МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1993

УДК 539.214;539.374

 Ю. С. НАЙШТУТ

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

К настоящему времени выполнено много работ, в которых существование решений в теории Прандтля — Рейсса получено на основе вариационных неравенств [1]. Связь этих результатов с минимальными механическими принципами [2] для упругопластических сред остается невыясненной [3].

В публикуемой работе предлагается прямое расширение вариационной формулировки краевых задач теории течения, приводящее к существованию решений в классах, аналогичных [1].

Для задач идеальной пластичности доказан обобщенный смешанный вариационный принцип, совпадающий в теории упругости с принципом Рейсснера. Указаны условия, когда найденные решения удовлетворяют исходным определяющим соотношениям Прандтля — Рейсса.

1. В этом пункте не содержатся определения пространств, в которых разыскиваются напряжения и скорости перемещений, поэтому все рассуждения носят наводящий характер.

Рассматривается область D, на части границы которой ∂D_p заданы поверхностные нагрузки p_i, а часть границы ∂D_u закреплена $v(\partial D_u) = 0$. Вектор перемещений назовем w, вектор скоростей v, тензор напряжений σ_{ij}, вектор объемных сил X_i. Все тензоры зависят от трех координат точки области x_i и времени $t \in [0, T]$.

Точки над тензором обозначают производную по времени. Тензор деформации $\varepsilon_{ij}(v) = ½(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$, единичный вектор внешней нормали к ∂D обозначен n_j.

В [2, 4] сформулировано утверждение: при любом $t \in [0, T]$ абсолютный минимум выражения

$$I(\dot{\sigma}^*_{ij}) = \frac{1}{2}\int_D c_{ijkl}\dot{\sigma}^*_{ij}\dot{\sigma}^*_{kl}dx \tag{1.1}$$

определенного для всех статистически допустимых σ^*_{ij}, отвечает действительному распределению скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$. Кроме того, одновременно существует вектор v, связанный с σ_{ij} законом Прандтля — Рейсса

$$\varepsilon_{ij} = c_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + \lambda\partial\Phi/\partial n \tag{1.2}$$

Здесь c_{ijkl} — модули упругости, параметр λ выбирается из соотношений $\lambda = 0$, если $\Phi(\sigma_{ij}) < 2k^2$ или $\Phi(\sigma_{ij}) = 2k^2$, $\sigma_{ij}\partial\Phi/\partial\sigma_{ij} < 0$, $\lambda > 0$, если $\Phi(\sigma_{ij}) = 2k^2$ и $\sigma_{ij}\partial\Phi/\partial\sigma_{ij} = 0$. Постоянная k равна пределу текучести материала на сдвиг.

Статическая допустимость обозначает, что для каждого момента времени σ^*_{ij} удовлетворяют внутри D уравнениям равновесия

$$\sigma^*_{ij,j} + X_i = 0 \tag{1.3}$$

На границе ∂D_p:

$$\dot{\sigma}^*_{ij} n_j = 0 \tag{1.4}$$

Тензор σ^0_{ij} не должен находиться на границе гладкой выпуклой области из R^6:

$$\Phi(\sigma^*_{ij}) \leq 2k^2 \tag{1.5}$$

Если существует тензор σ^0_{ij}, удовлетворяющий (1.3), (1.4), то для любого допустимого v обе зависимости равносильны одному уравнению

$$\int_D (\dot{\sigma}^*_{ij} - \dot{\sigma}^0_{ij})\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx = 0 \tag{1.6}$$

Допустимый тензор v должен равняться нулю на ∂D_u.

Итак, требуется доказать существование σ_{ij}, v по условиям (1.1), (1.5), (1.6).

Если эта задача разрешима, то чаще всего находится функция Лагранжа

$$L(\dot{\sigma}^*_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}(v)) = 1/2 \int_D c_{ijkl} \dot{\sigma}^*_{ij} \dot{\sigma}^*_{kl} dx - \int_D (\dot{\sigma}^*_{ij} - \sigma^0_{ij})\, \varepsilon_{ij}(v)\, dx \tag{1.7}$$

которая при условии (1.5) стационарна в точке σ_{ij}, v.

Заметим, что при отсутствии (1.5) требование стационарности (1.7) представляет собой принцип Рейсснера в теории упругости.

