приводит к квазиодномерной задаче распространения одномерной продольной волны в двумерной среде с предварительной деформацией. Уравнением движения среды в лагранжевой системе декартовых координат является нелинейное интегродифференциальное уравнение

$$U_{1,11}(X_1, t) + f_1(X_1, t) U_{1,1}(X_1, t) - f_2(X_1, t) [R(t) * U_{1,1}(X_1, t)] - \\ - f_3(X_1, t) U_{1,11}(X_1, t) = f_4(X_1, t) U_{1,1}(X_1, t) U_{1,11}(X_1, t) \quad (2.3)$$

Координата X_2 входит в уравнение (2.3) как параметр. Коэффициенты уравнения

$$f_0(X_1, t) = 1 + k_1 U_{1,1}^0(X_1, t) + k_2 U_{2,2}^0(X_1, t) \\ f_1(X_1, t) = f_0^{-1}(X_1, t) [k_1 U_{1,1}^0(X_1, t) + k_3 U_{1,22}^0(X_1, t) + k_4 U_{2,21}^0(X_1, t)] \\ f_2(X_1, t) = k_0 f_0^{-1}(X_1, t) > 0, \quad f_3(X_1, t) = \rho_0 f_2(X_1, t) > 0 \\ f_4(X_1, t) = -k_1 f_0^{-1}(X_1, t) \quad (2.4)$$

зависят как от пространственных координат, так и от времени. Постоянные

$$k_0 = [\lambda(0) + 2\mu(0)]^{-1}, \quad k_1 = 3 \{1 + k_0 [v_1(0) + v_2(0) + v_3(0)] \\ k_2 = k_0 [\lambda(0) + 6v_1(0) + 2v_2(0)], \quad k_3 = 1 + k_0 [v_2(0) + 3v_3(0)/2] \\ k_4 = k_0 [\mu(0) + v_2(0) + 3v_3(0)/2] \quad (2.5)$$

характеризуют мгновенные свойства среды. Линейные наследственные свойства среды определяются ядром релаксации

$$R(t) = \lambda_1(t) + 2\mu_1(t) \quad (2.6)$$

Используется следующее обозначение интеграла свертки:

$$F_1(X, t) * F_2(X, t) = \int_0^t F_1(X, t - \tau) F_2(X, \tau) d\tau \quad (2.7)$$

Уравнение (2.3) решается для случая, когда предварительно деформированное состояние среды изменяется во времени настолько медленно, что в промежутке времени распространения в среде волны его можно считать статическим и равным его значению в момент времени t_0 .

Рассматриваются вязкоупругие среды с затухающей памятью, ядра релаксации (2.6) которых являются конечными однозначными функциями своего аргумента и удовлетворяют в пространстве преобразования Лапласа условию

$$R^L(s) \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

где s — параметр преобразования Лапласа.

3. Асимптотическое решение. Уравнение (2.3) решается при нулевых начальных условиях

$$U_1(X_1, 0) = U_{1,r}(X_1, 0) = 0 \quad (3.1)$$

Нестационарная продольная волна возбуждается в среде краевым воздействием

$$U_{1,r}(0, t) = -\varepsilon c \varphi(t) H(t), \quad U_1(\infty, t) = 0 \quad (3.2)$$

где ε, c — положительные постоянные ($\varepsilon \ll 1$), $H(t)$ — функция Хевисайда, $\varphi(t)$ — непрерывная произвольная гладкая функция ($\max |\varphi(t)| = 1$), которая удовлетворяет условиям (3.1). Функция $\varphi(t)$ определяет исходную форму распространяющейся в среде волны.

