

УДК 539.374

© 1993 г. Д. А. КИКВИДЗЕ, Л. А. КОРЯКИН, А. Н. САХАРОВ

**ПОЛУОБРАТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
 УСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ  
 ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА С УПРОЧНЕНИЕМ**

Рассмотрен метод решения задач установившегося течения жесткопластического материала с упрочнением. В отличие от задач о течении идеально пластических тел, где удается получить интегралы уравнений равновесия, например интегралы Генки для плоской деформации [1, 2], уравнения равновесия для упрочняющегося жесткопластического материала [3, 4] не интегрируются. Это обстоятельство затрудняет использование прямых методов расчета (например, метода годографа), поэтому эффективным становится применение различных полуобратных методов. Рассматривается установившееся течение, когда траектории движения частиц, вдоль которых необходимо интегрировать параметр упрочнения для определения поверхности нагружения, совпадают с линиями тока. Предлагается полуобратный метод решения, основанный на задании семейства линий тока и определении кинематических характеристик течения из удовлетворения уравнениям равновесия; такой характеристикой может быть модуль вектора скорости или некоторые другие величины, функционально с ним связанные.

Первоначально такой метод решения был предложен в [5] и применялся для задач об установившемся идеально пластическом течении материала Мизеса в криволинейном канале. В публикуемой работе дано обобщение этого метода для плоского течения изотропно-упрочняющегося материала с гладкой поверхностью нагружения; получены решения задач о течении в шероховатом сходящемся канале и волочении тонкостенной трубы.

1. Рассмотрим плоское течение ( $v_x = v_x(x, y)$ ,  $v_y = v_y(x, y)$ ,  $v_z \equiv 0$ ) жесткопластического материала с изотропным упрочнением, определяемым параметром Одквиста

$$\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y = 0, \quad \partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y = 0$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4T^2(\kappa) \tag{1.1}$$

$$\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y) = e_{xy}/(e_x - e_y)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i) \quad (i, j = x, y), \quad e_{ij}^{(p)} \equiv e_{ij}$$

$$\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0, \quad 4\dot{\kappa}^2 = 4e_{xy}^2 + (e_x - e_y)^2$$

$$\partial\kappa/\partial t = 0, \quad \dot{\kappa} = \kappa_i v_i$$

где  $v_i$ ,  $e_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  — компоненты вектора скорости, тензоров скоростей пластических деформаций и напряжений в декартовой системе координат  $xu$ ;  $T(\kappa)$ ,  $\kappa$  — функция упрочнения и параметр Одквиста.

Введем в рассмотрение уравнения линий тока  $q_1 = q_1(x, y)$  и линий ортогональных к ним  $q_2 = q_2(x, y)$  с параметрами Ламе  $H_1 = H_1(q_1, q_2)$ ,  $H_2 = H_2(q_1, q_2)$ , удовлетворяющие уравнению Ламе

$$\frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) = 0 \quad (1.2)$$

В системе координат  $q_1, q_2$  уравнения равновесия примут вид [6]:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 \sigma_{11}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 \sigma_{12}) + \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \sigma_{12} - \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \sigma_{22} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (H_1 \sigma_{12}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 \sigma_{22}) + \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \sigma_{12} - \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \sigma_{11} = 0$$

Соотношения Коши для скоростей деформации определяются по формулам

$$e_{11} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial v}{\partial q_1}, \quad e_{12} = \frac{H_1}{2H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{v}{H_1} \right) \quad (1.4)$$

$$e_{22} = \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} v, \quad v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$$

где  $e_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензоров в системе координат  $q_1, q_2$ .

Введем угол  $\gamma$  между направлением линии тока  $q_1$  и направлением линии максимального касательного напряжения, совпадающего в силу изотропии с линией скольжения, тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma + T \sin 2\gamma, & e_{11} &= \kappa \sin 2\gamma \\ \sigma_{22} &= \sigma - T \sin 2\gamma, & e_{22} &= -\kappa \sin 2\gamma \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\sigma_{12} = T \cos 2\gamma, \quad e_{12} = \kappa \cos 2\gamma$$