Этот принцип может быть обоснован, если ввести гильбертовы пространства H со скалярным произведением

$$(\dot{\sigma}_{ij}, \dot{\sigma}^*_{ij})_H = \int_D \dot{\sigma}_{ij} \dot{\sigma}^*_{ij} dx$$

и $V(v)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_V = \int_D \varepsilon_{ij}(v)\, \varepsilon_{ij}(u)\, dx$$

Тогда в пространстве $W = H \times V$ для

$$L(\dot{\sigma}_{ij}, v) = 1/2\, (c_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij}, \dot{\sigma}_{kl}) - ((\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}^0_{ij}), \varepsilon_{ij}(v)) \tag{1.8}$$

существует единственная стационарная точка, являющаяся седлом.

Доказательство следует из коэрцитивности формы

$$(c_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij}, \dot{\sigma}_{kl}) \geq c_1 \|\dot{\sigma}_{ij}\|^2_H$$

и в силу соотношения

$$\inf_{\dot{\sigma}_{ij} \in H} (1/2\, (c_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij}, \dot{\sigma}_{kl}) - (\dot{\sigma}_{ij}, \varepsilon_{ij})) = -1/2\, (c^{-1}_{ijkl} \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl})$$

неравенства $\inf_{\dot{\sigma}_{ij} \in H} L(\dot{\sigma}_{ij}, v) \leq -c \|v\|^2_V + c_0$ с некоторыми константами c, c_0, c_1. При соответствующей гладкости σ_{ij} второй член в (1.8) преобразуется по частям, и $L(\dot{\sigma}_{ij}, v)$ принимает вид

$$L(\dot{\sigma}_{ij}, v) = 1/2\, (c_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij}, \dot{\sigma}_{kl}) + ((\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{X}_i), v) \tag{1.9}$$

Цель последующего изложения состоит в том, чтобы найти такое расширение классических вариационных принципов, при котором на множестве с ограничением (1.5) существуют σ_{ij}, v, являющиеся седловой точкой надлежащим образом обобщенной функции Лагранжа (1.9).

2. Переходим к точным формулировкам. Определим четырехмерный цилиндр $M = D \times [0, T]$, точки множества M назовем буквами m. Все вводимые тензоры являются функциями четырех координат $m(x_1, x_2, x_3, t)$. Боковая поверхность

цилиндра состоит из двух частей $\partial M = \partial M_u \cup \partial M_p$: $\partial M_u = \partial D_u \times [0, T]$, $\partial M_p = \partial D_p \times [0, T]$.

Построим пограничные полосы высоты h [5], примыкающие к ∂M_u и ∂M_p вдоль нормалей к ∂M. Обозначим их соответственно ∂M_u^h, ∂M_p^h.

Введем гильбертово пространство H функций $\sigma_{ij}(m)$, равных нулю на основании цилиндра $t = 0$:

$$\sigma_{ij}(m)|_{t=0} = 0 \tag{2.1}$$

со скалярным произведением

$$(\sigma_{ij}^1, \sigma_{ij}^2)_H = \int_M \sigma_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dm, \quad dm = dx_1 dx_2 dx_3 dt \tag{2.2}$$

Гильбертово пространство $\dot{H}$ функций $\sigma_{ij}(m)$ получается пополнением дифференцируемых по t функций из H в норме, определяемой скалярным произведением

$$(\sigma_{ij}^1, \sigma_{ij}^2)_{\dot{H}} = \int_M \dot{\sigma}_{ij}^1 \dot{\sigma}_{ij}^2 dm \tag{2.3}$$

Формула (2.3) действительно определяет гильбертово пространство, так как вследствие (2.1) имеет место неравенство

$$\|\sigma_{ij}\|_{\dot{H}} \geq c\, \|\sigma_{ij}\|_H \tag{2.4}$$

Здесь и в дальнейшем буква c (иногда с одним индексом) обозначает различные константы.