Описывается начальная стадия эволюции формы волны, используя метод возмущения по малому параметру ε , введенному краевым условием (3.2). Решение уравнения (2.3), ищется в виде

$$U_1(X_1, t) = \sum_{N=1}^{\infty} \varepsilon^N U_{1N}(X_1, t) \quad (3.3)$$

Следуя стандартной процедуре метода возмущения, первый член ряда (3.3) определяется из уравнения

$$U_{11,11}(X_1, t) + f_1(X_1) U_{11,1}(X_1, t) - f_2(X_1) R(t) * U_{11,11}(X_1, t) - f_3(X_1) U_{11,11}(X_1, t) = 0 \quad (3.4)$$

при начальных и краевых условиях

$$U_{11,r}(X_1, 0) = U_{11}(X_1, 0) = 0 \quad (3.5)$$

$$U_{11,r}(0, t) = -c \varphi(t) H(t), \quad U_{11}(\infty, t) = 0$$

Время возмущения волны в среде t_0 входит в коэффициенты $f_i(X_1) \equiv f_i(X_1, t_0)$, $i = 1, 2, 3$ как параметр.

Уравнение (3.4) решается следуя методике, изложенной в [7]. Выполняется преобразование Лапласа по времени над уравнением (3.4). После учета начальных условий (3.5) получается уравнение (s — параметр преобразования)

$$U_{11,11}^L(X_1, s) + F_1(X_1, s) U_{11,1}^L(X_1, s) - s^2 F_2(X_1, s) U_{11}^L(X_1, s) = 0 \quad (3.6)$$

$$F_1(X_1, s) = f_1(X_1) [1 - f_2(X_1) R^L(s)]^{-1}$$

$$F_2(X_1, s) = f_3(X_1) [1 - f_2(X_1) R^L(s)]^{-1}$$

Подстановкой $U^L(X_1, s) = \exp \int [sv(X_1, s) - 1/2 F_1(X_1, s)] dX_1$ уравнение (3.6) сводится к уравнению Риккати

$$sv_1(X_1, s) + s^2 v^2(X_1, s) = s^2 F_2(X_1, s) + g(X_1, s) \quad (3.7)$$

$$g(X_1, s) = 1/2 [F_{1,1}(X_1, s) + 1/2 F_1^2(X_1, s)]$$

Решение уравнения (3.7) ищется в виде

$$v(X_1, s) = \sum_{N=1}^{\infty} v_N(X_1) s^{-N} \quad (3.8)$$

и учитывается, что из условия (2.8) следует справедливость разложения

$$1 - f_2(X_1) R^L(s) \sim 1 + \sum_{N=1}^{\infty} a_N(X_1) s^{-N} \quad (3.9)$$

После подстановки разложений (3.8) и (3.9) в уравнение (3.7) и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях s получается решение уравнения (3.6):

$$U_{11}^L(X_1, s) = C_1 \exp [-s\Phi_2(X_1) + \Phi_{11}(X_1) + \Phi_{12}(X_1) - s^{-1}\Phi_{31}(X_1) - s^{-1}\Phi_{32}(X_1) + \dots] + C_2 \exp [s\Phi_2(X_1) + \Phi_{11}(X_1) - \Phi_{12}(X_1) + s^{-1}\Phi_{31}(X_1) - s^{-1}\Phi_{32}(X_1) + \dots] \quad (3.10)$$

$$\Phi_{11}(X_1) = 1/4 \int_0^{X_1} [2f_1(x) + f_{3,x}(x) f_3^{-1}(x)] dx$$

$$\Phi_{12}(X_1) = 1/2 \int_0^{X_1} a_1(x) f_3^{f_2}(x) dx, \quad \Phi_2(X_1) = \int_0^{X_1} f_3^{f_2}(x) dx$$

$$\Phi_{31}(X_1) = 1/2 \int_0^{X_1} f_3^{-1/2}(x) [1/2 f_{1,x}(x) + 1/4 f_1^2(x) + 1/4 f_{3,xx}(x) f_3^{-1}(x) - 5/16 f_{3,x}^2(x) f_3^{-1}(x) + 3/4 a_1^2(x) f_3(x) - a_2(x) f_3(x)] dx$$

$$\Phi_{32}(X_1) = -1/2 \int_0^{X_1} f_3^{-1/2}(x) [1/2 a_{1,x}(x) f_3^{f_2}(x) + a_1(x) f_1(x) f_3^{f_2}(x)] dx$$