Запишем уравнения равновесия (1.3) с учетом (1.5):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial q_1} + \frac{\partial (T \sin 2\gamma)}{\partial q_1} + \frac{2T \cos 2\gamma}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial (T \cos 2\gamma)}{\partial q_2} + \frac{2T \sin 2\gamma}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial q_2} - \frac{\partial (T \sin 2\gamma)}{\partial q_2} + \frac{2T \cos 2\gamma}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial (T \cos 2\gamma)}{\partial q_1} - \frac{2T \sin 2\gamma}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} = 0$$

Определим далее кинематические параметры. Из условия несжимаемости  $e_{11} + e_{22} = 0$  и (1.4) следует выражение  $\partial \ln v / \partial q_1 = -\partial \ln H_2 / \partial q_1$ . Откуда для модуля скорости  $v$  получим

$$v = f(q_2) / H_2 \quad (1.7)$$

Угол  $\gamma$  находится из (1.5):

$$\operatorname{ctg} 2\gamma = \frac{H_1}{2\partial H_2 / \partial q_1} \frac{\partial}{\partial q_2} \ln \frac{H_1 H_2}{f(q_2)} \quad (1.8)$$

Выразим параметр Одквиста через  $f(q_2)$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ . Для этого воспользуемся условием стационарности  $\partial \kappa / \partial t = 0$ , откуда  $\dot{\kappa} = (v/H_1) \partial \kappa / \partial q_1$ .

Из (1.4) и (1.5) получим

$$\frac{\partial \kappa}{\partial q_1} = \begin{cases} -\frac{1}{\sin 2\gamma} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1}, & \gamma \neq 0 \\ \frac{1}{2H_2 \cos 2\gamma} \frac{\partial}{\partial q_2} \ln \left( \frac{v}{H_1} \right), & \gamma \neq \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (1.9)$$

Предполагая  $\gamma \neq 0$ , проинтегрируем первое выражение (1.9):

$$\kappa(q_1, q_2) = - \int_{q_1^{(0)}}^{q_1} \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} \frac{dq_1}{\sin 2\gamma} \quad (1.10)$$

В частном случае, когда  $\gamma = \gamma(q_2)$ :

$$\kappa(q_1, q_2) = \frac{1}{\sin 2\gamma} \ln \frac{\Psi(q_2)}{H_2} \quad (1.11)$$

где  $\Psi(q_2)$  — функция, определяемая из задания начальных условий для  $\kappa$ . Таким образом, величины  $\gamma$ ,  $\kappa$  представлены через  $f(q_2)$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ . Подставляя найденные выражения для  $\gamma$  и  $\kappa$  в уравнения равновесия (1.6) и исключая дифференцированием  $\sigma(q_1, q_2)$ , получаем одно дифференциальное уравнение третьего порядка для функции  $f(q_2)$ , являющееся уравнением совместности полей скоростей и напряжений.

Уравнения равновесия (1.7) в общем случае не интегрируются; однако в частных случаях допускают интегралы. Рассмотрим случай  $\gamma = \pi/4$ , когда направления линии тока и направления первого главного напряжения совпадают, тогда уравнения равновесия (1.7) примут вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial q_1} + \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{2T}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} = 0 \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial q_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} - \frac{2T}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} = 0$$

С учетом  $d\kappa = -d \ln H_2$ , следующего из (1.9), уравнения (1.12) допускают интеграл вдоль  $q_1$ :

$$\sigma + T - \Phi(\kappa) = C(q_2), \quad \Phi'(\kappa) = T(\kappa) \quad (1.13)$$

В случае, когда направления линий тока и направления линий скольжения совпадают ( $\gamma = 0$ ), уравнения равновесия (1.7) будут

$$\frac{\partial \sigma}{\partial q_1} + \frac{2T}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0 \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial q_2} + \frac{H_2}{H_1} \frac{dT(\kappa)}{d\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial q_1} = 0$$

и из (1.9) следует

$$\frac{\partial \kappa}{\partial q_1} = \frac{H_1}{2H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \ln \left( \frac{v}{H_1} \right)$$

Для линейного упрочнения

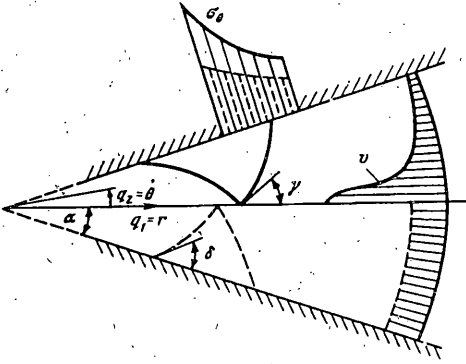
$$T(\kappa) = \tau_s + G'\kappa \quad (1.15)$$