Определим пространство возможных скоростей точек m, которое назовем V_R^*, как множество мер Радона с нормой

$$\|v\|_{V_R^*} = \int_{M^+} v(dm) + \left| \int_{M^-} v(dm) \right|$$

где M^+ и M^- — разбиение области M на подобласти положительной и отрицательной меры. Пусть

$$\|v(\partial M_u^h)\|_{V_R^*} = 0 \tag{2.5}$$

$$\|\sigma_{ij} n_j (\partial M_p^h)\|_{L^\infty(M)} = 0 \tag{2.6}$$

Выделим в $\dot{H}$ и V_R^* выпуклые замкнутые множества $\sigma_{ij} \in R$, $v \in V^*$, удовлетворяющие (2.5), (2.6), с двумя дополнительными свойствами

$$R = \{\sigma_{ij} | \sigma_{ij,j} \in L^\infty(D),\ \sigma_{ij} \in \dot{H},\ \Phi(\sigma_{ij}) \leq 2k^2\} \tag{2.7}$$

где $\Phi(\sigma_{ij})$ – функция, ограничивающая гладкую выпуклую область R^6. Далее потребуем, чтобы для заданной истории нагружения X_i коэффициент запаса n в любой момент времени t:

$$n \geq 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{2.8}$$

Формально это свойство можно описать так [6, 7]: существует такое число $\alpha > 0$, при котором для истории нагружения $X_i + \alpha x(m)$, $X_i \in L^\infty(M)$ с любым $\|x\|_{L^\infty(M)} < c$ существует статически допустимый тензор $\sigma_{ij}' \in R$, т. е.

$$\sigma_{ij}' + X_i + \alpha x = 0, \quad \Phi(\sigma_{ij}') \leq 2k^2 \tag{2.9}$$

Соотношение (2.9) вытекает из (2.8). В самом деле, из $n > 1 + \varepsilon$ следует существование σ_{ij}^0, удовлетворяющего зависимостям

$$\sigma_{ij,j}^0 + X_i = 0, \quad \Phi(\sigma_{ij}^0) \leq 2k^2 - c\varepsilon \tag{2.10}$$

Для любой нагрузки $x \in L^\infty(M)$ найдется такая константа c, что

$$\|\sigma_{ij}^a\|_{L^\infty(M)} \le c\,\|x\|_{L^\infty(M)} \tag{2.11}$$

В качестве σ_{ij}^a можно взять, например, упругое решение для цилиндра $M^0 \supset M \cup \partial M_u^h \cup \partial M_p^h$, $v(\partial M^0) = 0$. Ясно, что $\Phi(\sigma_{ij}^0 + \alpha c \sigma_{ij}^a) \le 2k^2$, если α мало.

На множестве $R \times V^*$ определим функцию Лагранжа

$$L(\sigma_{ij}, v) = \tfrac{1}{2}\int_M c_{ijkl}\dot\sigma_{ij}\dot\sigma_{kl}dm + \int_M (\dot\sigma_{ij,j} + \dot X_i)\, v(dm) \tag{2.12}$$

Постулируем теперь смешанный вариационный принцип теории течения идеальных упругопластических тел: на множестве $R \times V^*$ найти такие σ_{ij} и v, чтобы они соответствовали седловой точке функции Лагранжа $L(\sigma_{ij}, v)$.

Тензор σ_{ij} и мера v существуют.

Для доказательства воспользуемся следующим общим результатом [8]. Пусть $\dot H$ – рефлексивное банахово пространство, V_R^* является сопряженным к банахову пространству V [9] ограниченных на M функций. Предположим, что $R \subset \dot H$ – непустое выпуклое замкнутое множество.

Если существует $\exists\, v_0 \in V^*$ такое, что

$$\lim_{\substack{\sigma_{ij}\in R\\ \|\sigma_{ij}\|_H \to \infty}} L(\sigma_{ij}, v_0) = \infty \tag{2.13}$$

и выполняется соотношение

$$\lim_{\substack{v\in V^*\\ \|v\|_{V_R^*(M)}\to\infty}} \inf_{\sigma_{ij}\in R} L(\sigma_{ij}, v) = -\infty \tag{2.14}$$

тогда $L(\sigma_{ij}, v)$ имеет на $R \times V^*$ седловую точку σ_{ij}, v и

$$L(\sigma_{ij}, v) = \min_{\sigma_{ij}'\in R} \sup_{v\in V^*} L(\sigma_{ij}', v') = \max_{v\in V^*} \inf_{\sigma_{ij}'\in R} L(\sigma_{ij}', v') = m_0 \tag{2.15}$$

Если числовой ряд $m_k \to m_0$, то в соответствующих последовательностях σ_{ij}', v' можно выбрать сходящиеся подпоследовательности такие, что $\sigma_{ij}' \to \sigma_{ij}$ слабо в $\dot H$, а $v' \to v$ – слабо в V_R^*.