Решение уравнения (3.4) выражается после учета краевых условий (3.5) и первых трех членов в рядах (3.10) в форме интеграла свертки

$$U_{11}(X_1, t) = -cH(\zeta) \exp \Phi_1(X_1) \int_0^{\zeta} \varphi(\zeta - \xi) [1 - \Phi_3(X_1) \xi + \dots] d\xi \quad (3.11)$$

$$\zeta = t - \Phi_2(X_1), \quad \Phi_1(X_1) = \Phi_{11}(X_1) + \Phi_{12}(X_1)$$

$$\Phi_3(X_1) = \Phi_{31}(X_1) + \Phi_{32}(X_1)$$

Решение (3.11) описывает процесс линейного распространения продольной волны произвольной гладкой начальной формы в вязкоупругой среде с неоднородной предварительной деформацией. Решение справедливо в некоторой прифронтальной зоне волны. В случае, когда функции Φ_i ($i=1, 2, \dots$) являются ограниченными, непрерывными и гладкими, глубина этой зоны определяется из условия малости по сравнению с единицей старшего опущенного члена ряда (3.10).

Второй член ряда (3.3) определяется из уравнения

$$U_{12,11}(X_1, t) + f_1(X_1) U_{12,1}(X_1, t) - f_2(X_1) R(t) * U_{12,11}(X_1, t) - f_3(X_1) U_{12,11} = f_4(X_1) U_{11,1}(X_1, t) U_{11,11}(X_1, t) \quad (3.12)$$

при нулевых начальных и краевых условиях

$$U_{12}(X_1, 0) = U_{12,t}(X_1, 0) = U_{12,t}(0, t) = U_{12}(\infty, t) = 0 \quad (3.13)$$

Известная правая часть уравнения (3.12) имеет форму распространяющейся волны. Предполагается, что после выполнения над уравнением (3.12) преобразования Лапласа по времени в его правой части возможно частичное разделение независимых переменных

$$[1 - f_e(X_1) R^L(s)] U_{12,11}^L(X_1, s) + f_1(X_1) U_{12,1}^L(X_1, s) - s^2 f_3(X_1) U_{12}^L(X_1, s) = \exp[-s\Phi_2(X_1)] \sum_{i=1}^m B_i(X_1) G_i^L(s) \quad (3.14)$$

Вид функций $B_i(X_1)$ и $G_i^L(s)$, а также значение постоянной m зависит от вида функции $\varphi(t)$, т. е. от исходного профиля волны.

Решение уравнения (3.14) ищется в виде

$$U_{12}^L(X_1, s) = \exp[-s\Phi_2(X_1)] \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} G_i^L(s) \alpha_{ij}(X_1) s^{-j} \quad (3.15)$$

Подставляя решение (3.15) в уравнение (3.14) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s , получают выражение для двух первых коэффициентов ряда (3.15):

$$\begin{aligned} \alpha_{11}(X_1) &= -\frac{1}{2} \exp \Phi_1(X_1) \int_0^{X_1} \Phi_{2,1}^{-1}(x) B_1(x) \exp[-\Phi_1(x)] dx \\ \alpha_{12}(X_1) &= \frac{1}{2} \exp \Phi_1(X_1) \int_0^{X_1} \Phi_{2,1}^{-1}(x) \exp[-\Phi_1(x)] \times \\ &\times \{ \alpha_{11}(x) + [f_1(x) - 2a_1(x) \Phi_{2,1}(x)] \alpha_{11}(x) + \\ &+ [a_2(x) \Phi_{2,1}^2(x) - \Phi_{2,11}(x)] \alpha_{11}(x) \} dx \end{aligned} \quad (3.16)$$

Обратное преобразование Лапласа над выражением (3.15) приводит к решению уравнения (3.12) в виде интеграла свертки

$$U_{12}(X_1, t) = H(\zeta) \sum_{i=1}^m [G_i(\zeta) * \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}(X_1) \zeta^{j-1} / (j-1)!] \quad (3.17)$$

Решение (3.17) определяет нелинейную поправку к линейному решению (3.11) и позволяет описать начальную стадию нелинейного искажения профиля волны.