Второе уравнение (1.14) интегрируется вдоль  $q_2$

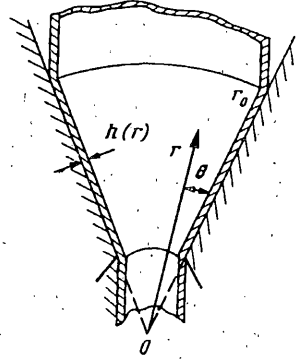
$$\sigma + \frac{1}{2}G' \ln(v/H_1) = C_1(q_1) \quad (1.16)$$

2. Рассмотрим течение упрочняющегося материала в сходящемся канале с прямолинейными шероховатыми стенками (фиг. 1), предполагая, что линии тока частиц — лучи, направленные к центру

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad H_1 = 1, \quad H_2 = r \quad (2.1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Модуль вектора скорости на основании (1.7) будет

$$v = -f(\theta)/r, \quad f(\theta) > 0 \quad (2.2)$$

Из (1.8) следует, что  $\gamma = \gamma(\theta)$  и удовлетворяет уравнению  $\operatorname{ctg} 2\gamma(\theta) = -1/2f'(\theta)/f(\theta)$ . В этом случае параметр Одквиста  $\kappa$  интегрируется вдоль линии тока (1.11):

$$\kappa = \frac{1}{\sin 2\gamma(\theta)} \ln \frac{\Psi(\theta)}{r}$$

Будем предполагать, что материал удовлетворяет условию линейного упрочнения  $T(\kappa) = \tau_s + G'\kappa$ ; запишем уравнения равновесия

$$r\sigma_r + 2\tau_s \sin 2\gamma(1 - \gamma_{,0}) + G' \left( 2 \ln \frac{\Psi}{r} + \left( \operatorname{ctg} 2\gamma \ln \frac{\Psi}{r} \right)_{,0} \right) = 0 \quad (2.3)$$

$$\sigma_{\theta,0} + 2\tau_s \cos 2\gamma(1 - \gamma_{,0}) + G' \left( \left( 2 \ln \frac{\Psi}{r} - 1 \right) \operatorname{ctg} 2\gamma - \left( \ln \frac{\Psi}{r} \right)_{,0} \right) = 0$$

Для упрощения выкладок примем  $\tau_s \ll G'\kappa$  (слагаемые с  $\tau_s$  не вносят качественных изменений в решение). Исключая  $\sigma$  из (2.3) дифференцированием, получим

$$\left( \ln \frac{\Psi}{r} \operatorname{ctg} 2\gamma \right)_{,00} + 2 \left( \ln \frac{\Psi}{r} \right)_{,0} + 2 \operatorname{ctg} 2\gamma = 0 \quad (2.4)$$

Решение этого уравнения будет

$$\operatorname{ctg} 2\gamma = C\theta$$

$$\ln \Psi = \begin{cases} -\frac{\theta^2}{1+A} + \frac{M\theta^{1-A}}{1-A} + M_1 & (A \neq 1) \\ M \ln |\theta| & (A = 1) \end{cases} \quad (2.5)$$

$$A = 2(1 + 1/C)$$

где  $C, M, M_1$  — константы. Подставляя решение (2.5) в уравнения равновесия найдем

$$\sigma(r, \theta) = CG'\theta^2 \ln r + g(r) + l(\theta) \quad (2.6)$$

$$g(r) = G'(1 - (2 + C)M_1) \ln r + G'(2 + C) \frac{\ln^2 r}{2} + \text{const}$$

$$l(\theta) = \frac{G'C}{2(1+A)} \theta^4 + G' \left( \frac{C}{2} - CM_1 - \frac{1}{1+A} \right) \theta^2 + \text{const}$$

Интегрируя (2.2), найдем значение модуля скорости

$$v = v_0 \exp(-C\theta^2)/r \quad (2.7)$$

где константа  $v_0$  определяется заданием расхода материала. Отметим особенность в постановке краевой задачи для бесконечного канала: нельзя задавать произвольные начальные данные ( $r = r_0$ ) для  $v$ ,  $\kappa$ ,  $\sigma$ , так как из (2.5) и (2.6) следует, что вид функций определен с точностью до констант, которые можно определить лишь некоторыми интегральными по сечению  $r = r_0$  величинами.