Свойство (2.13) выполняется при $v = 0$ в силу положительной определенности формы $(c_{ijkl}\sigma_{ij}, \sigma_{kl})_{\dot H} \ge c\,\|\sigma_{ij}\|_{\dot H}^2$.

Для проверки (2.14) выбираем функцию $\dot x(m)$ следующим образом: $\dot x(m) = -1$, если $v(dm) > 0$; $\dot x(m) = 0$, когда $v(dm) = 0$; $\dot x(m) = 1$, если $v(dm) < 0$. Тогда, приняв σ_{ij} по формуле (2.9), после подстановки в (2.12) найдем

$$\inf_{\sigma_{ij}\in R} L(\sigma_{ij}, v) \le -c\,\|v\|_{V_R^*} + c_1$$

Отсюда вытекает (2.14). Смешанный вариационный принцип обоснован. Он является расширением классических минимальных принципов теории упругопластических сред [2].

Действительно, если класс R' статически допустимых тензоров не пуст, то для $\sigma_{ij} \in R'$ второй член $L(\sigma_{ij}, v)$ пропадает, (2.12) сводится к минимальной задаче

$$\min_{\dot\sigma_{ij}^*\in R'} I(\dot\sigma_{ij}^*) = \tfrac{1}{2}\int_M c_{ijkl}\dot\sigma_{ij}^*\dot\sigma_{kl}^* dm, \quad \dot\sigma_{ij,j}^* + \dot X_i = 0 \tag{2.16}$$

Проблема (2.16) имеет единственное решение вследствие монотонности квадратичной формы.

Переход к (1.1) возможен только тогда, когда поля σ_{ij} допускают достаточно гладкий след на все сечения по t цилиндра M. Если же в дополнение $v(m)$ окажется дифференцируемой по координатам x_1, x_2, x_3, t функцией, то в (2.12) можно заменить M на D, преобразовать второй интеграл по частям, получив стандартным образом из смешанного вариационного принципа неравенство

$$\int_D c_{ijkl}(\dot\sigma_{ij} - \dot\sigma^*_{ij})\,\dot\sigma_{kl}dx - \int_D \varepsilon_{ij}(v)(\dot\sigma_{ij} - \dot\sigma^*_{ij})\,dx \geq 0, \quad \forall\sigma_{ij} \in R'$$

Наконец, соотношение (2.4) позволяет заменить $(\dot\sigma_{ij} - \dot\sigma^*_{ij})$ на $(\sigma_{ij} - \sigma^*_{ij})$ и найти

$$\int_D (c_{ijkl}\dot\sigma_{kl} - \varepsilon_{ij}(v))(\sigma_{ij} - \sigma^*_{ij})\,dx \geq 0$$

Если для каких-либо точек области тензор σ_{ij} удовлетворяет неравенству $\Phi(\sigma_{ij}) < 2k^2$, то тензоры σ^*_{ij} заполняют шаровую окрестность σ_{ij}, следовательно

$$\varepsilon_{ij}(v) = c_{ijkl}\dot\sigma_{kl} \tag{2.17}$$

Если же $\Phi(\sigma_{ij}) = 2k^2$, то

$$\varepsilon_{ij} = c_{ijkl}\dot\sigma_{kl} + \lambda\partial\Phi/\partial n, \quad \lambda \geq 0 \tag{2.18}$$

Число $\lambda = 0$, если σ^*_{ij} может лежать внутри поверхности $\Phi(\sigma_{ij}) = 2k^2$ и $\lambda > 0$, если σ^*_{ij} находится на этой поверхности.

Равенства (2.17), (2.18) представляет собой определяющие уравнения Прандтля — Рейсса.

Таким образом, из обобщенного смешанного принципа следует существование классических решений при условии достаточной гладкости σ_{ij}, v. Выяснение условий, при которых σ_{ij}, v являются гладкими функциями, остается нерешенной задачей [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения. М.: Мир, 1989. 492 с.
2. *Койтер В. Т.* Общие теоремы теории упругопластических сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 79 с.
3. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
4. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
5. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1952. 216 с.
6. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
7. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Теория жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
8. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959. 684 с.
10. *Фридман А.* Вариационные принципы и задачи со свободными границами. М.: Наука, 1990. 536 с.

Самара

Поступила в редакцию
8.1.1992