4. Эволюция профиля синусоидальной волны. Выведенное решение (3.3) позволяет описать распространение продольной волны типа импульса или синуса в нелинейной среде с учетом эффектов нелинейности, диссипации, дисперсии и неоднородности. Для анализа влияния этих эффектов на волновой процесс задача конкретизируется. Рассматривается более распространенный в практике случай, когда в среде возбуждается синусоидальная волна

$$\varphi(t) = \sin \omega t \quad (4.1)$$

где ω — угловая частота возмущения. Поскольку краевое возмущение (3.2) задано

в виде производной функции $U_1(X_1, t)$ по времени, для анализа эволюции профиля волны удобнее использовать решение (3.3) в виде

$$U_{1,t}(X_1, t) = \sum_{N=1}^{\infty} \varepsilon^N U_{1N,t}(X_1, t) \quad (4.2)$$

Из выражения (3.11) несложно определить первый член ряда (4.2):

$$U_{1,t}(X_1, t) = -cH(t) \exp \Phi_1(X_1) [\sin \omega \zeta - \omega^{-1} \Phi_3(X_1) (1 - \cos \omega \zeta)] \quad (4.3)$$

Легко также убедиться, что после подстановки выражения (4.3) в уравнение (3.12) его правую часть

$$P(X_1, t) = B_1(X_1) + B_2(X_1) \cos \omega \zeta + B_3(X_1) \sin 2\omega \zeta + B_4(X_1) \cos 2\omega \zeta \quad (4.4)$$

$$B_1(X_1) = 1/2 \psi(X_1) \Phi_{2,1}^2(X_1) [\Phi_{1,1}(X_1) + \Phi_{2,11}(X_1) \Phi_{2,1}^{-1}(X_1)]$$

$$B_2(X_1) = \psi(X_1) \Phi_{2,1}^2(X_1) [\Phi_{1,1}(X_1) + \Phi_3(X_1) \Phi_{2,1}(X_1)],$$

$$B_3(X_1) = -1/2 \omega \psi(X_1) \Phi_{2,1}^3(X_1)$$

$$B_4(X_1) = -1/2 \psi(X_1) \Phi_{2,1}^2(X_1) [3\Phi_{1,1}(X_1) + \Phi_{2,11}(X_1) \Phi_{2,1}^{-1}(X_1) + 2\Phi_{2,1}(X_1) \Phi_3(X_1)]$$

$$\psi(X_1) = c^2 f_4(X_1) \exp 2\Phi_1(X_1)$$

можно привести к виду (3.14).

Второй член ряда (4.2) определяется из выражения (3.17). После несложных выкладок получается искомое окончательное решение (4.2) с учетом двух его первых членов

$$U_{1,t}(X_1, t) = H(\zeta) [A_0 + A_1 \sin(\omega \zeta + \theta_1) + A_2 \sin(2\omega \zeta + \theta_2)] \quad (4.5)$$

$$A_0 = \alpha_0(X_1)$$

$$A_1 = -\varepsilon [\alpha_1^2(X_1) + \alpha_2^2(X_1)]^{1/2}, \quad A_2 = \varepsilon^2 [\alpha_3^2(X_1) + \alpha_4^2(X_1)]^{1/2}$$

$$\theta_1 = \arctan [\alpha_2(X_1) \alpha_1^{-1}(X_1)], \quad \theta_2 = \arctan [\alpha_4(X_1) \alpha_3^{-1}(X_1)]$$

$$\alpha_0(X_1) = \varepsilon c \omega^{-1} \Phi_3(X_1) \exp \Phi_1(X_1) + \varepsilon^2 [\alpha_{11}(X_1) + 1/2 \omega^{-1} \alpha_{32}(X_1)]$$

$$\alpha_1(X_1) = c \exp \Phi_1(X_1), \quad \alpha_2(X_1) = c \omega^{-1} \Phi_3(X_1) \exp \Phi_1(X_1) - \varepsilon \alpha_{21}(X_1)$$

$$\alpha_3(X_1) = \alpha_{31}(X_1), \quad \alpha_4(X_1) = \alpha_{41}(X_1) - 1/2 \omega^{-1} \alpha_{32}(X_1)$$

Функции $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots$ определяются на основе формул (3.16) с учетом выражения (4.4). Конкретизируются также наследственные свойства среды и предварительно деформированное состояние.