Рассмотренная модель течения в шероховатом канале (движение частиц по лучам к центру) не удовлетворяет краевым условиям на стенках ( $\theta = \pm \alpha$ ) типа трения Кулона — Мора:  $\tau_0 = \mu\sigma_0$ . Более естественным является задание краевого условия в виде

$$\tau_0 = \cos(2\delta) T, \quad 0 < \delta \leq \pi/4 \quad (2.8)$$

предложенном Соколовским [2]. Для случая задания краевого условия (2.8) константа  $C = \text{ctg } 2\delta/\alpha$ . На фиг. 1 представлены профили скорости  $v$  и давления на стенке канала  $\sigma_0$ , а также линии скольжения для течения в гладком канале (штриховые линии,  $\delta = \pi/4$ ) и в канале с сильношероховатыми стенками (сплошные линии,  $\delta \ll 1$ ). Решение для гладкого канала совпадает с решением в [4], для случая сильношероховатого канала течение происходит в основном по центру канала, скорость на стенке  $v(\pm \alpha) \sim O(\delta) r^{-1}$ , т. е. условие прилипания выполняется лишь в асимптотическом смысле.

3. Рассмотрим задачу о волочении тонкостенной трубы через гладкую коническую матрицу. Предположим, следуя Хиллу [7], что напряженное состояние является обобщенно-плоским, течение — радиально, изменения скорости по толщине  $h = h(r)$  пренебрежимо мало. Запишем уравнения течения, выбирая в качестве координат — координаты  $r$  и  $\theta$  на конической поверхности (фиг. 2), с параметрами Ламе  $H_1 = 1$ ,  $H_2 = h(r)r$ . Уравнения равновесия

$$\frac{d}{dr}(rh\sigma_r) = h\sigma_\theta \quad (3.1)$$

условие несжимаемости (1.7),  $f(q_2) = C$ :

$$v = C/(rh) \quad (3.2)$$

Условие пластичности для упрочняющегося материала Мизеса

$$\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = 3T^2(\kappa) \quad (3.3)$$

Параметр Одквиста  $\kappa$  в установившемся процессе будет определяться

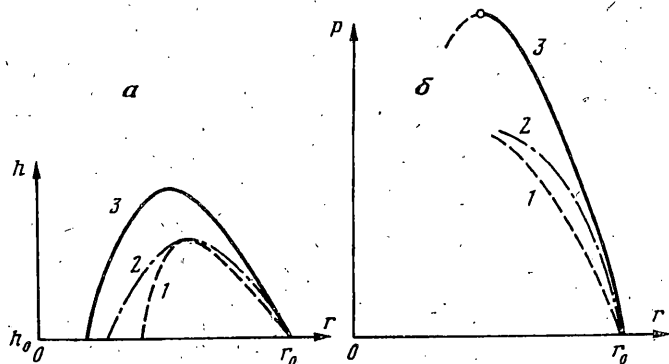
$$\dot{\kappa} = -(d\kappa/dr) v \quad (3.4)$$

и в силу того, что напряженное состояние является обобщенно-плоским,  $e_z = -(e_r + e_\theta)$ ; откуда следует

$$\dot{\kappa} = (e_{ij}e_{ij})^{1/2} = \sqrt{2} (e_r^2 + e_\theta^2 + e_r e_\theta)^{1/2} \quad (3.5)$$

Компоненты тензора скоростей деформации связаны с модулем вектора скорости условиями Коши

$$e_r = dv/dr, \quad e_\theta = v/r \quad (3.6)$$



Фиг. 3

Введем новую переменную  $\omega(r)$  для тождественного удовлетворения условию течучести (3.3) и выразим через нее компоненты тензоров

$$\begin{aligned} \sigma_r &= T(\kappa) \cos(\omega - \pi/6), & e_r &= \lambda S_r = \lambda T \sin(\omega + \pi/6) \\ \sigma_\theta &= T(\kappa) \cos(\omega + \pi/6), & e_\theta &= \lambda S_\theta = -\lambda T \sin(\omega - \pi/6) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\tau_{r\theta} = 0, \quad e_{r\theta} = 0$$