Пусть наследственные свойства среды описываются согласно модели стандартной вязкоупругой среды [6] и ядро релаксации определяется выражением

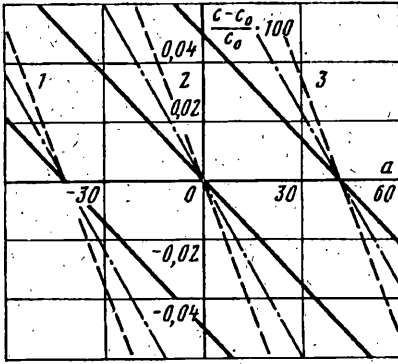
$$R(t) = \lambda_1(t) + 2\mu_1(t) \quad (4.6)$$

$$\lambda_1(t) = m_1 \exp(-t/r), \quad \mu_1(t) = m_2 \exp(-t/r)$$

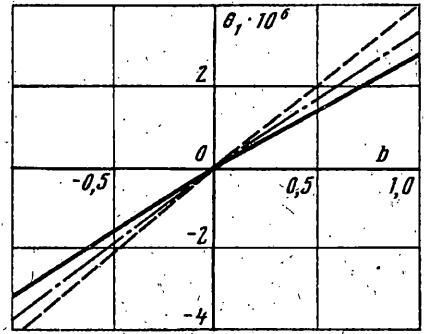
где m_1, m_2 — постоянные и r — время релаксации.

Пусть в момент времени $t = t_0$ среда подвергается воздействию внешних сил и в ней образуется плоское деформированное состояние, соответствующее чистому изгибу с растяжением или сжатием. Компоненты тензора псевдонапряжения Кирхгофа в этом случае равны

$$T_{22}^0(X_1) = a + bX_1, \quad T_{11}^0(X_1) = T_{12}^0(X_1) = T_{21}^0(X_1) = 0 \quad (4.7)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где a и b — размерные постоянные. Среда находится в этом состоянии в равновесии и квазистатическое линейное уравнение равновесия среды имеет точное решение

$$U_1^0(X_1, X_2, t) = -X_1(a + bX_1) \int_0^t \alpha(\tau) d\tau - bX_2^2 \int_0^t \beta(\tau) d\tau$$

$$U_2^0(X_1, X_2, t) = X_2(a + bX_1) \int_0^t \beta(\tau) d\tau \quad (4.8)$$

Функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ определяются выражениями

$$\alpha(t) = -\{4\mu(0)(\kappa_1 - \kappa_2)[\lambda(0) + \mu(0)]\}^{-1} \times$$

$$\times \{\lambda(0)(\kappa_1 - \kappa_2)\delta(t) \exp(-t/r) +$$

$$+ \kappa_1[\lambda(0)\kappa_1 - m_1] \exp(\kappa_3 t) - \kappa_2[\lambda(0)\kappa_2 - m_1] \exp(\kappa_4 t)\}$$

$$\beta(t) = \{4\mu(0)(\kappa_1 - \kappa_2)[\lambda(0) + \mu(0)]\}^{-1} \times$$

$$\times \{[\lambda(0) + 2\mu(0)](\kappa_1 - \kappa_2)\delta(t) \exp(-t/r) +$$

$$+ \kappa_1[\kappa_1(\lambda(0) + 2\mu(0)) - m_1 - 2m_2] \exp(\kappa_3 t) -$$

$$- \kappa_2[\kappa_2(\lambda(0) + 2\mu(0)) - m_1 - 2m_2] \exp(\kappa_4 t)\}$$

$$\kappa_1 = (m_1 + m_2)[\lambda(0) + \mu(0)]^{-1}, \quad \kappa_2 = (m_1 + m_2)/\mu(0)$$

$$\kappa_3 = \kappa_1 - 1/r, \quad \kappa_4 = \kappa_2 - 1/r$$

В итоге получается алгоритм для исследования процесса распространения продольной синусоидальной волны в стандартной вязкоупругой среде с неоднородной дупараметрической предварительной деформацией. Ввиду громоздкости выражений дальнейший анализ целесообразно вести численно. Ниже представлены некоторые результаты численных расчетов иллюстрирующие теоретическую возможность использования полученных результатов при обработке данных неразрушающего контроля предварительно деформированного состояния вязкоупругих сред.

5. Пример. Рассматривается среда с плотностью $\rho_0 = 2800$ кг/м, с модулями упругости $\lambda(0) = 50$ ГПа, $\mu(0) = 27,6$ ГПа, $\nu_1(0) = -136$, $\nu_2(0) = -197$, $\nu_3(0) = -38$ ГПа и с наследственными свойствами $r = 10^5$ с, $m_1 = 10^4$ Па · с⁻¹, $m_2 = 5 \cdot 10^3$ Па · с⁻¹. В среде возбуждается синусоидальная волна с частотой $\omega = 10^6$ с⁻¹ и $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-4}$. На расстоянии $X_1 = 10$ см определяется искажение профиля волны. Предварительно деформированное состояние среды

соответствует чистому изгибу с растяжением или сжатием (4.7) и характеризуется параметрами a и b . Результаты численного расчета акустоупругого эффекта — зависимости скорости волны в среде от предварительной деформации представлены на фиг. 1. Здесь пучки кривых 1, 2 и 3 соответствуют значениям параметра $b = 0,8; 0; -0,8$ ГПа · м⁻¹ соответственно. Через c_0 обозначена скорость волны в среде, находящейся в естественном недеформированном состоянии. Сплошная линия в пучке 2, которая опишет мгновенную деформацию ($b = 0, t = 0$) качественно сходится с известными результатами [8]. Ввиду наследственных свойств среды скорость волны зависит от момента возбуждения волнового процесса. Напомним, что началом отсчета времени является момент возникновения предварительной деформации в среде. Влияние времени на исследуемые величины изображено на фиг. 1, 2 тремя линиями, из которых сплошная линия соответствует моменту $t/r = 0$, штрихпунктирная — моменту $t/r = 1,0$ и штриховая — $t/r = 2,0$.

Результаты расчетов показывают, что скорость волны (фиг. 1), амплитуды и сдвиги фаз двух первых гармоник волны (4.5) зависят от обоих параметров предварительного напряжения, но их чувствительность к изменению параметров различна. Так, скорость волны (фиг. 1) и амплитуда второй гармоники существенно зависят от обоих параметров a и b , в то время как амплитуда первой гармоники и сдвиги фаз первой (фиг. 2) и второй гармоник малочувствительны к параметру a . На фиг. 2 результаты расчетов при различных значениях параметра a практически совпадают. Эта различная чувствительность является полезной при обработке данных неразрушающего контроля состояния среды. Например, в случае, когда о свойствах среды все известно: известен момент предварительного нагружения среды и схема нагружения позволяет предполагать, что предварительно деформированное состояние среды опишется выражением (4.8), на основе результатов расчетов, аналогичных представленным на фиг. 1, 2, и фактических измерений теоретически возможно определить неизвестные параметры a и b и тем самым предварительно деформированное состояние среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
2. *Green A. E., Rivlin R. S.* The mechanics of non-linear materials with memory. Pt. 1. // Arch. Ration. Mech. Analysis. 1957. V. 1. № 1. P 1—21.
3. *Ильюшин А. А., Огibalов П. М.* Квазилинейная теория вязкоупругости и метод малого параметра. // Механика полимеров. 1966. № 2. С. 170—189.
4. *Ravasio A.* Some remarks on the quasi-linear theory of viscoelasticity. // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. 1991. V. 40. № 2. P. 122—129.
5. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. М., Л.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
6. *Низул У. К.* Нелинейная акустодиагностика. Л.: Судостроение, 1981. 251 с.
7. *Ravasio A. A.* Распространение одномерных волн в неоднородной наследственно упругой среде с E -памятью. // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 147—152.
8. *Бобренко В. М., Вангели М. С., Куценко А. Н.* Акустические методы контроля напряженного состояния материала деталей машин. Кишинев: Штиинца, 1981. 147 с.

Таллинн

Поступила в редакцию
27.XII.1991