Из (3.6) и (3.7) следует уравнение связи переменной  $\omega$  с модулем вектора скорости  $v$ :

$$\frac{e_r}{e_\theta} = \frac{dv/dr}{v/r} = -\rho(\omega), \quad \rho(\omega) = \frac{\sin(\omega + \pi/6)}{\sin(\omega - \pi/6)} \quad (3.8)$$

Из (3.4) и (3.5) получим уравнение для  $\kappa$ :

$$\frac{d\kappa}{dr} = -\frac{\sqrt{2}}{v} e_\theta \left(1 + \frac{e_r}{e_\theta} + \left(\frac{e_r}{e_\theta}\right)^2\right)^{1/2} = -\frac{\sqrt{2}}{r} (1 - \rho(\omega) + \rho^2(\omega))^{1/2} \quad (3.9)$$

Два последних уравнения вместе с условием несжимаемости (3.2) и уравнением равновесия (3.1), записанном в виде

$$\frac{d}{dr} (hT(\kappa) \cos(\omega - \pi/6)) + \frac{h}{r} \sin \omega = 0 \quad (3.10)$$

образуют замкнутую систему квазилинейных уравнений для четырех переменных  $h, v, \kappa, \omega$ . Граничные условия для постановки задачи Коши заданы на входной кромке ( $r = r_0$ ):  $h = h_0, v = v_0, \kappa = \kappa_0$ , если силы на кромке отсутствуют, то  $\sigma_r = 0$ ; откуда  $\omega_0 = \omega(r_0) = 2/3\pi$ .

Перейдем к независимой переменной  $\omega$ ; из уравнения несжимаемости (3.2) следует

$$\frac{dr}{d\omega} + r \left( \frac{dV}{d\omega} + \frac{dH}{d\omega} \right) = 0, \quad V = \ln v, \quad H = \ln h \quad (3.11)$$

Тогда уравнения (3.8)–(3.10) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \left( \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) - \sin \omega \right) \frac{dH}{d\omega} - \sin \omega \frac{dV}{d\omega} + \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) \frac{T'(\kappa)}{T(\kappa)} \frac{d\kappa}{d\omega} &= \sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) \\ -\rho(\omega) \frac{dH}{d\omega} + (1 - \rho(\omega)) \frac{dV}{d\omega} &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\sqrt{2} (1 - \rho(\omega) + \rho^2(\omega))^{1/2} \frac{dH}{d\omega} + \sqrt{2} (1 - \rho(\omega) + \rho^2(\omega))^{1/2} \frac{dV}{d\omega} - \frac{dx}{d\omega} = 0$$

Система квазилинейных уравнений (3.12) решалась численно. На фиг. 3 представлены графики зависимостей  $h(r)$  и  $P(r)$ , где  $P(r) = 2\pi r h(r) \sigma$ , — интегральное по сечению усилие волочения, для идеально пластического течения и течения упрочняющегося материала. Кривые 1 соответствуют  $T(x) = \tau_x = 1$ , кривые 2 —  $T(x) = 1 + G'x$  ( $G' = 0, 1$ ), кривые 3 —  $T(x) = \Gamma + x^\beta$  ( $\beta = 0, 12$ ). Предельный переход к идеально пластическому решению при стремлении параметров упрочнения к нулю отсутствует.

Не останавливаясь подробно на анализе решений задач, отметим, что решения, построенные полуобратным методом, являются кинематически возможными. В теории идеальной пластичности физическую содержательность решениям доставляют теоремы о предельной нагрузке [7], для упрочняющихся тел подобные теоремы для установившегося течения не доказаны, поэтому можно высказать лишь в качестве гипотезы, что величины градиента давления или усилия, найденные полуобратным методом, являются верхней оценкой для действительных нагрузок.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 398 с.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
3. Palmer W. B., Oxley P. L. B. Mechanics of orthogonal machining//Proc. Inst. Mech. Engrs. 1959. V. 173. № 24. P. 623—654.
4. Ключников В. Д. Плоское установившееся течение упрочняющегося жесткопластического материала//Докл. АН СССР. 1988. Т. 303. № 4. С. 815—817.
5. Григорьев О. Д. К теории плоской деформации жесткопластического тела//ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 5. С. 906—911.
6. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М.—Л.: Наука, 1948. 211 с.
7. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.

Москва

Поступила в редакцию  
27.XII.1991